

Feuille de Vigne

Irem de Dijon

- ✓ *Les piles de Gergonne*
- ✓ *Dans l'espace, quadrilatère posé sur une sphère*
- ✓ *Arcs de cercles et courbes de Bézier rationnelles quadratiques*



© *Irem de Dijon – 2009*

Sommaire

✓ Agenda	1
✓ Bloc notes	5
✓ Jeux et Problèmes	7

Articles

✓ Les piles de Gergonne	9
<i>Michel LAFOND et Marie-Noëlle RACINE</i>	
✓ Dans l'espace, quadrilatère posé sur une sphère	13
<i>Emmanuel MOREAU</i>	
✓ Arcs de cercles et courbes de Bézier rationnelles quadratiques	21
<i>Lionel GARNIER</i>	

Éditorial

- Abracadabra, la carte que tu as choisie est la onzième :Vérifie!

- Mais, comment as-tu fait Papa ? Je croyais que tu étais mathématicien, pas magicien ?

A lire avant de partir en vacances de Noël, l'article de Michel Lafond et Marie-Noelle Racine permettra à tous nos lecteurs d'animer leurs fêtes de famille en impressionnant les petits par des tours de magie irratables et les grands par leurs talents en arithmétique.

Retour au travail avec l'article de Emmanuel Moreau qui nous guide en deux temps pour une activité de géométrie à faire en classe de première S. D'abord, on effectue la construction d'une sphère et d'un quadrilatère gauche dont les côtés lui sont tangents à l'aide du logiciel CABRI, puis on

démontre que les quatre points de contact de ce quadrilatère avec la sphère sont coplanaires.

L'article de Lionel Garnier fait suite au précédent. Alors qu'il avait expliqué dans la dernière Feuille de Vigne comment modéliser un arc de conique en utilisant une courbe de Bézier rationnelle, il montre ici comment modéliser un arc de cercle en utilisant une courbe de Bézier rationnelle quadratique. Ses deux articles nous fournissent un exemple d'outils développés dans cette discipline pleine d'avenir entre géométrie et informatique qui à la base de la Conception Assistée par Ordinateur.

Bonne lecture et joyeuses fêtes !

C. Labruère Chazal

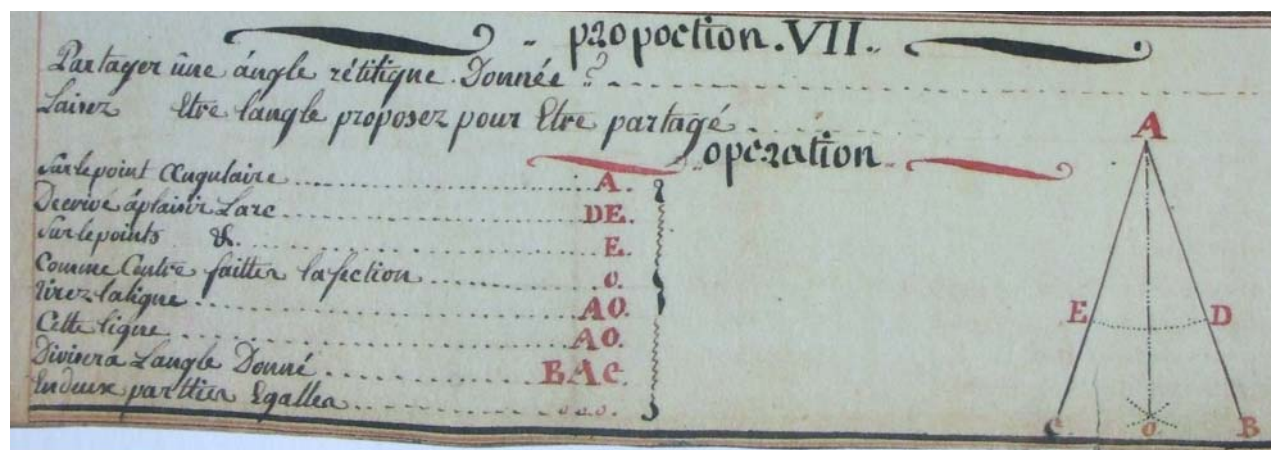
Agenda

13 ET 14 JANVIER 2010

La régionale de Bourgogne de l'APMEP vient de doter l'IREM d'une très belle reproduction d'un TRAITE DE NAVIGATION publié en 1760 et écrit par JB Denoville.

Jean-Baptiste Denoville, lors d'un séjour en Angleterre en tant que prisonnier, a écrit ce traité de navigation. Cherchant à réussir des examens pour entrer dans la marine, il accompagne la navigation par un abrégé d'arithmétique (à mettre entre toutes les mains), suivi de quelques problèmes de géométrie.

Voici sa proposition VII :



Partagez une angle rectiligne Donnée ?
 Laissez A être l'angle proposez pour Etre partagé
 Sur le point angulaire..... A
 Décrivez à plaisir l'arc..... DE
 Sur les points..... E**
 Comme centres, faites la section* O
 Tirez la ligne..... AO
 Cette ligne..... AO
 Divisera L'angle Donnée..... BAC
 En deux parties Egales.....

Gageons que des élèves qui ont besoin de retenir la construction de la bissectrice d'un angle BAC retiendront plus facilement celle-ci après avoir commenté le texte ci-

** le lecteur rectifiera de lui-même : il s'agit en fait des « points D et E »

* « faites la section » signifie que les arcs de cercles de centres d et E sont sécants (en O) »

dessus, en particulier les expressions vieillottes et délectables comme « Décrivez à plaisir ... » !

Les 13 et 14 janvier prochains, à travers des activités qu'elle a déjà proposées pour des classes, Véronique Hauguel nous montrera comment utiliser ce traité de navigation avec des élèves plus ou moins aguerris aux mathématiques, du collège à la terminale.

<p>13 et 14 janvier 2010 Lieu : Salle du Conseil, faculté Sciences Mirande</p> <p>EXPOSITION «Naviguer au XVIII^e»</p> <p>Pour mettre en valeur le manuscrit de 1760 de Jean-Baptiste Denoville l'ASSP a réalisé une exposition composée de panneaux, de vitrines avec des maquettes, des instruments et des reproductions d'instruments anciens. Pour chaque instrument, une fiche donne quelques explications sur l'histoire et l'utilisation de celui-ci.</p> <p>L'exposition Naviguer au XVIII^e se décline donc sous deux aspects :</p> <ul style="list-style-type: none">. Une série de 15 panneaux : Denoville, un pilote du XVIII^e.. Des instruments et des fiches d'accompagnement : les instruments d'un pilote au XVIII^e. <p>L'exposition a été présentée pour la première fois à la Bibliothèque Municipale de Rouen en juin 2008.</p> <p>Il est possible de se procurer cette exposition auprès de l'association.</p> <p>Des animations et des activités pour scolaires ou tout autre public sont envisageables.</p> <p>Cette exposition a été réalisée en partenariat avec la Bibliothèque Municipale de Rouen et la Maison de l'Université.</p>	<p>14 janvier 2010 Lieu : IREM, Faculté Sciences Mirande</p> <p>Journée de formation organisée en collaboration avec l'IUFM de Bourgogne : "Naviguer au XVIII^e siècle – Utilisation des mathématiques en astronomie et dans la navigation" – Véronique HAUGUEL, agrégée de mathématiques.</p> <p>Objectifs de la formation : Initiation à l'astronomie pour donner des pistes permettant aux enseignants de mener des ateliers sur la boussole, les cadrans solaires, le calendrier et les phases de la Lune. Un traité de navigation sera présenté pour montrer comment on naviguait aux étoiles jusqu'au XVIII^e siècle.</p>
---	---



25 mars 2010 : 3^e journée de formation

Journée de formation organisée en collaboration avec l'IUFM de Bourgogne : "*Modélisation d'un arc de conique par une courbe de Bézier quadratique*", Lionel GARNIER, UFR Sciences et Techniques, Université de Bourgogne.

