N° 110 – Décembre 2008

Feuille de Vigne

Irem de Dijon

- De la mise en œuvre d'un problème d'élève de CP à un problème de devoir blanc de PE1 : les tours à trois étages.
- La notation puissance et ses mystères.
- D'autres critères pour les triangles isométriques, vagabondages mathématiques.

Revue Trimestrielle

Issn 0246-5752

© Irem de Dijon – 2008

Sommaire

Editorial

Le Rallye Mathématique de Bourgogne 2009 pointe le bout de son nez, et chaque collègue de lycée, je l'espère, a commencé à lui faire de la pub. Bien sûr votre serviteur n'échappe pas à la règle, pour tout un tas de raisons. D'abord, parce que je suis membre de l'IREM, et je me ferai taper sur les doigts si le nombre d'inscrits dans mon lycée n'est pas jugé satisfaisant par le Politburo. Ensuite, parce que j'arrive dans un nouvel établissement, et que la collègue qui s'occupe du Rallye cette année m'a passé la feuille d'inscription avec tant de naturel et d'assurance, que je me suis engagé à la remplir entièrement, convaincu par son attitude que les élèves avaient l'habitude de se ruer massivement sur le Rallye comme les lemmings dans la Mer Baltique le printemps venu.

Me voilà donc face à ma classe de terminale ES, les plus sérieux de mes élèves – pensez donc, ils ont le bac à la fin de l'année, et beaucoup sont majeurs. J'annonce le Rallye, donne les dates d'inscriptions, et attend. D'armée de lemmings, point : un grand silence accueille mes paroles. Puis c'est la foire aux questions, les trois plus fréquentes étant : 1) qu'est-ce qu'on gagne, 2) combien ça coûte, et 3) c'est quoi comme type d'exercice. J'élude 1) en leur promettant playstations et lecteurs mp3, un peu agacé par la vénalité proverbiale des élèves français, et les rassure sur 2) en leur confirmant que c'est gratuit. Reste que pour le 3), c'est pas gagné : ils ne veulent pas faire de calculs de primitives ou de la géométrie, me disent-ils. Je les rassure à nouveau : les exercices sont des jeux mathématiques à l'énoncé très simple et qui leur donneront plus de plaisir que de fil à retordre. Et là, c'est l'incompréhension : du plaisir à faire des exercices de maths ?

Je peux comprendre que pour des élèves de terminale conditionnés à marquer des points au Bac sur des exercices types, ce ne soit pas très drôle de sortir des sentiers bien balisés où on essaie de les maintenir, pour aller battre la campagne mathématiquement parlant pour calculer l'âge du capitaine et le nombre de pierres dans la pyramide de Gizeh. Mais au fond, ces questions, même si elles n'ont aucune application pratique, même pas obtenir des points à l'examen, sont juste des énigmes sympathiques à résoudre, et c'est la recherche de la solution qui est importante. Là est la vraie démarche mathématique. C'est ce que j'essaie de leur expliquer avec un petit exemple : j'ai 9 cubes indiscernables dont 8 de même poids et un plus lourd, et j'ai une balance à plateaux ; comment trouver le cube plus lourd en seulement deux pesées ? Je n'ai même pas le temps de les voir se mettre au travail que déjà une élève, d'habitude très discrète, m'a trouvé la bonne solution (la connaissez-vous ?) (pas mon élève, mais la réponse !). Là, je sens que j'ai marqué un point. Une autre me propose une énigme : un homme rentre dans un restaurant, commande une soupe au pélican, sort et se suicide (vous la connaissez sans doute, non ?) (alors réponse au prochain numéro !). Ca ne repose pas du tout sur la logique mais sur la découverte progressive d'un enchaînement de faits abracadabrants et tordus. Mais l'idée de jeu est là, et c'est ce que j'ai réussi à leur faire comprendre : faire des maths, c'est souvent jouer avec des règles et voir où elles vont nous emmener. Encore faut-il jouer selon les règles, et nous les profs bataillons avec les élèves pour les leur apprendre ; mais de nombreuses règles mathématiques sont basées sur le sens commun, et on peut donc faire des maths sans en avoir l'air, sous le déguisement de la « logique » ou de la « réflexion » : qu'est-ce que le sudoku sinon un avatar des mots croisés avec un vernis de maths dessus ? On peut très bien remplacer les chiffres par des lettres ou des légumes, la résolution est la même. Ces propos n'engagent que moi, bien sûr, et j'en assume l'entière responsabilité devant les amateurs du dit jeu, que j'engage à écrire un article là-dessus s'il s'avère que j'ai tort.

Bon, alors pour finir mon histoire, j'ai eu quelques inscriptions, et j'ai été moralement *obligé de leur avouer qu'on ne gagnait pas de scooter mais des livres et autres objets rétrogrades réservés aux intellos. Il n'en reste pas moins que nous autres gens sérieux et esthètes des mathématiques, qui pratiquons encore la règle à calcul et l'extraction de racines carrées à la main, trouvent plaisir à jouer avec les mathématiques. C'est le cas de Nicole Bonnet qui, partant d'un jeu tout simple en CP, nous écrit un bel article de niveau PE2, et de Michel Lafond qui a voulu jouer avec les règles des notations puissance et voir jusqu'où ça le mènerait. Un dernier article de Tristan Deray et moi-même raconte le jeu auquel nous nous sommes livrés à partir d'une remarque qu'un élève avait lancée sur les triangles… par jeu.*

Sinon, la réforme est repoussée, voilà voilà. Profitons-en, comme le souhaite le ministre, pour réfléchir à la suite ; mais on ne pense sans doute pas à la même chose..

David Magnien

B loc-notes

La Feuille de Vigne que vous tenez est restée un document papier que vous pouvez emporter, annoter, griffonner, commenter. Peut-être deviendra-t-elle un jour un simple journal numérique, je crois qu'elle y perdra de sa personnalité.
Qu'il me soit permis de remercier celle qui depuis des années en a assuré la reprographie, qui l'a couchée sur le papier, s'adaptant aux diverses maquettes proposées sans jamais les rogner, suggérant à l'occasion modification et amélioration et toujours très attachée à rendre un document maintes fois vérifié. C'est en Madame Jacqueline Alexandre que nous devions un travail de si grande qualité et d'une si grande humilité, avec pour premier objectif qu'on ne puisse rien y trouver à redire.
Merci Madame Alexandre pour ce travail de l'ombre, que vous avez effectué tout au long de ces années avec une efficacité remarquable et une rigueur professionnelle que parfois on a pu oublier, au-delà de l'évidence, tant il était le résultat d'un travail assidu et d'une rigueur quotidiennement éprouvée.
Nous vous souhaitons tous de profiter maintenant d'une retraite bien méritée et riche d'activités diverses et variées.

P.G.

NOUVELLES ACQUISITIONS À LA BIBLIOTHÈQUE

Les ouvrages de la bibliothèque sont à la disposition des enseignants de l'Académie
La durée du prêt est de un mois.

- ENGEL Arthur : Solutions d'expert – Pôle-Cassini, 2007
- FAVENNEC Denis : Douce perspective – Une histoire de Sciences et d'Art – Ellipses, 2007
- WARUSFEL André : Mathématiques – Cours et Exercices – Arithmétiques – Vuibert, 2002
- DENIERE Jocelyne – Denière L. : La géométrie… Pour le plaisir – Cube – parallélépipède – Tome 5 – 2005
- RITTAUD, Benoît – Hasard et probabilités – 4 à 47 – Le Pommier, 2002
- BUSSER Élisabeth – Cohen G. : Jeux mathématiques du "Monde" – 500 énigmes et leurs solutions – Pôle – Paris, 2007.
- JULIA Gilbert : Réussir l'épreuve sur dossier du Capes de Math – Dunod, 2008
- ESCOFFIER Jérôme : Probabilités et statistiques pour le Capes et l'Agrégation interne – Ellipses, 2006
- ESCOFIER Jean-Pierre : Toute l'algèbre de la licence – Dunod, 2006
- DUFETEL A. et Lacroix Sonrier M.Th. : Analyse – Epreuve écrite du Capes – Vuibert-Cned, 2000

- PICARD Philippe : Hasard et probabilités, Histoire, théorie et application – Vuibert, 2007
- DANTZER J.F. : Mathématiques pour l'agrégation interne, Analyse et probabilité – Vuibert, 2007
- HUBERT F. et Hubbard J. : Calcul scientifique de la théorie à la pratique – Équations Algébriques - Vuibert 2006
- HUBERT F. et Hubbard J. : Calcul scientifique de la théorie à la pratique – Équations différentielles, et équations aux dérivées partielles - Vuibert 2006
- GAULTIER Maurice : Probabilités – 70 exercices corrigés avec résumés de cours – Vuibert, 2002
- GAULTIER Maurice : Statistique – 100 exercices corrigés avec résumés de cours – Vuibert, 2005
- ROMBALDI J. Etienne : Interpolation et approximation ; analyse pour l'agréagtion – Vuibert, 2005
- ROMBALDI J. Etienne : Éléments d'analyse réelle ; Capes et Agrégation de mathématiques – EDP Sciences, 2004
- ROMBALDI J. Etienne : Analyse matricielle ; cours et exercices résolus ; EDP Sciences, 1999
- OUVRARD J.Y. : Probabilités 1 ; licence ; Capes – Cassini, 2007
- JEANNERET A. et LINES D. / Invitation à l'algèbre ; Théorie des groupes, ... - Cépaduès, 2008
- PROTASSON Konstantin : Analyse statistique des données expérimentales – EDP Sciences, 2002
- BERTRANDIAS J. Paul et Françoise : Mathématiques pour les sciences de la vie, de la nature et de la santé – EDP Sciences, 1997
- ATTEIA Marc et Gaches J. : Approximation hilbertienne – splines – ondelettes – fractales – EDP Sciences, 1999
- HEBERT Élisabeth : Instruments scientifiques à travers l'histoire – Ellipses, 2004
- The teaching company, 2005 – Algebra – Workbook study
  - NEAGOY Monica : Algebra 1 ; part 1 (2 DVD)
  - NEAGOY Monica : Algebra 1 ; part 2 (2 DVD)
  - NEAGOY Monica : Algebra 1 ; part 3 (2 DVD)
- BALIVIERA : Jeux 8 – Brochure APMEP n°185, 2008
- BUTLEN Denis : Le calcul mental entre sens et technique ; Collection "Didactiques mathématiques", PUFC 2007
- THILL Vincent : Curiosités arithmétiques – Le sanctuaire, 2008
- Collectif CII COLLEGE : Des nombres au collège ; parcours vers le réel... - Brochure n° 181 –APMEP, 2008

Agenda

Rappel : Dates des 3 Rallyes

Rallyes Mathématique des collèges de CÔTE D'OR et de SAÔNE ET LOIRE : **vendredi 30 janvier 2009.**
Attention *: cette année le rallye des Collèges de Saône et Loire est ouvert à* **TOUS** *les établissements du département*.