Descriptif de l'action :

Modélisation dynamique à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique d'arcs de coniques à partir de deux extrémités et des tangentes en ces points en utilisant des courbes de Bézier. Le but est de montrer comment il est possible de tracer un arc de parabole en utilisant trois combinaisons convexes.

Objectifs de la formation :

Permettre à l'élève (et à l'enseignant aussi) d'utiliser un outil « ludique » pour modéliser des arcs de coniques à l'aide de points de contrôle pondérés. Cet outil est très utilisé en industrie car il est très « intuitif ».

Contenus :

Modélisation dynamique d'arcs de coniques à partir de deux extrémités et des tangentes en ces points en utilisant des courbes de Bézier. Le but est de montrer comment il est possible de tracer un arc de parabole en utilisant trois combinaisons convexes. On verra comment il est possible de passer du modèle polynômial au modèle rationnel en passant en géométrie projective. Un point fort du stage est la

modélisation d'arcs de cercle à l'aide de trois points de contrôle et d'un nombre ou de trois nombres. On verra aussi comment il est possible de construire un cercle avec seulement trois points de contrôle et deux nombres. Manipulation d'un logiciel de géométrie dynamique.

Démarche pédagogique :

Permettre à l'élève (et à l'enseignant aussi) d'utiliser un outil « ludique » pour modéliser des arcs de coniques à l'aide de points de contrôle pondérés. Cet outil est très utilisé en industrie car il est très « intuitif ».

Référents théoriques :

- Mathématiques pour la modélisation géométrique, la représentation 3D et la synthèse d'images. Lionel Garnier. Ellipses, 2007.
- Mathématiques des Courbes et des Surfaces. Modèles de Bézier, des B-Splines et des NURBS. G. Demengel and J. P. Pouget. Ellipses, 1998.

Documentation fournie aux personnes en formation : un polycopié.

Productions et/ou compétences attendues en fin de formation : modélisation d'arcs de coniques par la donnée de deux points et les tangentes en ces points et d'un ou de trois poids.

Bloc-notes

NOUVELLES ACQUISITIONS A LA BIBLIOTHEQUE

Les ouvrages de la bibliothèque sont à la disposition des enseignants de l'Académie

- PENROSE Roger. A la découverte des lois de l'univers
LA PASSEGGIATA DVD. Qu'est-ce que la recherche en mathématique aujourd'hui. J.P. Kahanne
DUDENEY H.E.. Divertissements mathématiques 1.
GRAS R.. Pour un enseignement probabilisé des mathématiques au lycée. Tome 1
GRAS R.. Pour un enseignement probabilisé des mathématiques au lycée. Tome 2
LIPSCHUTZ Seymour. Topologie. Cours et TP – Série Schaum
AYRES Franck. Théorie et application des équations différentielles – Série Schaum
AYRES Franck. Théorie et application du calcul différentiel et intégral Série Schaum
ROQUES J. Louis. Cours d'algèbre.
BAYEN François. Fonctions d'une variable complexe. Tome 1
BAYEN François. Espaces de Hilbert et opérateurs. Tome 2
BAYEN François. Distributions – analyse de Fourier. Transformation de Laplace. Problèmes de math appliquées. Tome 3
EULER Leonhard. Dissertation sur les fractions continues. Des fractions continues.
QUEYSANNE M. Algèbre.
VIREUX-REMOND Antoinette. La logique formelle.
BERGER Pierre. L'ordre dans le chaos.
GARNIER Lionel. Mathématiques pour la modélisation géométrique. La représentation 3D et la synthèse d'images.
Société belge des Professeurs de mathématique. Olympiades mathématiques belges. n° 2 (1982-1987), n° 3 (1988-1993), n° 5 (1999-2002), n° 6(2003-2006).
EUREKA. Logicologique. Jeux et énigmes mathématiques.
BARTOCCI Claudio et OFIFREDDI Piergiorgio. La mathématique. Les lieux et les temps.
DELAHAYE Jean-Paul. Au pays des paradoxe.
AUDIN Michèle. Souvenirs sur Sofia Kovalewskaya.
FREDON Daniel. Mathématiques ; concours écoles d'ingénieurs post-bac.
-

Jeux et Problèmes

Michel Lafond
mlafond001@yahoo.fr

JEU - 64.

Trouver une progression arithmétique infinie d'entiers naturels, de raison non nulle et qui ne contient aucune puissance n^k [avec $n \geq 2$ et $k \geq 2$].

PROBLÈME - 64.

Soit une progression arithmétique infinie : $P = (a, a + r, a + 2r, a + 3r, \dots)$
 a et r étant des entiers naturels au moins égaux à 1.

Démontrer que pour tout entier positif p on a :

- ou bien P ne contient aucune puissance $p^{\text{ième}}$ $[n^p]$
- ou bien P contient une infinité de puissances $p^{\text{ième}}$

Solutions

JEU - 63

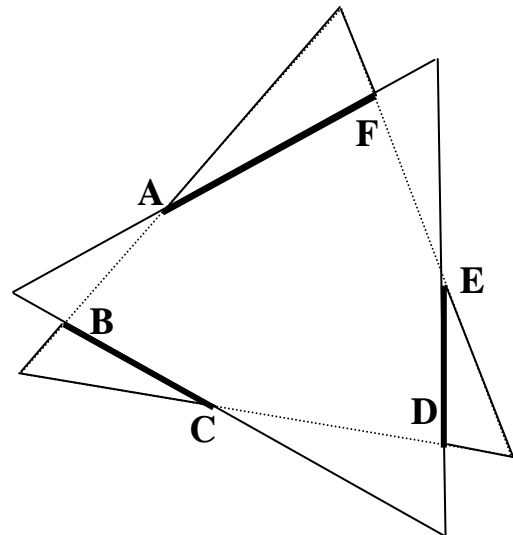
Deux triangles équilatéraux égaux se coupent selon 6 segments.

Démontrer que les longueurs

$AB + CD + EF$ (en pointillé)

et $BC + DE + FA$ (en gras)

sont égales.



Solution :

Le secret réside dans la similitude des triangles AFG, BCI, CDJ, DKE, ELF, FAG.
Il existe donc un nombre $k > 1$ tel que :

$$\begin{aligned} LE + LF &= k FE \\ k AF &= GA + GF \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} HA + AB &= k AB \\ k BC &= IB + IC \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} JC + JD &= k CD \\ k CD &= JC + JD \end{aligned}$$

Soit P le périmètre commun aux deux triangles équilatéraux.

En ajoutant membre à membre les 6 égalités ci-dessus, on obtient :

$$P - (BC + DE + FA) + k(BC + DE + FA) = P - (AB + CD + EF) + k(AB + CD + EF)$$

C'est-à-dire $(k - 1)(BC + DE + FA) = (k - 1)(AB + CD + EF)$ qui prouve bien que $BC + DE + FA = AB + CD + EF$ puisque $k - 1$ n'est pas nul.

PROBLÈME - 63

Si $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x , on vérifie que

$$2008 = 485 + \lfloor 485\pi \rfloor \text{ et que } 2009 = 1524 + \left\lfloor \frac{1524}{\pi} \right\rfloor$$

Démontrer plus généralement que tout entier naturel n s'écrit de manière unique

Soit $n = a + \lfloor a\pi \rfloor$ avec a entier, soit $n = b + \left\lfloor \frac{b}{\pi} \right\rfloor$ avec b entier.

Solution :

Si n ne s'écrit pas $a + \lfloor a\pi \rfloor$ avec a entier, alors il y a un entier a tel que

$$a + \lfloor a\pi \rfloor < n < a + 1 + \lfloor (a + 1)\pi \rfloor \quad (1)$$

Soit $b = n - a$. Prouvons que $n = b + \left\lfloor \frac{b}{\pi} \right\rfloor$.

D'après (1) $a + 1 + \lfloor a\pi \rfloor \leq n \leq a + \lfloor (a + 1)\pi \rfloor$

Retranchons a : $1 + \lfloor a\pi \rfloor \leq b \leq \lfloor (a + 1)\pi \rfloor$ (2)

Comme par définition dans \mathbb{R} : $\lfloor x \rfloor \leq x < 1 + \lfloor x \rfloor$, (2) implique

$$a\pi \leq 1 + \lfloor a\pi \rfloor \leq b \leq \lfloor (a + 1)\pi \rfloor \leq (a + 1)\pi \quad (3)$$

Mais $b = n - a$ ne s'écrit pas $\lfloor a\pi \rfloor$ par hypothèse, donc de (3) on déduit :

$$a\pi \leq b < (a + 1)\pi \text{ d'où } a \leq \frac{b}{\pi} < a + 1 \text{ ce qui prouve } \left\lfloor \frac{b}{\pi} \right\rfloor = a = n - b$$

ou encore $n = b + \left\lfloor \frac{b}{\pi} \right\rfloor$ avec b entier.

Résumons :

Si n ne s'écrit pas $a + \lfloor a\pi \rfloor$ avec a entier, alors n s'écrit $b + \left\lfloor \frac{b}{\pi} \right\rfloor$ avec b entier.

C'est bien ce qu'il fallait démontrer.

L'unicité est évidente du fait de la croissance des fonctions qui à x associent $x + \lfloor x\pi \rfloor$

ou $x + \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor$.

Les piles de Gergonne

Michel Lafond et Marie-Noëlle Racine

Résumé : *A partir d'un tour de cartes et de ses variantes, voir l'utilisation de la décomposition d'un nombre en base 3. Ceci peut faire l'objet d'exercices tant en collège qu'en lycée.*

Mots clés : *tour de cartes, magie et maths, arithmétique, base 3.*

Les tours de cartes sont parfois l'occasion de manipuler les notions d'arithmétique. C'est le cas du tour décrit et expliqué dans cet article. Vous voulez étonner vos amis ou vos élèves ? Voici un tour qui ne manquera pas de les surprendre et qui, selon les variantes choisies pourra être expliqué, dès le collège et pourquoi pas dès l'école.

Les piles de Gergonne. [Tour impromptu : se fait avec n'importe quel jeu et vous n'avez même pas, si vous le voulez, à manipuler les cartes. Il n'y a pas de préparation du jeu à l'avance].

Le mathématicien Gergonne en 1813 s'est penché sur la résolution du problème suivant : Placer la carte choisie par le spectateur au rang choisi aussi par le spectateur dans le tas de cartes.

1. Vous avez besoin de 27 cartes ; le spectateur en choisit une, mentalement, dont il retient le nom.

a) Vous faites sur la table trois tas de 9 cartes.

b) Vous montrez au spectateur chacun des trois tas (il est inutile pour vous de voir les cartes) : il vous indique dans quel tas est sa carte.

c) Vous reformez le tas complet, en mettant le tas désigné au milieu des deux autres.

d) Vous répétez deux fois les manipulations a) b) c) ci-dessus.

La carte choisie par le spectateur est la 11^e à partir du haut. Ceci permet plusieurs sorties...

Variantes possibles :

2. Peut-on forcer le rang de sortie en position 1 ?

Peut-on forcer le rang de sortie en position 27 ? [dernière position]

Peut-on forcer le rang de sortie en position n ? [n arbitraire entre 1 et 27]

3. Tour inverse.

Le spectateur range les tas comme il veut, le manipulateur est censé trouver le rang de sortie de la carte choisie.

4. D'après Thomas WALKER.

Vous avez besoin de 27 cartes ; le spectateur en choisit une, mentalement, dont il retient le nom.

Vous faites sur la table trois tas de 9 cartes.

Vous montrez au spectateur chacun des trois tas (il est inutile pour vous de voir les cartes) : il vous indique dans quel tas est sa carte.

Vous reformez le tas complet, en mettant le tas désigné au milieu des deux autres.

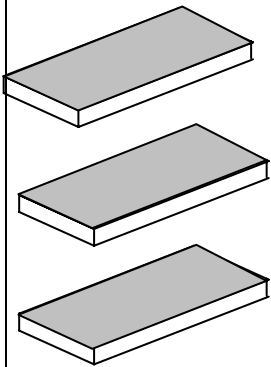
Vous refaites trois tas sur la table mais, cette fois, en mettant les cartes successivement sur les autres (tas de gauche, du milieu, de droite, de gauche, du milieu, etc.).

Comme précédemment, le spectateur vous indique le tas de sa carte ; ce tas est maintenant mis sous les deux autres.

Une dernière fois, vous refaites trois tas, comme juste auparavant. Le spectateur vous indique le tas de sa carte. Le tas est cette fois mis au milieu.

Quel est le rang de la carte choisie par le spectateur ?

Et maintenant, ... voici les explications : vous avez déjà sans doute compris, voire calculé, pourquoi la carte est la 11^e dans la première variante. Les explications qui suivent sont générales et vous permettront de comprendre et réaliser toutes les variantes.

X	X	X	<p>A chaque étape :</p> <p>les 3 piles (à gauche face visible)</p> <p>sont mises dans un certain ordre</p> <p>en tas (à droite <u>faces cachées</u>).</p>	
X	X	X		
X	X	X		
X	X	X		
X	X	X		
X	X	X		
X	X	X		
X	X	X		
X	X	X		
Pile 1	Pile 2	Pile 3		

A chaque étape, le seul paramètre à prendre en compte est le rang (1,2 ou 3) du tas dans lequel on mettra la pile de la carte choisie. On note t_1, t_2, t_3 ces trois rangs.

- Voyons comment faire pour que la carte choisie se retrouve par exemple en position 20 à la fin :

On résout l'équation $t_1 + 3 t_2 + 9 t_3 = \text{rang} + 12$ (ici $20 + 12 = 32$)
 où $t_1, t_2, t_3 \in \{1, 2, 3\}$ [explication à la fin]

La solution toujours unique est ici :

$$t_1 = 2 \quad t_2 = 1 \quad t_3 = 3 \quad \text{donc :}$$

A la première étape, on met la pile dans le tas $t_1 = 2$ (milieu) :

X	a	X	Ce qu'on obtient après redistribution est à droite :			
X	b	X				
X	c	X				
X	d	X		a	b	c
X	e	X		d	e	f
X	f	X		g	h	i
X	g	X				
X	h	X				
X	i	X				
tas 1	tas 2	tas 3		pile 1	pile 2	pile 3

figure 1

A la deuxième étape, on met la pile dans le tas $t_2 = 1$ (haut) :

	X	X	Ce qu'on obtient après redistribution est à droite :			
	X	X		a	d	g
	X	X				
a	X	X				
d	X	X				
g	X	X				
	X	X				
	X	X				
	X	X				
tas 1	tas 2	tas 3		pile 1	pile 2	pile 3

figure 2

A la dernière étape, on met la pile dans le tas $t_3 = 3$ (bas) :