Rallye Mathématique des lycées de Bourgogne : mercredi 21 janvier 2009.

Informez-en vos élèves et inscrivez-les

Les comptes rendus des rallyes 2008 sont sur le site de l'IREM
http://www.u-bourgogne.fr/IREM/ puis cliquer sur "Formations" (colonne en haut à gauche)

2ème journée de formation

15 janvier 2009 Lieu : IREM, Faculté Sciences Mirande

Journée de formation organisée en collaboration avec l'IUFM de Bourgogne *:* ***Les programmes de 6e et de 2e par des parcours d'études et de recherches : une façon de redynamiser l'enseignement – MINET Nicolas,*** Agrégé, Lycée Berthelot à Chatellerault - ***TARRA Fabrice***, Agrégé, Collège Noël Noël à Angoulême - ***GAUD*** *Dominique,* Agrégé, LPI à Jaunay Clan.

Objectifs de la formation :
-Redynamiser l'enseignement des mathématiques par une réflexion autour de l'étude de parcours d'étude et de recherche.
- Présenter des parcours d'étude et de recherche en sixième et en seconde.

Contenus :
Présentation théorique succincte.
Présentation de réalisations concrètes dans les classes.

Si vous souhaitez vous inscrire, prendre contact avec l'IREM.

Stages de janvier, février et mars 2009 dont l'IREM est le responsable pedagogique

Intitulé de l'action	Intervenants	Dates	Lieux
Individualisation des apprentissages	D. GARDES	08/01/09	DIJON
Travail sur la langue en français et maths	D. GARDES	13/01/09 19/03/09	IUFM CHALON
Travail sur la langue en français et maths	D. GARDES	22/01/09 17/03/09	IUFM AUXERRE
Statistique et probabilité en collège	C. LABRUERE-CHAZAL & A. JEBRANE	29/01/09	IREM
Statistique et probabilité en collège	C. LABRUERE-CHAZAL & A. JEBRANE	05/02/09	CHALON
Histoire des probabilités	P. REGNARD	10/02/09	IREM
La modélisation probabiliste	P. GABRIEL P. CENAC	12/02/09	IREM
Travail sur la langue en français et maths	C. BERTRAND	20/02/09	IREM
Les questions ouvertes	D. GARDES	12/03/09	IREM
Histoire des nombres et de la géométrie	P. GUYOT F. METIN	18/03/09	IREM
Histoire des nombres et de la géométrie	P. GUYOT F. METIN	19/03/09	IUFM CHALON

Jeux et Problèmes

Michel Lafond
mlafond001@yahoo.fr

JEU - 60.

x, y, z sont trois réels distincts tels que : $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}=S$

Démontrer que $S = -abc$.

PROBLÈME - 60.

Démontrer que dans R^3, si M et M' sont deux points à coordonnées rationnelles alors la distance de M à M' est différente de $\sqrt{7}$.

Solutions :

JEU - 59

x, y, z sont des entiers tels que $2x + 9y + 4z$ est multiple de 19.
Prouver que $3x + 4y + 6z$ est aussi multiple de 19.

Une solution expéditive :

On a $5 \times [2x + 9y + 4z] + 3 \times [3x + 4y + 6z] = \mathbf{19} \times [x + 3y + 2z]$ (1)
Le membre de droite est multiple de 19.
$2x + 9y + 4z$ est multiple de 19 par hypothèse.
Donc $5 \times [2x + 9y + 4z]$ est multiple de 19.
Par soustraction dans (1), $3 \times [3x + 4y + 6z]$ est aussi multiple de 19.
Et comme 3 est premier avec 19, $[3x + 4y + 6z]$ est aussi multiple de 19.
CQFD.

<u>Remarque</u> :
Bien sûr, les paramètres de (1) ont été trouvés en résolvant l'identité :
$a \times [2x + 9y + 4z] + b \times [3x + 4y + 6z] = \mathbf{19} \times [ux + vy + wz]$
qui équivaut au système $\{2a + 3b = 19u \; ; 9a + 4b = 19v \; ; 4a + 6b = 19w\}$.

Pour cela on commence par résoudre le système

$$\{2a + 3b = 19u \ ; \ 9a + 4b = 19v\}$$

On trouve : $a = -4u + 3v$ et $b = 9u - 2v$.
D'où $4a + 6b = 38u$ qui doit être égal à $19w$. Soit $w = 2u$.
On choisit arbitrairement $u = 1$ et $v = 3$. Cela donne $a = 5$ et $b = 3$.

PROBLÈME - 59

Démontrer très simplement que :

$$\cos^2(1°)+\cos^2(2°)+\cos^2(3°)+\cos^2(4°)+\ldots\ldots+\cos^2(89°)+\cos^2(90°)=44{,}5.$$

Ici, les angles sont mesurés exceptionnellement en degrés.

Solution :

Posons $C = \sum_{i=1}^{i=90} \cos^2(i)$ et $S = \sum_{i=1}^{i=90} \sin^2(i)$

On a bien sûr $C + S = 90$ (1)

Examinons $C - S$:

$$C - S = \sum_{i=1}^{i=90} \cos^2(i) - \sin^2(i) = \sum_{i=1}^{i=90} \cos(2i) = \sum_{i=0}^{i=90} \cos(2i) - 1$$

On coupe le sigma en deux :

$$C - S = \sum_{i=0}^{i=44} \cos(2i) + \sum_{i=46}^{i=90} \cos(2i) - 1 \qquad (2)$$

(L'indice $i = 45$ est absent pour une raison évidente.)

Si on pose $i = 90 - j$ dans le deuxième sigma, celui-ci s'écrit : égalité (2)

$$\sum_{i=46}^{i=90} \cos(2i) = \sum_{j=44}^{j=0} \cos(2(90-j)) = \sum_{j=44}^{j=0} \cos(180-2j) \equiv \sum_{j=0}^{j=44} \cos(180-2j) = -\sum_{j=0}^{j=44} \cos(2j)$$

se simplifie donc en : $C - S = -1$ (3)

Enfin, (1) et (3) entraînent par addition : $\mathbf{C = 44{,}5}$. CQFD.

Voici les solutions proposées par un lecteur, Daniel DUBUISSON

Jeu - 59

Je cherche des entiers relatifs a, α, β et γ tels que , pour une infinité d'entiers x, y et z :

$$3x + 4y + 6z = a\,(2x + 9y + 4z) + 19\,(\alpha x + \beta y + \gamma z)$$

On en déduit le système : $\begin{cases} 2a + 19\alpha = 3 \ (1) \\ 9a + 19\beta = 4 \ (2) \\ 4a + 19\gamma = 6 \ (3) \end{cases}$

La comparaison de (1) et de (3) donne immédiatement $\gamma = 2\alpha$.
La comparaison de (1) et de (2) donne une équation classique en nombres entiers :

$$9\alpha - 2\beta = 1$$

qui donne $\alpha = 2k + 1$ et $\beta = 9k + 4$ avec k entier relatif.
On en déduit ensuite $\gamma = 4k + 2$ et $a = -19k - 8$.

On a donc trouvé l'identité :
$3\,x + 4\,y + 6\,z =$
$(-19k - 8)(2x + 9y + 4z) + 19\,[(2k + 1)\,x + (9k + 4)\,y + (4k + 2)\,z]$
qui prouve la propriété demandée.

Plus légèrement, en choisissant par exemple k = 0 :

$$3x + 4y + 6z = -8\,(2x + 9y + 4z) + 19\,(x + 4y + 2z).$$

Problème - 59

$$\sum_{i=1}^{90} \cos^2(i°) = \sum_{i=0}^{90} \cos^2(i°) - 1$$

$$\sum_{i=0}^{90} \cos^2(i°) + \sum_{i=0}^{90} \sin^2(i°) = 91 = 2\sum_{i=0}^{90} \cos^2(i°)$$ car $\sin(90° - i°) = \cos(i°)$ pour tout i

et finalement $\displaystyle\sum_{i=1}^{90} \cos^2(i°) = \frac{91}{2} - 1 = 44{,}5$.

De la mise en œuvre d'un problème d'élève de CP à un problème de devoir blanc de PE1[1] : les tours à trois étages

Nicole BONNET, professeur de mathématiques et formateur à l'IUFM de Dijon, IREM de Dijon, Ex membre de la COPIRELEM[2]

Adresse mel : nicole.bonnet @dijon.iufm.fr

Résumé et conclusion de l'article paru dans la feuille de vigne n°109

Les questions fédératrices à cette étude sont :

Comment transposer une activité de CP décrite dans ERMEL à un projet de formation pour des stagiaires PE2 dans le cadre d'un atelier de pratique professionnelle ?