X	X	X	À la fin, quand on retourne les cartes une à une (dans l'ordre 1, 2, 3...) la carte choisie (g) est bien au rang 20.	1	10	19
a	d	g		2	11	20
X	X	X		3	12	
X	X	X		4	13	
X	X	X		5	14	
X	X	X		6	15	
X	X	X		7	16	
X	X	X		8	17	
X	X	X		9	18	
tas 1	tas 2	tas 3				

figure 3

- L'équation $t_1 + 3 t_2 + 9 t_3 = \text{rang final} + 12$ où $t_1, t_2, t_3 \in \{1, 2, 3\}$ s'explique ainsi :

On commence par la fin :

- La contribution de t_3 au rang final est égale à $9 t_3$ car (**figure 3**) à chaque augmentation d'une unité de t_3 le rang augmente de 9 (effectif d'une pile).
- La contribution de t_2 au rang final est égale à $3 t_2$ car (**figure 2**) à chaque augmentation d'une unité de t_2 le rang augmente de 9 (effectif d'une pile) divisé par 3 car la distribution qui suit morcelle chaque pile en trois.
- La contribution de t_1 au rang final est égale à t_1 car (**figure 1**) à chaque augmentation d'une unité de t_1 le rang augmente de 9 (effectif d'une pile) divisé deux fois par 3 à cause des deux distributions qui suivent.

Ainsi, le rang final est égal à $t_1 + 3 t_2 + 9 t_3 + \text{constante}$, et l'examen par exemple du cas $t_1 = t_2 = t_3 = 1$ pour lequel le rang final est égal à 1 montre que cette constante vaut 12.

- Si, dans l'équation $t_1 + 3 t_2 + 9 t_3 = \text{rang final} + 12$, où $t_1, t_2, t_3 \in \{1, 2, 3\}$, on pose $t_i = 1 + c_i$ l'équation devient $c_1 + 3 c_2 + 9 c_3 = \text{rang final} - 1$ où $c_1, c_2, c_3 \in \{0, 1, 2\}$.

On reconnaît l'écriture de rang final - 1 en base 3 où c_1, c_2, c_3 sont les chiffres.

Donc une manière simple de procéder pour forcer le rang final de la carte choisie est d'écrire rang final - 1 en base 3 sous la forme :

$$\text{rang final} - 1 = [c_3 c_2 c_1] \text{ puis de poser } t_i = 1 + c_i$$

ce qui donne l'ordre des tas dans les trois manipulations successives, avec la convention que $t = 1$ est le tas du haut, $t = 2$ est le tas du milieu, $t = 3$ celui du bas.

Ainsi pour avoir le rang 14, on écrit $14 - 1 = 13 = [111]_{\text{base } 3}$

Cela donne $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ d'où $t_1 = t_2 = t_3 = 2$ et on mettra toujours le tas de la carte choisie au milieu.

Attention, les tas sont faces cachées alors que les piles sont faces visibles.

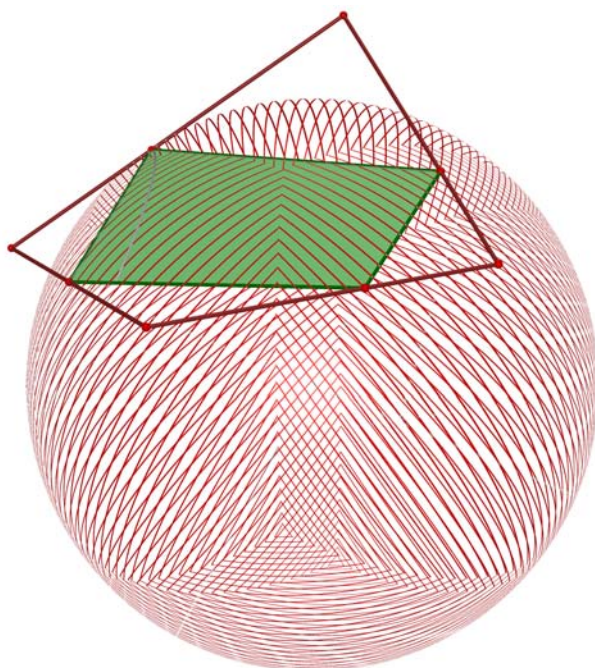
Vous avez les cartes en main, à vous de jouer !..

Dans l'espace, quadrilatère posé sur une sphère

Emmanuel MOREAU, Lycée Davier à Joigny

Résumé : Avec les outils d'un élève de 1^{er} S, démontrer ce résultat : si les 4 côtés d'un quadrilatère gauche sont tangents à une sphère, alors les 4 points de contact sont coplanaires.

Mots clés : Géométrie 1^{er} S ; quadrilatère gauche ; quadrilatère tangent sphère, coplanaire, coplanarité.



Le but de ce travail est de démontrer le surprenant résultat que voici :

***Si les 4 côtés d'un quadrilatère gauche sont tangents à une sphère,
alors les 4 points de contact sont coplanaires.***

Voici un beau résultat de géométrie que l'on peut obtenir avec les outils d'un élève de Première S.

On peut en outre amener les élèves à conjecturer ce résultat à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

On propose dans ce qui suit de mener ce travail en deux temps :

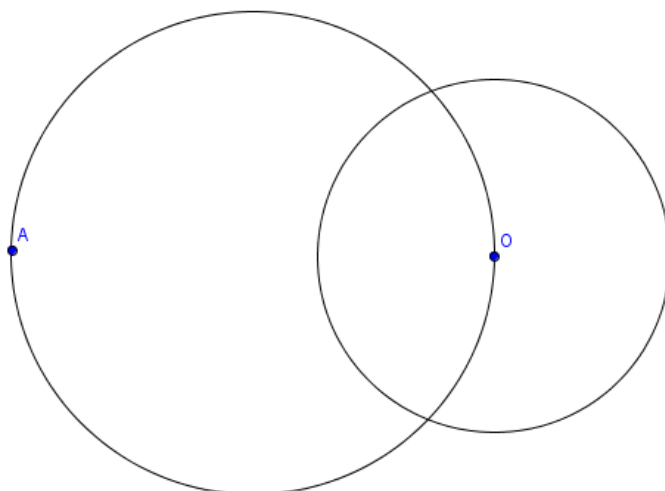
- 1) La construction de la figure ci-dessus à l'aide du logiciel *Cabri 3D* (1h ou 1h30 en salle informatique pour des élèves découvrant le logiciel).
- 2) La démonstration du théorème conjecturé, qui pourra alors être traitée à la maison.

**Quadrilatère tangent à une sphère :
Construction d'une figure à l'aide du logiciel Cabri 3D.**

Question préliminaire :

1) Dans le plan, on considère un cercle C de centre O et un point A extérieur à C . On souhaite construire les 2 tangentes à C passant par A .

Sur la figure ci-contre, on a tracé le cercle de diamètre $[OA]$. Justifier que ce cercle permet d'obtenir la construction des 2 tangentes.



2) On se place désormais dans l'espace. S est une sphère de centre O et A un point extérieur à cette sphère.

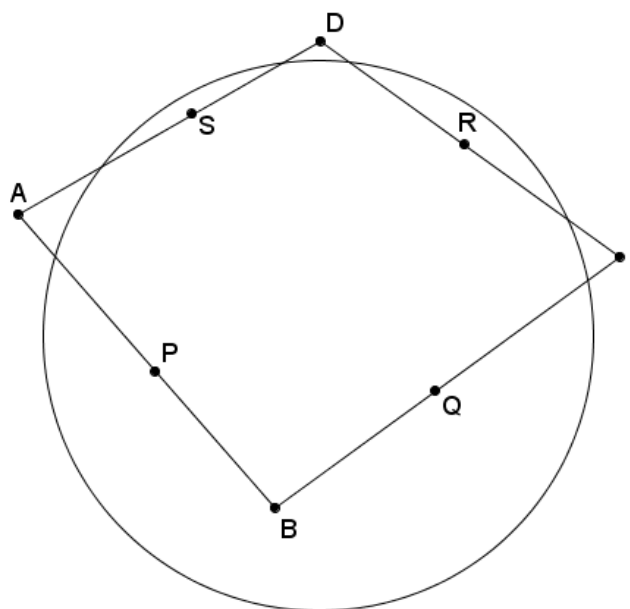
Comment construire une tangente à S passant par A ?

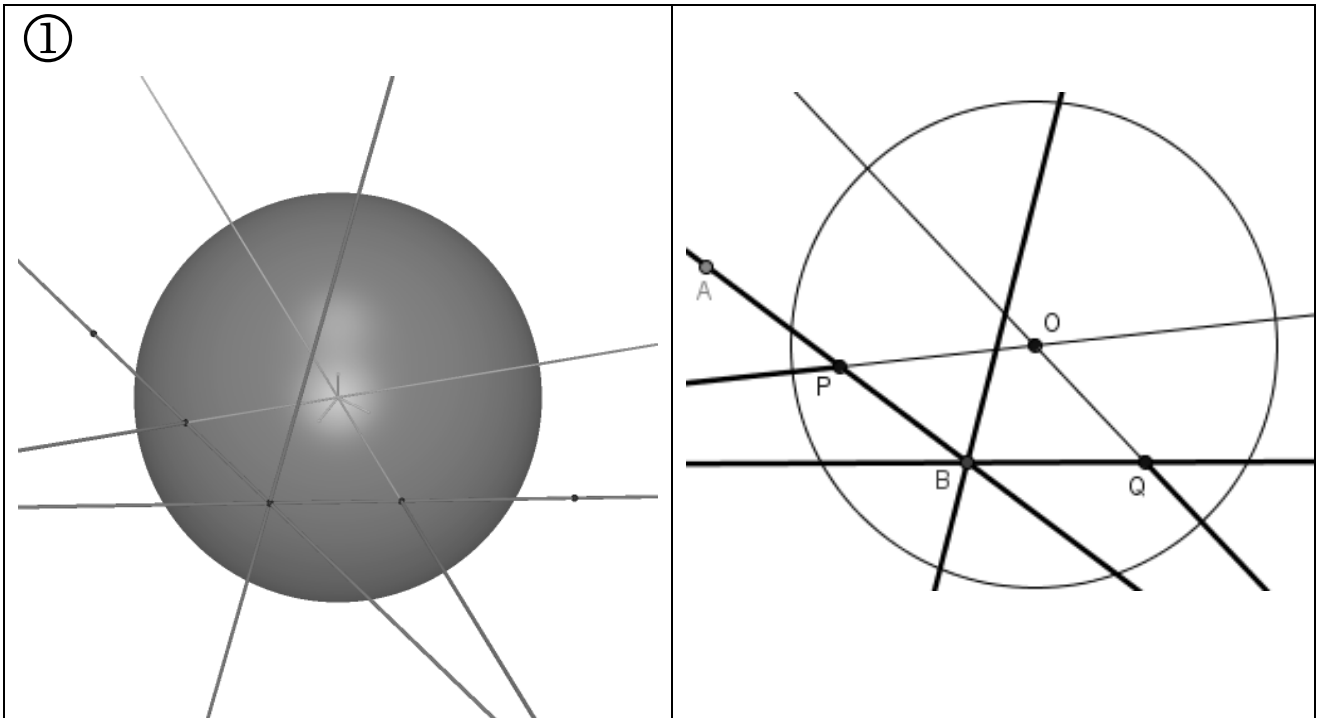
Réaliser cette construction à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. Avec *Cabri 3D*, on pourra utiliser l'outil "courbe d'intersection" pour faire apparaître l'ensemble des points de contact des tangentes passant par A .

La construction :

Il s'agit de construire un quadrilatère $ABCD$ dont les 4 côtés sont tangents à une sphère. On nomme P, Q, R et S les points de contacts, comme il est indiqué sur le schéma ci-contre.

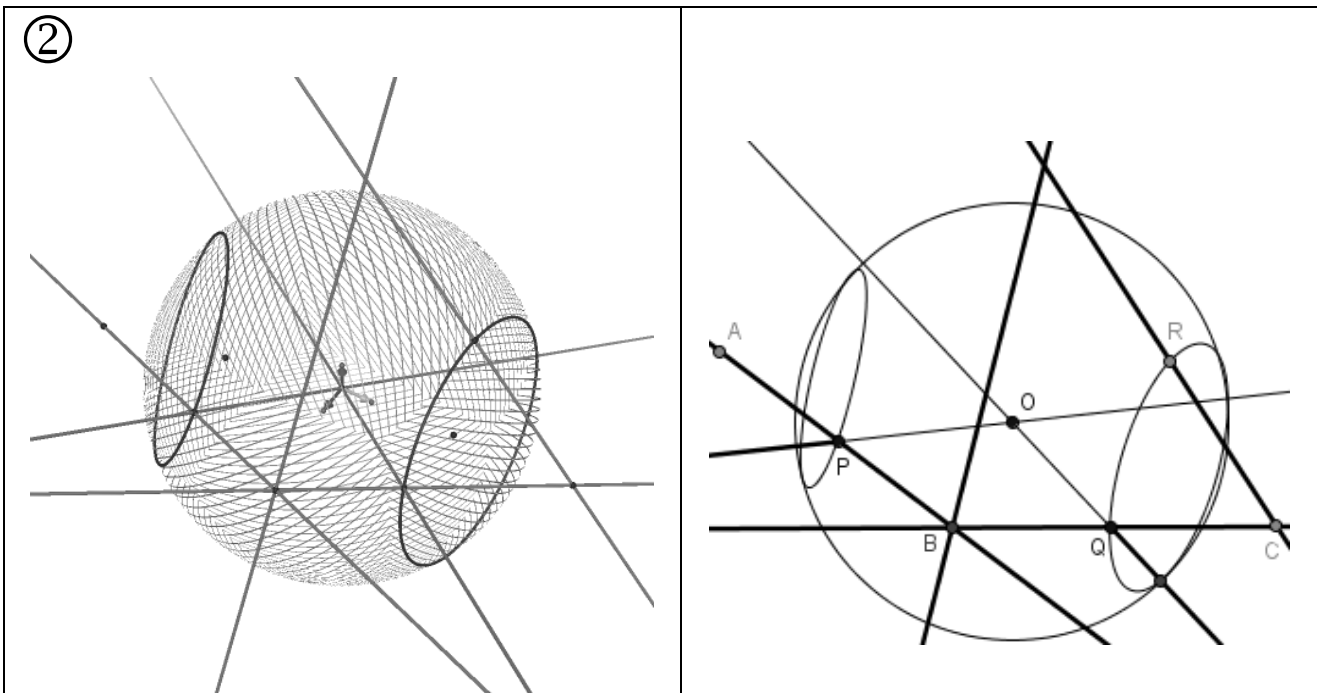
Dans la méthode proposée, on vous demande de placer d'abord les points P et Q , puis $B \dots$, puis l'on vous guide pour les étapes qui suivent.





Si O est l'origine du repère (*Cabri* n'offre pas la possibilité de nommer les points), construire une sphère de centre O et placer deux points P et Q sur cette sphère. Le plan (xOy) qui apparaît en gris peut être masqué (bouton droit de la souris). Construire les droites (OP) et (OQ) .