Quels problèmes de mise en œuvre vont découler de la situation ?

Comment transformer les questions essentielles en un outil de formation pour des étudiants PE1 au travers d'un sujet de concours.

Les objectifs pédagogiques étaient les suivants :

- *Identifier et mettre en œuvre quelques concepts fondateurs du champ de la didactique des mathématiques dans la conception des séances d'apprentissages.*
- *Situer les grands types de démarches et outils pédagogiques existants dans les pratiques.*
- *Se référer aux écrits de recherche pour analyser une situation professionnelle.*

À l'issue de ces séances, les compétences que n
ous avons tenté de faire acquérir étaient les suivantes :

- *Être capable de préciser et d'améliorer son expérience et son projet personnel par rapport à la formation initiale en ayant un repérage plus précis des approches et activités didactiques du champ des mathématiques.*
- *Être capable de repérer par une analyse a priori les difficultés potentielles des élèves et y trouver des remédiations sans « tuer » le problème.*

[1] PE1 : cette abréviation désigne les étudiants professeurs des écoles première année.
[2] COPIRELEM : commission inter IREM pour l'école élémentaire

- *Être capable de maîtriser le contenu disciplinaire et d'innover (problème algorithmique, classements vers une méthodologie, invention des règles d'un jeu…)*

Globalement, nous estimons que ces objectifs ont été atteints. Les indicateurs de cette évaluation sont les suivants :

- Grand investissement des stagiaires dans la préparation (les fiches qui ont donné lieu aux séances sont plus pertinentes que celle proposée dans le devoir blanc), supports de qualité et pensés dans une efficacité, réflexion collective pour répondre aux questions multiples.
- Cet atelier pédagogique a, en outre, été la source d'écrits qui servaient de base à l'évaluation des modules d'enseignement des PE2. Quelques-uns l'ont exploité dans leurs mémoires professionnels, soit à titre d'exemple, soit pour confirmer leurs dires dans le cadre d'une polyvalence.

Le chapitre 6, du présent numéro de la feuille de vigne, ne concerne qu'une proposition de corrigé du devoir blanc proposé aux étudiants PE1. Il apporte des éléments de réponse à quelques questions parmi les nombreuses qui se sont posées.

6. Proposition de corrigé[3] de l'exercice du devoir blanc

Exercice 1 (4 points)

On veut peindre les étages de tours comportant trois étages.
On dispose de trois couleurs : bleu, vert, et jaune.
Chaque étage doit être peint uniformément.

<u>1. Si on n'impose aucune contrainte, combien de tours différentes pourra-t-on avoir</u> ?

La case supérieure peut être de 3 couleurs ; pour chacune de ces couleurs, la case centrale peut être de 3 couleurs, ce qui fait déjà 3 x 3 possibilités, et enfin pour chacune de ces possibilités, la case inférieure peut être de 3 couleurs, ce qui donne donc $3 \times 3 \times 3 = 27$ **possibilités**.
On peut évidemment représenter cela par un arbre, mais le raisonnement précédent est amplement suffisant…

On pouvait aussi retrouver ce résultat suivant un raisonnement sans doute plus proche de ce que l'on peut trouver en cycle II :

- Il y a trois tours d'une seule couleur.

[3] Corrigé écrit en collaboration avec M. Renaut, après la correction des copies de nos étudiants PE1.

- Il y a 6 tours peintes avec trois couleurs différentes : on a le choix de trois couleurs pour le premier étage, puis le choix de deux couleurs pour le deuxième étage (car on ne peut prendre deux fois la même couleur), puis un seul choix pour le troisième étage. Cela fait 3 x 2 x 1. Soit 6 tours différentes.
- Il y a ensuite 12 tours ayant deux couleurs identiques sur deux étages adjacents. En effet 6 tours ont les deux étages du bas de la même couleur et 6 autres tours ont les deux étages du haut de la même couleur.
- Puis il reste 6 tours ayant le premier et le troisième étage d'une même couleur, l'étage du centre d'une couleur différente.

Au total, on a donc **27 tours différentes sans imposition de contrainte.**

On dispose maintenant de quatre couleurs : bleu, jaune, vert et rouge.

<u>2. Si on ne veut pas de tour peinte d'une seule couleur, combien de tours différentes pourra-t-on avoir</u> ? (On ne souhaite pas que les étages soient peints tous les trois en bleu, mais il est possible que deux étages soient de la même couleur)

Raisonnons comme s'il n'y avait pas de contrainte

Chacun des étages peut être d'une couleur, quelle que soit la couleur des deux autres.

Pour chaque couleur du premier étage, il y a quatre couleurs possibles pour le deuxième, ce qui fait donc pour les deux premiers étages 4 x 4 solutions distinctes.

Pour chacune de ces 4 x 4 solutions distinctes, il y a encore 4 peintures possibles pour le troisième étage. D'où (4 x 4) x 4 possibilités de peinture.

Or, il y a quatre tours peintes d'une même couleur qu'il faut ne pas compter.

Cela donne (4 x 4 x 4) – 4 = 60.

On a donc **60 tours différentes qui ne sont pas peintes d'une seule couleur**.

<u>3. On impose à l'étage central d'être rouge. Combien de tours différentes aura-t-on</u> ? Dans ce cas, les deux autres étages peuvent être peints chacun de quatre couleurs, ce qui donne 4 x 4 =16.

On a donc **16 tours différentes peintes telles que l'étage central soit rouge**.

<u>4. On n'impose plus à l'étage central d'être rouge, mais on impose à deux étages adjacents de ne pas être peints de la même couleur. Combien de tours différentes pourra t-on avoir</u> ?

L'étage central a deux étages adjacents. Il est donc utile de raisonner à partir de cet étage central. Supposons qu'il soit déjà peint. Pour chacune des quatre couleurs de l'étage central, il reste la possibilité de choisir trois couleurs pour l'étage du haut et trois couleurs pour l'étage du bas.

Donc pour chacune des 4 couleurs possibles pour l'étage central, on a 3 x 3 possibilités de choisir les couleurs des deux autres.
Donc au total, cela donne 4 x 3 x 3 = 36. On a donc **36 façons de peindre les tours sans que deux étages adjacents soient de la même couleur.**

> ***Remarque*** *à propos de la phrase* ***:*** *« Il est donc utile de raisonner à partir de cet étage central. »*
> *Le raisonnement est le même si on part de l'étage du haut ou de l'étage du bas. Il n'est donc pas « utile » de privilégier l'étage central. Parton, par exemple, de l'étage du haut (4 possibilités de couleurs), il reste trois possibilités de couleurs pour l'étage central et encore trois possibilités de couleur pour l'étage du bas. La conclusion est la même, heureusement ! la seule différence est qu'en fixant la couleur de l'étage central, on raisonne sur les même couleurs pour les étages des extrémités, ce qui n'est pas le cas en fixant la couleur d'un autre étage.*

Question complémentaire (5 points)

Une maîtresse débutante de CP décide de mettre en œuvre une recherche concernant la peinture des étages d'une tour.
Elle veut faire peindre des tours de trois étages avec trois couleurs différentes, bleu, vert et rouge, sans imposer aucune contrainte.

Questions concernant la fiche de préparation.

1. Commentez la phrase de la maîtresse pendant la phase de recherche. (« pendant que les enfants cherchent … identiques »)

Cette phrase concerne les actions de la maîtresse pendant que les élèves cherchent. Elle a prévu de passer dans les rangs pour :

- donner des conseils
- pointer les tours identiques

Examinons chacun des deux points.

Quels conseils peut-elle donner ?

Tout d'abord, remarquons qu'elle ne doit pas donner de conseils méthodologiques comme « commence par colorier toutes les tours dont le premier étage est rouge » ou pire comme « fais un arbre » car dans ce cas, elle casse la recherche et dévoile l'objectif de la séance suivante.
Quelles autres interventions pourrait-elle bien avoir ?

- ♦ Demander aux élèves de s'appliquer à colorier : il ne semble pas que ce soit là un objectif mathématique. Au contraire ne pas faire attention aux débordements et colorier vite pour faire le plus de tours possible. A ce moment, elle aurait du prévoir des gommettes au lieu du coloriage car les enfants de cet âge peuvent prendre du plaisir à colorier et oublier le but mathématique de la recherche.

- ♦ Leur conseiller de ne s'occuper que de leur feuille et de ne pas bavarder : ne perdrait-elle pas ainsi une richesse provoquée par les idées des autres élèves ? En effet, il y a 27 solutions et le copiage est mal aisé.
- ♦ Répéter la consigne pour ceux qui ne l'auraient pas bien comprise, sans induire aucune méthode : ce type d'intervention est évidemment bien préférable aux précédentes.

Pointer les tours identiques. Quel est l'intérêt pour l'élève si c'est la maîtresse qui pointe deux tours identiques sinon de lui montrer une chose qu'il n'a pas vue. Il vaut bien mieux qu'elle questionne l'élève et lui demande : « Je crois bien avoir vu deux tours identiques sur ta feuille. Cherche lesquelles. » L'élève sera ainsi dans l'obligation de se concentrer et de comparer une à une les tours qu'il a coloriées. Si cette question est trop difficile, la maîtresse pourra pointer une des deux tours identiques et demander à l'élève de trouver la même.
Nous voyons bien sur la production d'Alexandre, qu'il est très difficile pour une enseignante seule dans sa classe de « pointer » toutes les erreurs des élèves. En effet, cet élève a su identifier la tour V, B, B (troisième tour) et mettre une croix en dessous de celle-ci, mais il ne s'est pas rendu compte qu'il en avait une identique (quinzième tour). Les tours 11 et 14 sont aussi identiques.

<u>2. La maîtresse fait travailler les élèves individuellement. Chacun dispose de 30 carrés de 5 cm de côté de chaque couleur (voir le chapitre matériel sur la fiche de préparation). Comment pensez-vous qu'elle ait prévu l'organisation de la phase collective</u> **?**

Remarques :

Il est indiqué dans la préparation que la maîtresse a prévu 30 carrés de chaque couleur. Il y a donc suffisamment pour former les 27 tours car il suffit de 27 carrés de chaque couleur.

D'autre part, une production d'élève est fournie en annexe et elle donne une indication quant à la mise en commun qu'il convient de ne pas négliger.

Dans cette phase, la maîtresse prévoit de ne pas engager une méthodologie qui est prévue en séance 2.

Il est impossible d'afficher toutes les feuilles des élèves au tableau car ils sont trop nombreux et les tours trop petites. Un élève du fond de la classe ne verrait rien. La maîtresse a donc prévu beaucoup de carrés de couleur qui vont lui permettre de construire des tours agrandies.

Elle peut interroger à tour de rôle chaque élève et lui demander de venir construire une de ses tours. Elle accroche les tours (avec de la patafix) comme elles viennent, sans ordre préconçu. Cet élève ainsi que les autres sont alors invités à noter la tour peinte, grâce à une croix, comme en atteste la production d'élève de l'annexe 3.

Elle obtiendra ainsi de façon non organisée, un éventail de tours possibles. Il n'est pas encore question de méthodologie à ce stade.

3. Lors de la mise en commun, quelles sont les difficultés langagières auxquelles on peut s'attendre de la part des élèves lors de la description des tours **?**

> ***Remarque* :** *la question porte sur les difficultés de langage dues à la description des tours et pas à la description d'une méthode…*

- Soit la maîtresse a pris la précaution, dans la consigne de numéroter les étages : premier étage, deuxième étage, troisième étage. Les élèves ont ainsi à énoncer les couleurs dans cet ordre : bleu, rouge, vert signifie qu'on va positionner les cartons colorés de la manière suivante :

V		B
R	et non pas	R
B		V

Elle devra tout de même veiller que les élèves décrivent bien la tour qu'ils pointent sur leur feuille et pas une autre. Pour cela, il vaut mieux les inciter à dire : « bleu pour le premier étage, rouge pour le deuxième étage, vert pour le troisième étage ».

- Soit elle n'a pas pris cette précaution, et des termes comme « au-dessus », « au-dessous » vont apparaître. Il va s'agir d'en préciser le sens pour tous les élèves car certains peuvent encore confondre ces deux termes. « Plus haut » et « plus bas » ou « en haut » et « en bas » vont aussi apparaître dans la description des tours. Il semble que ces termes soient plus facilement compris et utilisés par les élèves de CP.

Questions concernant le matériel.

4. Quelles différences y a-t-il entre

- ♦ donner à chaque élève une feuille sur laquelle sont déjà dessinées des tours et trois crayons de couleur : bleu, vert et rouge
- ♦ et donner à chaque élève une feuille sur laquelle sont déjà dessinées des tours et trois cubes : un bleu, un vert et un rouge?

> ***Remarque préalable :*** *il est implicite et bien évident que si la maîtresse a prévu de donner des cubes et la feuille de papier où sont dessinées les tours, que les élèves auront en outre au moins un stylo (ou crayon de papier), au mieux trois crayons de couleur. Car sinon, comment peuvent-ils utiliser cette feuille ?*

- Si on donne une feuille et des crayons de couleur, les élèves peuvent trouver toutes les 27 solutions, mais cela sera long. Comme nous l'avons dit précédemment, il vaudrait mieux leur donner des gommettes à coller pour éviter le temps de coloriage. Cette recherche peut paraître abstraite à certains élèves.

- Mais si on ne leur donne que trois cubes, ils ne pourront trouver que 6 tours différentes et non pas les 27 attendues. Pour qu'ils les trouvent toutes, il faudrait donner à chacun trois cubes de chaque couleur, en encourant le risque qu'ils produisent des tours de 9 étages, mais cela serait vite corrigé par le fait qu'ils doivent ensuite les colorier.

En fait, la manipulation peut aider certains élèves qui se représentent mal la situation et il est bon que les élèves aient à la fois des cubes en nombre suffisant (trois de chaque couleur), des crayons de couleur et la fiche de recherche.

<u>5. Pourquoi la maîtresse a-t-elle prévu 36 tours sur la feuille de recherche qu'elle va distribuer aux élèves ?</u>

Donner plus de tours que de tours possibles permet :

- l'erreur aux élèves : ils peuvent se tromper et barrer la tour qui est en double ;
- une plus grande ouverture de la situation : on ne donne pas au départ le nombre de possibilités et on laisse libre cours à la recherche.

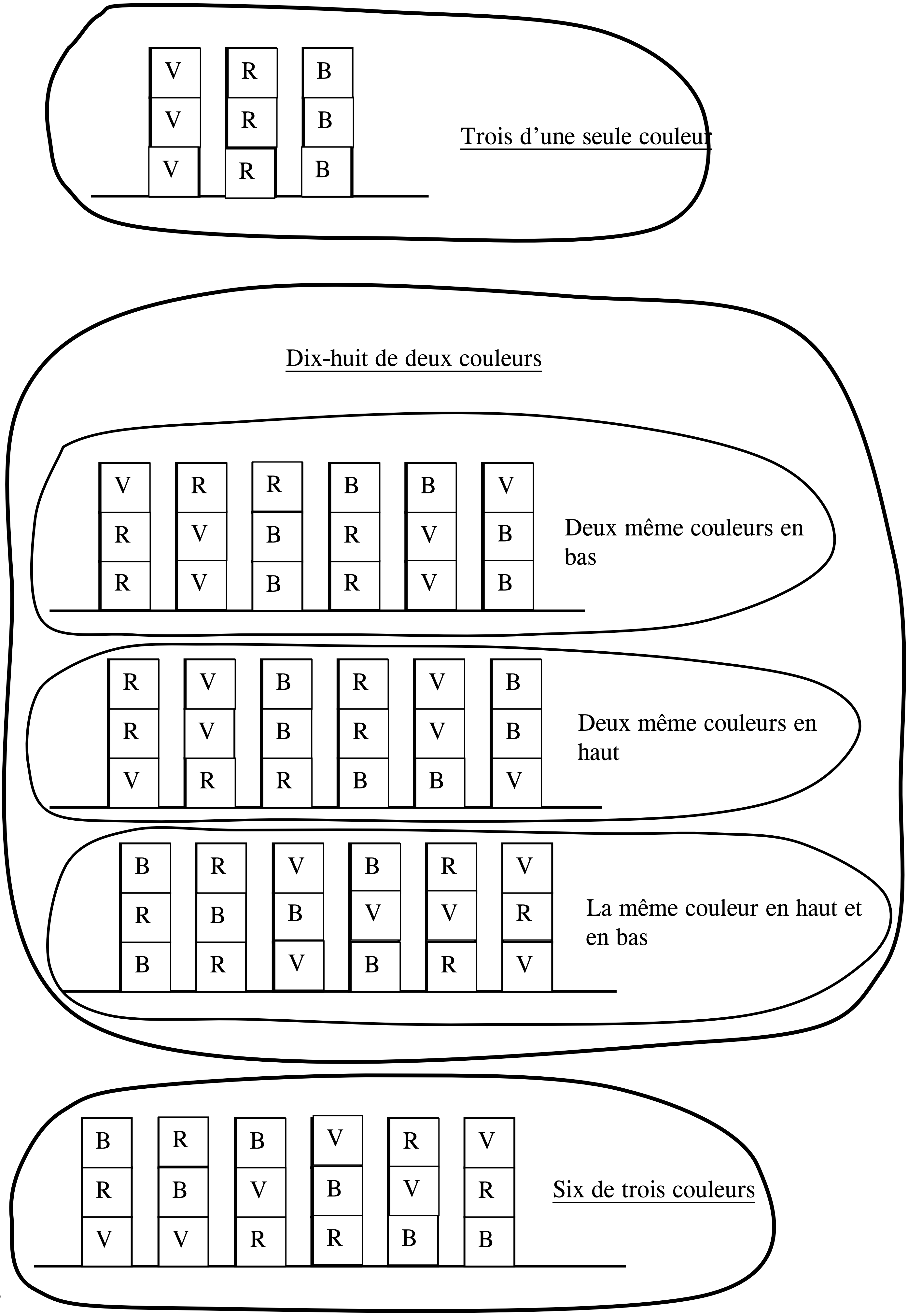
Question concernant la méthodologie de recherche.

<u>6. La maîtresse n'a pas prévu sur sa fiche de préparation comment s'organiser car cela concerne la séance suivante. Avec le matériel dont elle dispose : carrés de trois couleurs de 5 cm de côté, comment envisageriez-vous cette méthodologie ?</u>

Après avoir construit toutes les productions des élèves (ou une grande partie), il serait souhaitable que les élèves se rendent compte qu'il serait bon **de classer les tours** pour pouvoir compléter celles déjà trouvées.

Il est probable que les enfants proposeront de :

- ♦ Mettre ensemble les tours d'une seule couleur. Cela permet de visualiser qu'il n'y en a que trois.
- ♦ Mettre en ensemble les tours de trois couleurs. Cela permet de visualiser leur construction. Les élèves peuvent ainsi compléter cette classe si elle est incomplète. Il y a six tours.
- ♦ Les tours aux couleurs alternées peuvent alors apparaître. Et on peut de même compléter cette classe. Il y a 6 tours.
- ♦ Puis les tours ayant deux même couleurs en bas ou en haut. Le but est aussi de compléter ces deux classes avec les élèves. Il y a 12 tours de ce type. La page suivante illustre nos propos.