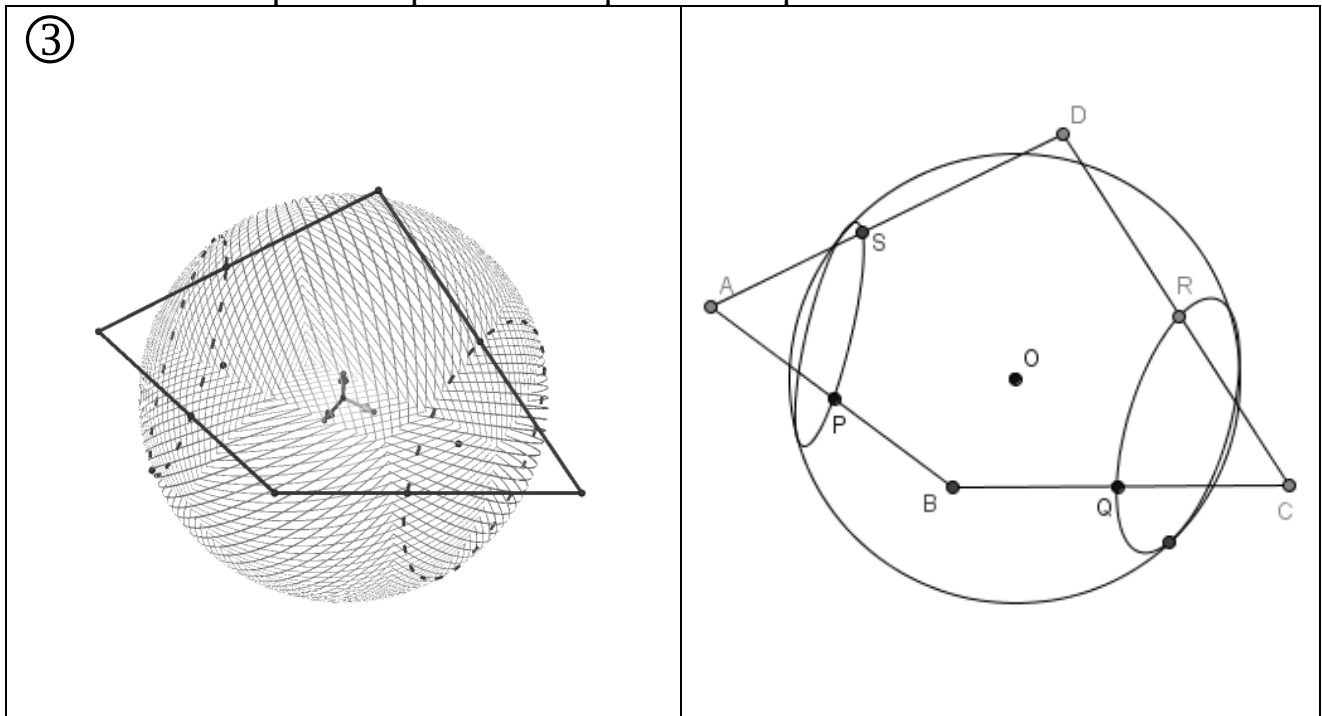
Dans quel plan doit être la droite (BP) ? Et (BQ) ? En déduire que B appartient nécessairement à une droite que l'on tracera à l'aide de l'outil "Courbe d'intersection" (3^{ème} icône). Ne pas hésiter à tourner la figure si des éléments utiles ne sont pas visibles (maintenir le bouton droit enfoncé). Masquer les plans de construction devenus inutiles et tracer les droites (BP) et (BQ) . Placer des points A et C sur ces droites.



Cliquer sur la sphère (bouton droit) et utiliser la fonction "style de surface" pour faire apparaître la sphère en hachure fine (style de surface). Ceci permettra de visualiser des éléments situés derrière ou dans la sphère.

En vous inspirant de la question préliminaire, tracer le cercle qui correspond au lieu possible du point R. Placer un point R sur ce cercle.

Tracer le cercle qui correspond au lieu possible du point S.



Construire D et achever la construction du quadrilatère ABCD.

Indication : à quel plan appartient le point D ?

Vers une conjecture :

Faire bouger quelques points libres pour que le quadrilatère ABCD soit très visiblement gauche (non contenu dans un plan).

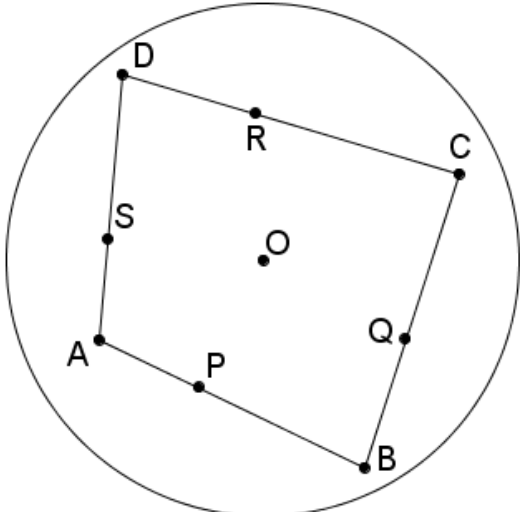
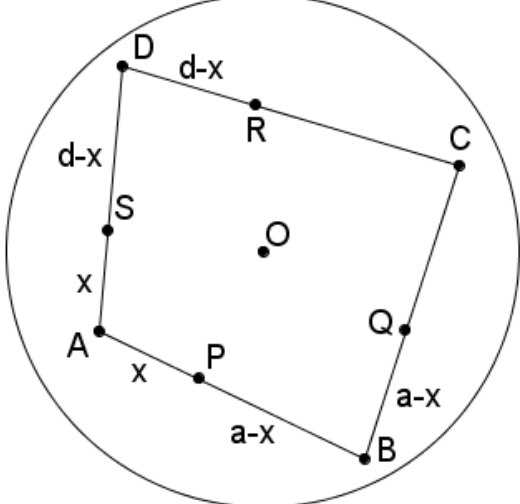
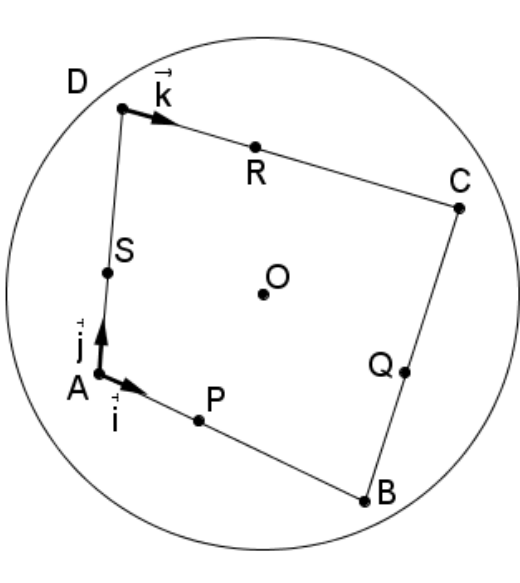
Construire le plan (PQR) et faire tourner la figure. Quelle conjecture peut-on formuler concernant le quadrilatère PQRS ?

Masquer le plan et faire apparaître PQRS à l'aide de l'outil "polygone".

Formuler en une phrase le surprenant résultat conjecturé : « Si les 4 côtés d'un quadrilatère gauche ABCD sont tangents à une sphère, alors ... ».

Vers un début de démonstration : À l'aide de l'outil "distance", formuler une conjecture concernant la nature du triangle APS.

Quadrilatère tangent à une sphère : Démonstration du théorème conjecturé.