Trois d’une seule couleur
Dix-huit de deux couleurs
Deux même couleurs en bas
Deux même couleurs en haut
La même couleur en haut et en bas
Six de trois couleurs

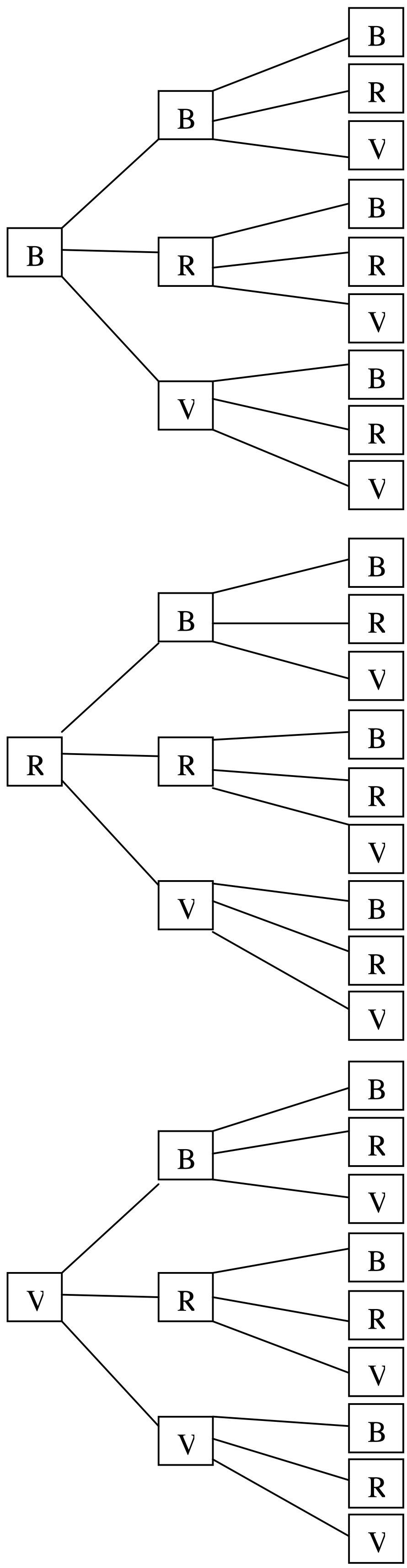
Un autre classement pourrait être proposé après que les élèves aient observé qu'il est possible de trouver des tours dont le premier étage est bleu.

B	R	V	B	B	R	V	R	V
B	B	B	R	V	V	R	R	V
B	B	B	B	B	B	B	B	B
R	B	V	R	R	B	V	B	V
R	R	R	B	V	V	B	B	V
R	R	R	R	R	R	R	R	R
V	V	V	R	B	R	B	R	B
V	R	B	V	V	B	R	R	B
V	V	V	V	V	V	V	V	V

C'est le premier pas vers un arbre !

Remarque :

Une autre idée très largement proposée par les étudiants est celle de faire produire directement aux élèves un arbre logique avec les carrés colorés (5 cm x 5 cm) dont dispose la maîtresse. Cependant, il nous semble que si cette méthode est trop précocement introduite, elle risque de ne pas produire du sens au niveau des élèves et d'en rester au niveau d'une seule technique, ce qui est absolument à éviter en cycle 2 d'autant que la structure formelle de l'arbre est très abstraite…
De plus la lecture « horizontale » (voir arbre ci dessous) ne facilite pas la compréhension imagée des tours verticales pour des élèves de CP. On pourrait proposer de faire un arbre vertical…
Nous ne pensons donc pas que ce soit très réaliste. Il vaut mieux, dans un premier temps travailler à l'aide de classements (ou de groupements) de tours identifiées comme ayant une propriété commune.



Nous pensons que cette méthode relève plutôt du cycle 3.

La notation puissance et ses mystères

Michel LAFOND
mlafond001@yahoo.fr

Résumé : étude de différents problèmes posés par la notation "puissance".

Mots clé : Catalan, puissance, exposant, parenthésage.

Nous savons tous que les élèves (et même des plus grands) maîtrisent mal les manipulations sur les puissances.
Il faut dire que les règles sont nombreuses et délicates.

Sans parler des échafaudages comme celui ci : $a^{a^{a^{a}}}$

qui sont imprécis en l'absence de définitions ou conventions préalables.

- Nous nous limiterons ici <u>pour simplifier</u> au cas où la base et tous les exposants sont égaux à un même réel positif a.

Pour lever toute ambiguïté, nous utiliserons désormais :

Pour a^a la notation $a \uparrow a$

Pour $a^{(a^a)}$ la notation $a \uparrow (a \uparrow a)$

Pour $(a^a)^a$ la notation $(a \uparrow a) \uparrow a$ etc.

Ainsi : $(3 \uparrow 3) \uparrow (3 \uparrow 3)$ s'écrit traditionnellement $(3^3)^{3^3}$

On va voir apparaître des choses bizarres, dues au simple fait que la notation puissance n'est pas associative.

Ainsi : le fait que $(a^a)^a = a^{(a^2)}$ entraîne $(a \uparrow a) \uparrow a = a \uparrow (a \uparrow 2)$

On conservera occasionnellement la convention "priorité à droite" c'est-à-dire que dans un "échafaudage" d'exposants de lecture ambiguë, on commence toujours par lire les exponentiations les plus à droite :

$a^{(b^c)} = a^{b^c}$ ne doit pas être confondu avec $(a^b)^c$

dans le premier cas la première exponentiation effectuée est b^c

dans le second cas la première exponentiation effectuée est a^b

- Si on se permet un échafaudage de puissances utilisant $\boldsymbol{n}$ **fois la flèche** $\uparrow$

(donc contenant $\boldsymbol{n+1}$ variables toutes égales à a) nous noterons dans ce cas :

$p = p(n)$ le nombre de parenthésages possibles,

$v = v(n)$ le nombre maximal de valeurs distinctes obtenues en général, compte tenu du fait que des parenthésages différents peuvent donner la même chose, et

$v = v_a(n)$ le nombre de valeurs réellement distinctes obtenues pour la valeur particulière a.

Les exemples suivants vont clarifier tout cela.

Le cas $\boldsymbol{n = 2}$.

On a $p(2) = 2$ et $v(2) = 2$.

En effet :

Les 2 parenthésages possibles avec $n + 1 = 3$ fois la lettre a sont :

$$a \uparrow (a \uparrow a) = a^{(a^a)} \quad \text{et} \quad (a \uparrow a) \uparrow a = (a^a)^a = a^{(a^2)} \quad \text{d'où } p(2) = 2.$$

Les 2 résultats sont différents **en général** :

$[3 \uparrow (3 \uparrow 3) = 3^{27}$ mais $(3 \uparrow 3) \uparrow 3 = 3^9]$ d'où $v(2) = 2$.

Mais dans le cas particulier $a = 2$ on n'a qu'une valeur pour les deux parenthésages : $2 \uparrow (2 \uparrow 2) = 2^4 = (2 \uparrow 2) \uparrow 2 = 4^2 = 16$

ce qui avec notre notation donne $v_2(2) = 1$.

Le cas $\boldsymbol{n = 3}$.

C'est déjà plus compliqué :

On a $p(3) = 5$ et $v(3) = 4$.

En effet les 5 parenthésages possibles avec $n + 1 = 4$ fois la lettre a sont :

$a \uparrow (a \uparrow (a \uparrow a))$	$=$	$a \uparrow \left(a \uparrow a^a\right) = a \uparrow a^{a^a} = a^{a^{a^a}}$	P1
$a \uparrow ((a \uparrow a) \uparrow a)$	$=$	$a \uparrow \left(a^a \uparrow a\right) = a \uparrow \left(a^a\right)^a = a \uparrow a^{a^2} = a^{a^{a^2}}$	P2
$(a \uparrow a) \uparrow (a \uparrow a)$	$=$	$\left(a^a\right)^{a^a} = a^{a \times a^a} = a^{a^{a+1}}$	P3
$(a \uparrow (a \uparrow a)) \uparrow a$	$=$	$\left(a \uparrow a^a\right)^a = \left(a^{a^a}\right)^a = a^{a^a \times a} = a^{a^{a+1}}$	P4
$((a \uparrow a) \uparrow a) \uparrow a$	$=$	$\left(\left(a^a\right)^a\right)^a = \left(a^a\right)^{a^2} = a^{a^3}$	P5

Remarquons que les troisième et quatrième parenthésages ci-dessus qui sont pourtant différents représentent en fait la même expression mathématique :

$$(a \uparrow a) \uparrow (a \uparrow a) = (a \uparrow (a \uparrow a)) \uparrow a = a^{a^{a+1}}$$

d'où $v(3) = 4$ et non 5.

Remarquons aussi que $v_2(3) = 2$ puisque dans le cas particulier de la base 2 on ne peut obtenir que 2^8 (pour P3, P4 et P5) ou 2^{16} (pour P1 et P2).

- **Et ensuite ?**

Le calcul du nombre de parenthésages $p(n)$ est un problème classique d'analyse combinatoire.
Le résultat admis ici est :

$$p(n) = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \quad \text{(Ce sont les nombres de Catalan)}$$

Ainsi $\quad p(3) = \frac{1}{4}\binom{6}{3} = 5 \quad$ comme vu précédemment, puis :

$p(4) = \frac{1}{5}\binom{8}{4} = 14 \qquad p(5) = 42 \qquad p(6) = 132 \qquad p(7) = 429 \qquad$ etc.

Mais le calcul du nombre de résultats (en général distincts) $v\ (n)$ est un problème difficile.
Pour $\boldsymbol{n} = \mathbf{4}$, on a vu qu'il y a $p\ (4) = 14$ parenthésages, et un dénombrement soigné montre qu'il y a seulement $v\ (4) = 9$ résultats différents en général.

Ces 9 résultats sont toutes les expressions de la forme $a^{a^{\lambda}}$ avec :

$$\lambda \in \left\{a^{a^{a}} ; a^{a^{2}} ; a^{a+1} ; a^{3} ; a^{a}+1 ; a^{2}+1 ;\ 2\mathrm{a}\ ;\ \mathrm{a}+2\ ;\ 4\right\}$$

La réduction de 14 parenthésages à 9 résultats différents seulement, vient du fait déjà rencontré plus haut, que des écritures distinctes du point de bue parenthésage donnent en fait les mêmes résultats après développement.
On trouve même parmi les 14 parenthésages, trois d'entre eux qui sont équivalents pour tout a :

$[(a \uparrow a) \uparrow a] \uparrow (a \uparrow a) =$

$[(a \uparrow a) \uparrow (a \uparrow a)\ ] \uparrow a =$

$[(a\uparrow (a \uparrow a)) \uparrow a] \uparrow a = a^{a^{a+2}}$

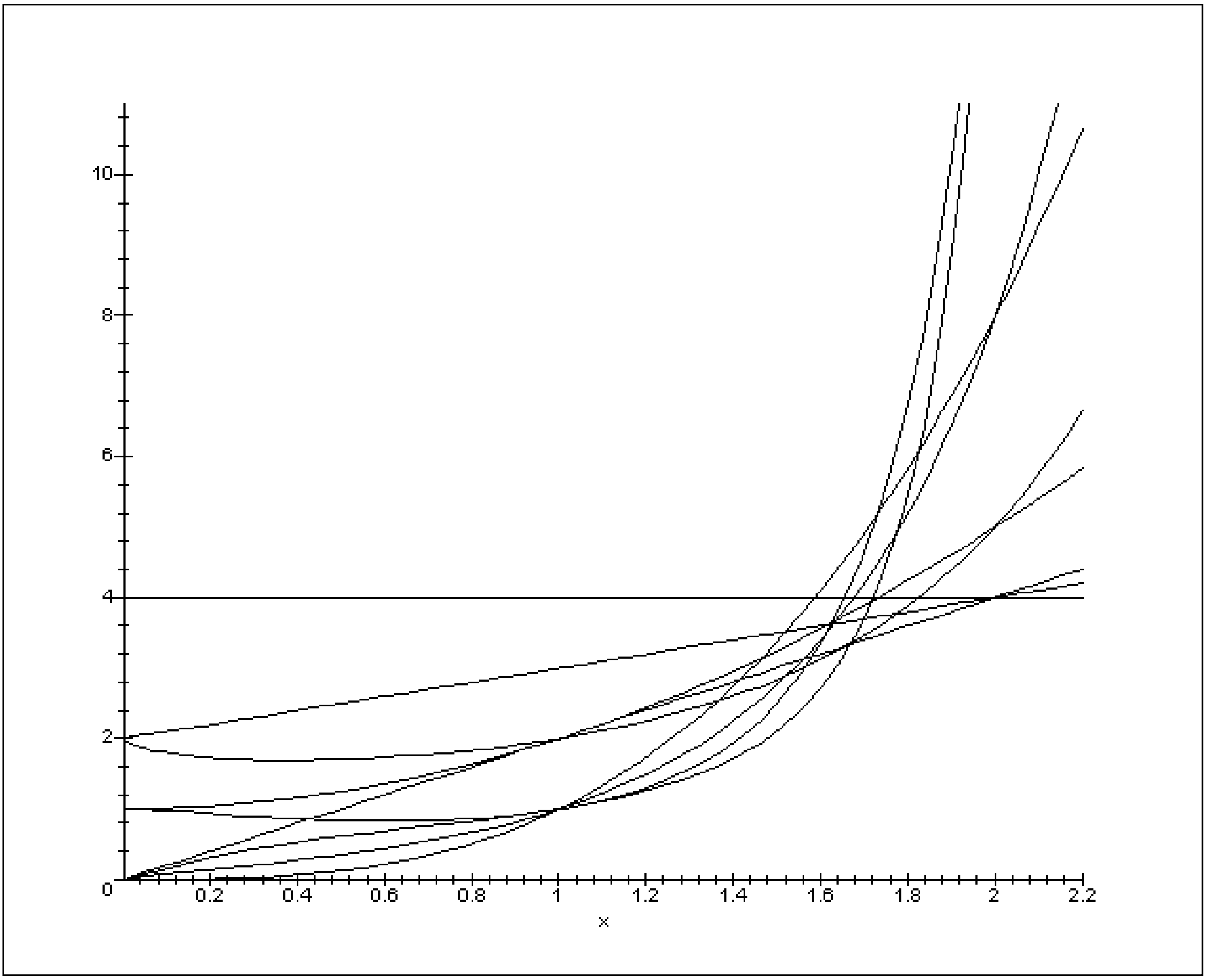
C'est un bon exercice de vérifier ceci.
Insistons sur le fait déjà mentionné que si les $v\ (4) = 9$ résultats sont en général distincts, pour certaines valeurs particulières de a, on peut en avoir moins ; ainsi :
Si φ désigne le nombre d'or $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ on a "exceptionnellement" l'égalité :
$\varphi \uparrow [\varphi \uparrow ((\varphi \uparrow \varphi\ ) \uparrow \varphi\ )] = \varphi \uparrow [(\varphi \uparrow (\varphi \uparrow \varphi\ )) \uparrow \varphi\ ] \approx 13{,}79210456$ pour une raison que le lecteur trouvera en "développant".
Mais si on prend $z = 1.618$ qui n'est pas tout à fait égal à φ alors :

$z \uparrow [z \uparrow ((z \uparrow z)\uparrow z\ )] \approx 13.781226380518911733$
$z \uparrow [(z \uparrow (z \uparrow z\ )) \uparrow z] \approx 13.783468877678062958$ sont différents.

- Voici les 9 courbes

$$x \rightarrow \{\left\{x^{x^{x}} ; x^{x^{2}} ; x^{x+1} ; x^{3} ; x^{x}+1 ; x^{2}+1 ; 2x\ ;\ x+2 ; 4\right\}$$

qui font bien apparaître le nombre [entre 4 et 9] de valeurs réellement distinctes de l'expression $a \uparrow a \uparrow a \uparrow a \uparrow a$ selon l'emplacement des parenthèses.
Ainsi, on voit qu'il se passe des choses vers $x = 1{,}618$...



- Enfin, voici ce que j'ai comme résultats où *n* est toujours le nombre d’exponentiations :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p (*n*)	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796	58786
v (*n*)	**1**	**2**	**4**	**9**	**20**	**48**	**115**	**286**	**719**	**1842**	**4766**
v_2 (*n*)	1	1	2	4	8	17	36	78	171	379	888
v_3 (*n*)	1	2	4	9	20	47	111	270	664	1659	?
v_4 (*n*)	1	2	4	9	20	48	114	282	703	1787	?

Les faibles valeurs de v_2 (*n*) comparées au maximum théorique *v* (*n*) viennent de $2^4 = 4^2$

En effet, on a vu plus haut que $2 \uparrow (2 \uparrow 2) = 2^4 = (2 \uparrow 2) \uparrow 2 = 4^2 = 16$.
Cette particularité de la base 2 explique que le nombre de "valeurs" est bien plus petit que le nombre de parenthésages.

Bibliographie :

J'ai obtenu les premiers termes de la suite $p\ (n)$ et des suites $v\ (n)$; $v_2\ (n)$, $v_3\ (n)$; $v_4\ (n)$ dans le livre : The encyclopedia of integer sequences, de N.J.A SLOANE et Simon PLOUFFE.

Dans ce livre, plus de 5000 suites "classiques" (classées par ordre lexicographique) sont décrites par leurs premiers termes, avec une brève indication de leur origine.

On obtient beaucoup plus de renseignements sur le site :

http://www.research.att.com/~njas/sequences/index.html

Ce site absolument génial permet d'obtenir tout ce qu'on peut souhaiter savoir sur une suite d'entiers dont on a entré les 7 ou 8 premiers termes.

Exemple : dans la page d'accueil, une fenêtre est en haut, dans laquelle on me demande d'entrer une suite d'entiers (séparés par des virgules) puis de cliquer sur SEARCH.
Je tape 1, 1, 2, 4, 8, 15, 29, 56, 108 search.
Et au bout de 0,004 secondes (le temps est mentionné) je vois apparaître entre autres : A000078 Tetranacci numbers: a(n) = a(n-1) + a(n-2) + a(n-3) +a(n-4).

En général, une ou plusieurs pages d'explications accompagnent la (ou les) réponse(s).
Les logiciels utilisés font qu'il est pratiquement impossible d'échouer.

D'autres critères pour les triangles isométriques, vagabondages mathématiques

David MAGNIEN et Tristan DERAY

Résumé : Caractérisation de l'isométrie de deux triangles grâce à leurs droites remarquables

Mots clés : triangles isométriques, triangles semblables, droites remarquables du triangle, médianes, hauteurs

Petite introduction en forme d'hommage :

Ce n'est pas aux fidèles lecteurs de la Feuille que je l'apprendrai, les mathématiques sont affaire de jeu et de curiosité. Pourtant notre système scolaire bride souvent les bonnes volontés de nos élèves dans un carcan qui les étouffe, dans l'intention – fort louable – de ne pas les laisser se perdre en vagabondages.

C'est ainsi que Nicolas m'a complètement pris au dépourvu au milieu d'un cours sur les triangles isométriques. Nicolas révise peu ses contrôles, fait ses exercices une fois sur dix, somnole en classe, âme vagabonde... mais lors de ses rares interventions il sait faire preuve d'une intuition sidérante pour un élève qui a son profil, en particulièrement en géométrie, où les élèves ont du mal à avoir une vision d'ensemble du problème.