<p>Sur la figure ci-contre :</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ ABCD est un quadrilatère gauche. ▪ Les 4 côtés de ABCD sont tangents à une même sphère. ▪ P, Q, R et S sont les points de contact avec cette sphère de centre O. <p>1) Montrer que les triangles OAP et OAS sont isométriques (Ils ne le sont pas sur la figure : il s'agit d'une vue en perspective). Qu'en déduit-on concernant le triangle APS ?</p>	
<p>2) On pose $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ et $x = AP$. La question 1) nous permet d'exprimer d'autres longueurs comme il est indiqué ci-contre (par exemple $DR = d - x$). Exprimer les longueurs CQ et CR en fonction de a, b, c, d et x et justifier que $a + c = b + d$. Formuler en une phrase le résultat démontré.</p>	
<p>3) On pose $\vec{i} = \frac{\overline{AB}}{AB}$, $\vec{j} = \frac{\overline{AD}}{AD}$, $\vec{k} = \frac{\overline{DC}}{DC}$ Justifier que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base normée de l'espace.</p> <p>4) Exprimer les vecteurs \overline{PS} et \overline{SR} dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et montrer que : $b \overline{PQ} = (b-a)(a-x) \vec{i} + d(a-x) \vec{j} + c(a-x) \vec{k}$</p> <p>5) En déduire qu'il existe 2 réels α et β (que l'on exprimera en fonction de a, b, c, d et x), tels que : $b \overline{PQ} = \alpha \overline{PS} + \beta \overline{SR}$</p> <p>6) Conclure.</p>	

Remarques concernant la construction :

Question préliminaire :

Il s'agit de faire apparaître l'intersection de 2 sphères. On peut indiquer aux élèves que l'on peut masquer la deuxième sphère une fois le cercle d'intersection obtenu. Cette question préliminaire peut aussi être l'occasion d'une prise en main du logiciel. On peut également s'amuser à faire apparaître l'ensemble des tangentes à l'aide de l'outil "cône". Ceci peut aider à convaincre les élèves que l'intersection de 2 sphères est bien un cercle et non une ellipse.

Quadrilatère tangent à une sphère : Construction

Pour construire D et achever la construction du quadrilatère ABCD, on construit le plan (ACR) puis on trace les points d'intersection de ce plan avec le cercle qui correspond au lieu possible du point S. L'un des 2 points d'intersection s'impose, que l'on appelle S. Le point D est alors le point d'intersection de (AS) avec (CR).

Pour conjecturer le résultat :

Cabri ne permet de construire un polygone que si celui-ci est plan. Il vaut donc mieux commencer par construire le plan (PQR) avant le polygone, car le fait d'obtenir ce polygone contiendrait implicitement la conjecture à formuler.

Remarques concernant la démonstration :

1) Il suffit de remarquer que $\hat{O}SA$ et $\hat{O}PA$ sont des angles droits. Les deux triangles rectangles ont deux longueurs communes : la longueur OA et $OP = OS = \text{Rayon de la sphère}$.

2) On incite les élèves à écrire $DR = d - x$ plutôt que $DR = a - b + c - x$ pour alléger les calculs qui suivent (certains élèves pourraient ne pas penser à simplifier l'écriture).

On a démontré que :

"Si les 4 côtés d'un quadrilatère sont tangents à une sphère, alors la somme des longueurs de ses côtés opposés est la même pour les deux couples de côtés opposés".

3) ABCD étant gauche, les vecteurs ne sont pas coplanaires donc ils forment une base. Ces vecteurs sont normés par définition.

4) On a $\overrightarrow{PS} = -x \vec{i} + x \vec{j}$, $\overrightarrow{SR} = (d-x) \vec{j} + (d-x) \vec{k}$

puis $\overrightarrow{PQ} = (a-x) \vec{i} + (a-x) \frac{\overrightarrow{BC}}{b}$ d'où $b \overrightarrow{PQ} = b(a-x) \vec{i} + (a-x) \overrightarrow{BC}$ or

$\overrightarrow{BC} = -a \vec{i} + d \vec{j} + c \vec{k}$ d'où le résultat.

5) On en déduit sans trop de difficultés (\overrightarrow{PS} n'a pas de composante selon \vec{k} et \overrightarrow{SR} n'a pas de composante selon \vec{j}) que $b \overrightarrow{PQ} = \alpha \overrightarrow{PS} + \beta \overrightarrow{SR}$ avec $\alpha = \frac{d(a-x)}{x}$ et $\beta = \frac{c(a-x)}{d-x}$.

On doit ici penser à utiliser la relation $a + c = b + d$ précédemment obtenue.

6) Cette relation montre que les trois vecteurs sont coplanaires, il en est donc de même pour les 4 points de contact.

Remarque de M. Lafond :

Il existe une démonstration géométrique sans utilisation des vecteurs :

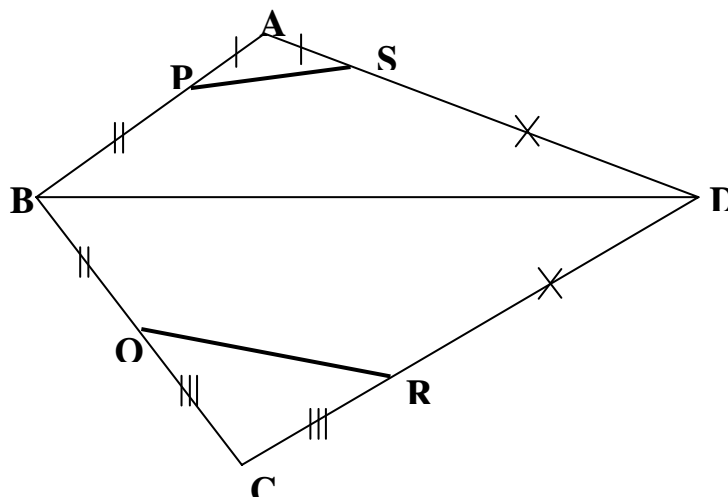


Figure 1

Les tangentes à la sphère sont AB, BC, CD, DA et les points de contact P, Q, R, S. [Figure 1].

On a bien sûr $AP = AS$; $BP = BQ$; $CQ = CR$ et $DR = DS$.

"Déplions" la figure autour de la droite (BD) de manière à ce que ABCD soient coplanaires, ce qui conserve les égalités précédentes.

Distinguons deux cas :

- Si $PS \parallel BD$ alors d'après Thalès, $BP = DS$ donc $BQ = DR$ donc $QR \parallel BD$ et dans ce cas $PS \parallel QR$.

Ce parallélisme est conservé après repliage, donc P,Q,R,S sont bien coplanaires.

- Si PS n'est pas parallèle à BD alors d'après le raisonnement précédent, QR n'est pas parallèle à BD .