On avait déjà revu les configurations du plan et les transformations du plan en début d'année. On pouvait donc passer aux triangles isométriques, avec la définition suivante :

<u>Définition :</u> Deux triangles sont dits isométriques si l'un est image de l'autre par une isométrie ou une composée d'isométries.

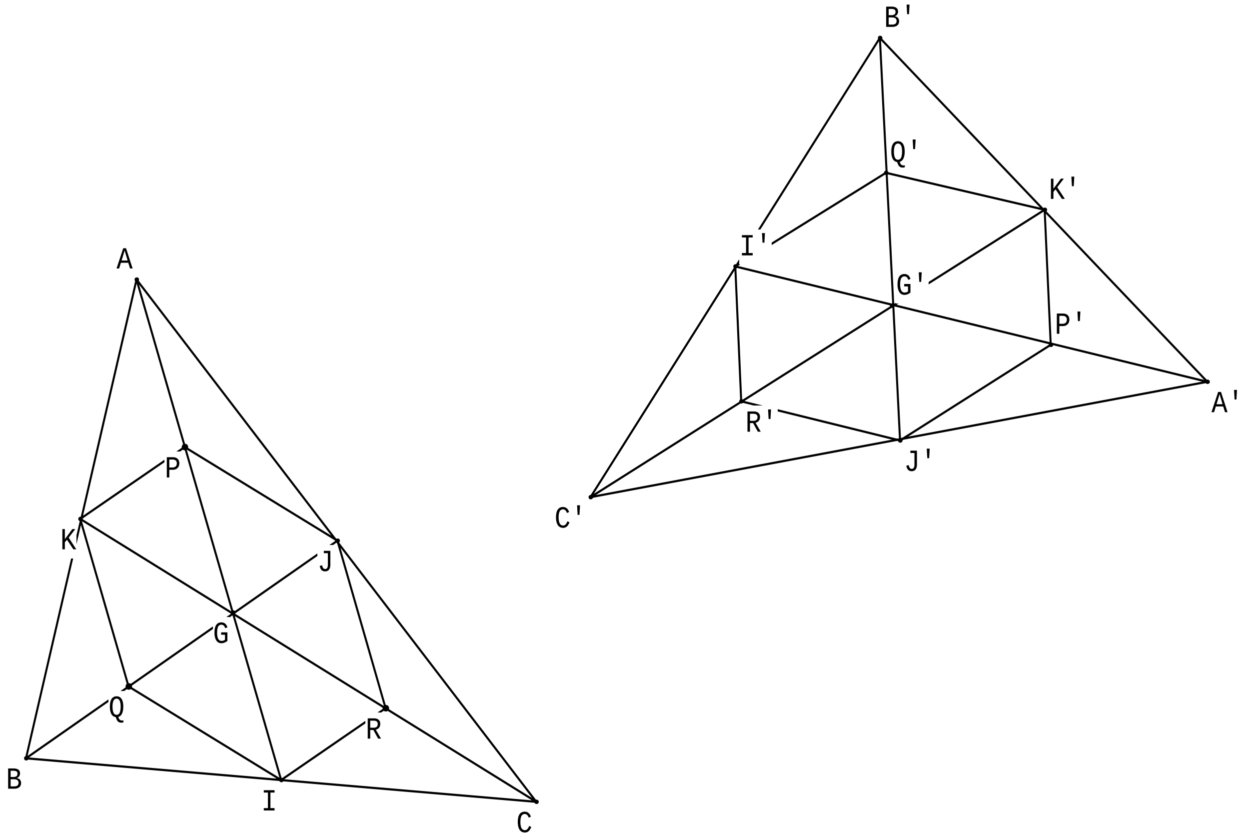
Il est vrai qu'on trouve aussi la définition « Deux triangles sont isométriques si leurs côtés sont de même longueur deux à deux », qui colle d'ailleurs mieux à l'étymologie du mot « isométrique ». Mais je préfère présenter cette dernière assertion comme un théorème, et donc un critère d'isométrie, car cela me permet de le leur faire prouver en DM entre les transformations et les triangles. Donc après avoir rendu et corrigé ce DM, j'énonce et j'explique le théorème suivant :

Premier critère d'isométrie : Deux triangles sont isométriques si et seulement si leurs côtés sont de même longueur deux à deux.

C'est alors que mon Nicolas sort de sa torpeur habituelle et me demande : « Mais alors, peut-on dire que deux triangles sont isométriques si et seulement si leurs *hauteurs* sont égales deux à deux ? Et que dire des *médianes* et des *médiatrices* ? » Un peu pris de court, je botte en touche et promet une réponse pour le prochain cours. Mais après une ou deux heures de réflexion, je ne trouve aucune solution satisfaisante. Même une approche analytique dans un repère orthonormé ne me donne que des calculs très lourds qui n'en finissent pas. Je pose donc la question à mes collègues, et c'est Tristan qui m'apporte une solution, très élégante, pour les médianes. Encouragé, je me lance et trouve quelque chose pour résoudre le problème des hauteurs.

Il est fort probable que ces problèmes aient été traités quelque part dans la littérature, mais ces articles ont su rester bien cachés lorsque nous avons fouillé la bibliothèque de l'IREM, en particulier La Géométrie du triangle d'Yvonne Sortais, qui est pourtant une mine de résultats très intéressants. Je fais appel aux bonnes volontés pour nous signaler toute référence sur le sujet.

1. Deux triangles sont isométriques si et seulement si leurs médianes sont de même longueur deux à deux.



Le sens direct de la proposition est trivial.
La réciproque l'est moins. Soient deux triangles ABC et A'B'C' et les milieux respectifs de leurs côtés. Supposons que AI = A'I', BJ = B'J' et CK = C'K'.
Puisque le centre de gravité est au tiers de chaque médiane en partant de son pied, on peut construire sur chaque médiane de ABC les points P, Q et R tels que AP = $\frac{1}{3}$AI, BQ = $\frac{1}{3}$BJ et CR = $\frac{1}{3}$CK, et de façon similaire les points P', Q' et R' sur les médianes de A'B'C'. Ces points sont les milieux des segments formés par les centres de gravité et les sommets des triangles.

En appliquant la réciproque du théorème des milieux dans les triangles ABG et A'B'G' (ou la réciproque de Thalès, comme vous voulez), on trouve :

$$KP = BQ = QP = \frac{1}{3}BJ\text{, et de même } K'P' = \frac{1}{3}B'J'\text{, d'où } KP = K'P'.$$

On sait par ailleurs que

$$KG = \frac{1}{3}KC = \frac{1}{3}K'C' = K'G' \text{ et que } PG = \frac{1}{3}AI = \frac{1}{3}A'I' = P'G'.$$

En utilisant le 1[er] critère d'isométrie, on en déduit que <u>KGP et K'G'P' sont isométriques</u>.

On montre de même que les 5 autres triangles « centraux » (vous voulez vraiment les dix noms ?) sont isométriques.

D'après la réciproque du premier critère, les isométries conservant les mesures d'angles, tous leurs angles sont égaux deux à deux. Or $\widehat{APK}$ et $\widehat{KPG}$ sont supplémentaires, de même que $\widehat{A'K'P'}$ et $\widehat{K'P'G'}$. Comme $\widehat{KPG} = \widehat{K'P'G'}$, alors $\widehat{APK} = \widehat{A'K'P'}$. On a toujours AP = A'P' et PK = P'K'. J'utilise alors ce que j'appelle dans mon cours le

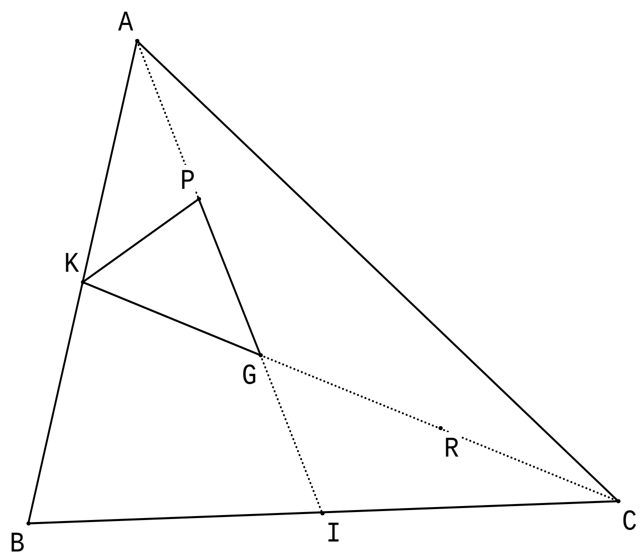
<u>Second critère d'isométrie :</u> Deux triangles sont isométriques si et seulement s'ils ont un angle de même mesure compris entre deux côtés de même longueur.

On prouve alors que <u>APK et A'P'K' sont isométriques</u>. On montre de même que tous les triangles « périphériques » sont isométriques. Des considérations d'alignement et d'égalité de longueur nous prouvent que les côtés des triangles ABC et A'B'C' ont même longueur deux à deux, et donc qu'ils sont isométriques d'après le premier critère.

<u>Vue sous un angle légèrement différent :</u> Le triangle « fondamental » d'un triangle.

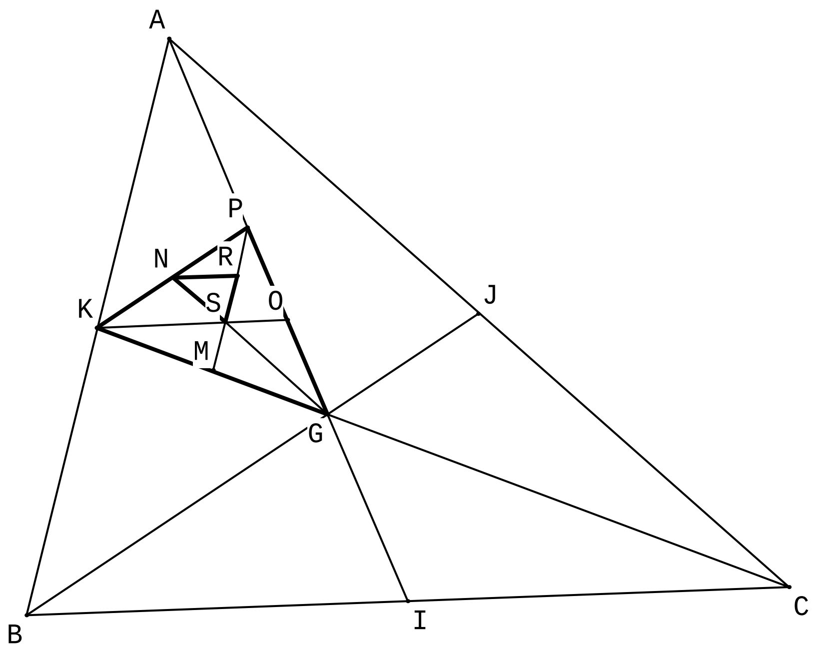
Si l'on considère deux triangles ABC et A'B'C' dont les médianes sont isométriques ; comme les triangles GPK et G'P'K' construits précédemment ont des côtés égaux au tiers des médianes des triangles ABC et A'B'C', ils sont donc isométriques. Appelons chacun de ces triangles « triangle fondamental associé » à ABC et A'B'C'.

En quoi « fondamental » se demandera-t-on ? La réponse est simple. La donnée d'un triangle fondamental permet de manière simple la « reconstruction » du triangle initial et la donnée de deux triangles « fondamentaux » isométriques équivaut à la donnée de deux triangles reconstruits » isométriques, d'où la propriété de Nicolas.



La reconstruction de ABC à partir de son triangle « fondamental » est immédiate ou presque. On construit I symétrique de P par rapport à G, A symétrique de G par rapport à P, R symétrique de K par rapport à G, C symétrique de G par rapport à R et enfin B symétrique de C par rapport à I. Qui douterait de l'isométrie des triangles ABC et A'B'C' ainsi reconstruits à partir des deux triangles PKG et P'K'G' isométriques ?
Ainsi une curieuse dualité lie un triangle à son triangle fondamental. L'étude de cette dualité mériterait bien d'être faite. Citons simplement une propriété facile à démontrer :

Théorème de Nicolas : Le triangle fondamental associé au triangle fondamental d'un triangle donné est semblable à ce dernier.

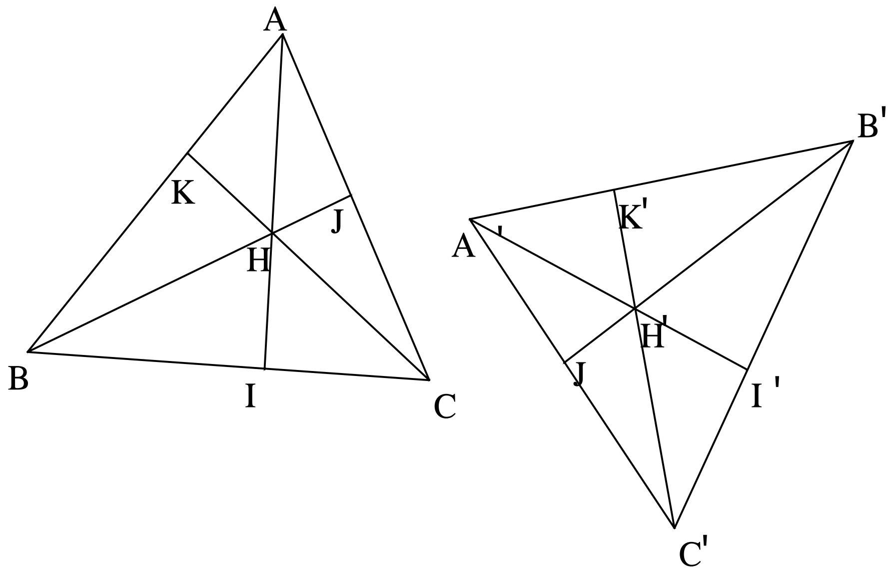


La preuve utilise largement la réciproque du théorème des milieux, ce qui peut donner lieu à un DM court mais sympathique.
Dans ABI, par le jeu des rapports, O milieu de [PG] et donc de [AI] ; donc comme K milieu de [AB], (KO) et (BI) sont parallèles et KO $= \frac{1}{2}$BI. Par la réciproque du théorème des milieux dans KPS, (NR) est parallèle à (KO) et donc à (AI), et

$$\text{NR} = \frac{1}{2}\text{KS} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\text{KO} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\text{BI} = \frac{1}{12}\text{BC}$$

Dans AKG, P et M sont les milieux respectifs de [AG] et [KG], donc (MP) et (AB) sont parallèles et $MP = \frac{1}{2}AK$. Donc $RS = \frac{1}{3}MP = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}AK = \frac{1}{12}AB$.
Dans ABC, K et I milieux de [AB] et [BC] donc (KI) et (BC) parallèles et $KI = \frac{1}{2}BC$. Dans KPI, N et G milieux de [KP] et [IP] donc (NG) et (KI) parallèles et $NG = \frac{1}{2}KI$, donc $NS = \frac{1}{3}NG = \frac{1}{12}BC$.
Donc ABC et NRS sont semblables avec un rapport de 1/12. Le parallélisme des côtés deux à deux implique même qu'ils sont homothétiques, mais nous n'avons aucune preuve concernant le centre de cette homothétie. Tout au plus avons-nous une figure Geoplan qui montre que ce n'est ni le centre de gravité de NRS (c'est peu étonnant), ni le point d'intersection des symédianes.

2. *Deux triangles sont isométriques si et seulement si leurs hauteurs ont même longueur deux à deux.*



Comme précédemment, le sens direct est trivial. Petit jeu : des angles droits sont cachés dans cette figure ; saurez-vous les retrouver ?
Supposons à présent que AI = A'I', BJ = B'J' et CK = C'K'. On peut calculer l'aire de ABC et A'B'C' de trois façons différentes avec les hauteurs, donc on peut écrire :

$$AI \times BC = BJ \times AC = CK \times AB,$$

$$\text{et également } A'I' \times B'C' = B'J' \times A'C' = C'K' \times A'B'$$

En divisant les trois égalités de gauche par celles de droite, et en simplifiant par les hauteurs égales, il vient : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$. On peut alors utiliser le

Critère de similitude : Deux triangles sont semblables si et seulement si les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles.

Une fois de plus, on peut utiliser ce critère comme définition ; dans ce cas le rapport entre similitude et égalité des angles est un théorème.

Quoiqu'il en soit, ABC et A'B'C' sont semblables, et donc leurs angles sont égaux deux à deux. L'égalité des rapports nous donne en particulier $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$, et donc $\tan \widehat{ABC} = \tan \widehat{A'B'C'}$, donc $\frac{AI}{AB} = \frac{A'I'}{A'B'}$, et donc par égalité des hauteurs AB = A'B'. On fait de même pour les deux autres côtés, et on peut alors conclure que ABC sont isométriques d'après le premier critère.

3. Médiatrices et bissectrices ?

Le problème des médiatrices nous a semblé inintéressant pour deux raisons. Premièrement parce nous ne sommes pas arrivés à le résoudre. Et deuxièmement parce que la *longueur* d'une médiatrice est un concept problématique : c'est la seule des quatre droites remarquables vues en collège qui ne passe pas par un sommet du triangle. Comment utiliser une information qui exclut les sommets alors qu'on veut se ramener à l'un des trois critères d'isométrie, qui ne parlent que des côtés ou des angles ? Une piste de recherche serait de voir la médiatrice comme l'image d'une hauteur par hotothétie de centre un sommet avec un rapport bien choisi, et d'utiliser le résultat vu en 2. Nous avons trouvé quelques pistes de réflexion pour les bissectrices, que nous gardons pour un prochain article.
La grande différence entre la médiatrice et la bissectrice d'une part, et la hauteur et la médiane d'autre part, c'est que s'il existe des propriétés métriques pour toutes, pour les premières ces propriétés ne portent pas sur leur longueur (la médiatrice comme axe de symétrie du côté, la bissectrice comme axe de symétrie de l'angle), alors que pour les secondes il existe des formules métriques qui utilisent leur longueur (l'aire pour la hauteur, le centre de gravité au tiers pour la médiane), et qu'on a d'ailleurs utilisées dans nos preuves.

4. Conclusion

D'une suggestion innocente mais pleine de sens, on a pu tirer deux démonstrations aisément accessibles à un élève de seconde. Il est même possible de les proposer en DM, après avoir vu le chapitre sur les triangles. Un grand merci à Nicolas qui a été à l'origine de cet article !

MISE EN PAGE :
Françoise BESSE

COMITÉ DE RÉDACTION ET DE LECTURE :
Patrick GABRIEL
Michel LAFOND
Alain MASCRET
Marie-Noëlle RACINE

RÉDACTEUR EN CHEF :
Patrick GABRIEL

DIRECTEUR DE LA PUBLICATION :
Patrick GABRIEL, Directeur de l'IREM

DÉPÔT LÉGAL :
n° 187 – 2ème semestre 2008

IMPRESSION :
Service Reprographie

FEUILLE DE VIGNE
Université de Bourgogne – UFR Sciences et Techniques
IREM
9 Avenue Alain Savary – BP 47870 – 21078 Dijon cedex
☎ 03 80 39 52 30 – Fax 03 80 39 52 39
@ : iremsecr@u-bourgogne.fr.
http://www.u-bourgogne.fr/irem