PS coupe la droite BD en I, QR coupe la droite BD en J, et d'après Ménélaus utilisé 2 fois :

$$\frac{IB}{ID} = \frac{SA}{SD} \frac{PB}{PA} = \frac{PB}{SD} = \frac{QB}{RD} = \frac{RC}{RD} \frac{QB}{QC} = \frac{JB}{JD}.$$

Donc $I = J$ et on a la figure 2 ci-dessous :

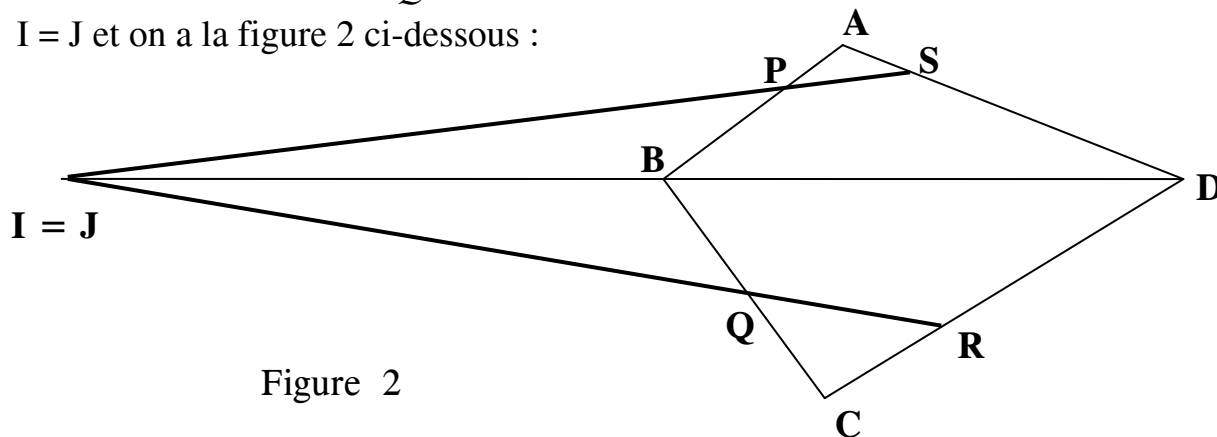
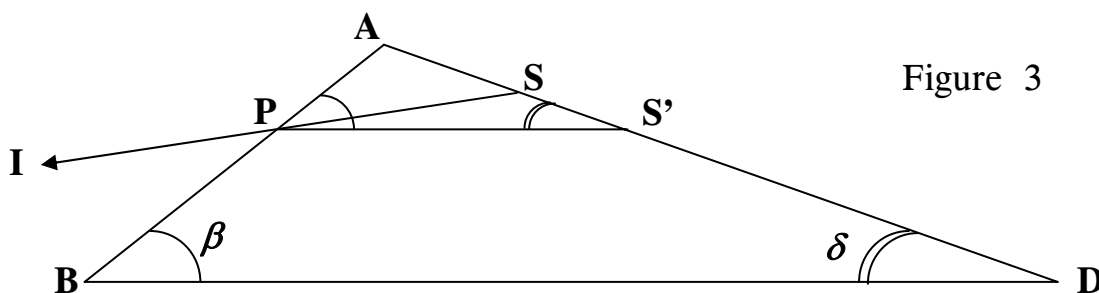


Figure 2

Quand on replie autour de (BD), IJPQRS restent coplanaires. CQFD.

En toute rigueur, il faut démontrer que I et J sont du même côté de [BD] sur la droite (BD), même si c'est évident :



Allons-y : [Voir la figure 3]

Puisque PS n'est pas parallèle à BD, on peut supposer $PB < DS$.

Donc $AP < AD$ d'où $\delta < \beta$.

Soit S' sur AD tel que $PS' \parallel BD$. $\delta < \beta$ entraîne $AP < AS'$ donc $AS < AS'$.

S est entre A et S' donc I est plus près de B que de D sur (BD).

C'est la même chose pour J.

Fin de la remarque.

Arcs de cercles et courbes de Bézier rationnelles quadratiques

Lionel GARNIER, *lgarnier@u-bourgogne.fr*

Résumé

Dans le numéro 113 de la *la feuille de vigne* de septembre 2009, nous avons vu l'algorithme de De Casteljau qui permet de construire un arc de parabole à l'aide de trois points de contrôle en utilisant une courbe de Bézier polynômiale. Nous avons aussi défini la notion de courbe de Bézier rationnelle de degré 2 en utilisant des concepts de géométrie projective.

Dans cet article, dans un premier temps, nous allons montrer comment il est possible de modéliser des arcs de cercles en utilisant des courbes de Bézier rationnelles quadratiques. Dans un second temps, nous adaptons l'algorithme de De Casteljau dans le cas du cercle et proposons une construction fractale d'un arc de cercle.

Mots clés : courbe de Bézier rationnelle quadratique, arc de cercle, barycentre.

1 Rappels

Pour que cet article soit autonome, nous rappelons les expressions des polynômes de Bernstein de degré 2 :

$$B_0(t) = (1-t)^2, \quad B_1(t) = 2t(1-t), \quad B_2(t) = t^2 \quad (1)$$

ainsi que la notion de courbe de Bézier rationnelle de degré 2 :

Définition 1 : *courbe de Bézier rationnelle quadratique (CBRQ)*

Soit $(P_0; \omega_0)$, $(P_1; \omega_1)$ et $(P_2; \omega_2)$ trois points pondérés du plan affine euclidien usuel, vérifiant :

- les points P_0 , P_1 et P_2 ne sont pas alignés ;
- pour tout réel t de $[0; 1]$, nous avons :

$$\sum_{i=0}^2 \omega_i B_i(t) \neq 0 \quad (2)$$

- $\omega_0 \times \omega_1 \times \omega_2 \neq 0$.

Un point $M(t)$, $t \in [0; 1]$, appartient à la CBRQ définie par les points de contrôle pondérés $(P_i; \omega_i)_{0 \leq i \leq 2}$ si, pour un point O de \mathcal{P} , $M(t)$ vérifie :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \frac{1}{\sum_{i=0}^2 \omega_i B_i(t)} \sum_{i=0}^2 \omega_i B_i(t) \overrightarrow{OP_i} \quad (3)$$

Lorsque nous avons $\omega_0 = \omega_2 = 1$, la courbe est dite sous forme quasi standard et si nous avons $\omega_1 > 0$, la courbe est dite sous forme standard.

De plus, la tangente à la courbe en P_0 (resp. P_2) est la droite (P_0P_1) (resp. (P_2P_1)).

Si la condition donnée par la formule (2) n'est pas vérifiée, la courbe de Bézier ne reste plus dans l'espace affine et la ou les deux valeur(s) correspondante(s) nous donne(nt) le ou les deux point(s) à l'infini de la conique représentée par cette courbe de Bézier.

Concernant la motivation et l'intérêt de ce travail ou concernant la modélisation d'arcs d'ellipses à partir des extrémités et des deux tangentes en ces points, le lecteur peut se reporter à [Gar07]. Dans cet article, les extrémités de l'arc de cercle modélisé ne seront pas diamétralement opposés. Concernant ce cas, le lecteur peut consulter [FJ89].

2 Détermination des points et des poids de la courbe de Bézier rationnelle quadratique

Si P_0 , P_1 et P_2 sont trois points non alignés, $RQBC \{(P_0; P_1; P_2)\}$ désigne une courbe de Bézier rationnelle quadratique de points de contrôle P_0 , P_1 et P_2 tandis que $RQBC \{(P_0; P_1; P_2), \omega\}$ désigne une courbe de Bézier rationnelle quadratique quasi standard de points de contrôle $(P_0; 1)$, $(P_1; \omega)$ et $(P_2; 1)$. Finalement, $RQBC \{(P_0; P_1; P_2), (\omega_0; \omega_1; \omega_2)\}$ désigne une CBRQ de points de contrôle (pondérés) $(P_0; \omega_0)$, $(P_1; \omega_1)$ et $(P_2; \omega_2)$.

Comme tout diamètre d'un cercle est un axe de symétrie, nous obtenons une condition nécessaire (non suffisante) pour qu'une $RQBC \{(P_0; P_1; P_2)\}$ soit un arc de cercle : $P_0P_1 = P_1P_2$ c'est-à-dire que le point P_1 appartient à la médiatrice de $[P_0P_2]$. Nous allons dans un premier temps déterminer les relations entre les points de contrôle de la CBRQ et le cercle dont elle modélise l'arc, figure 1.

2.1 Condition géométrique

Le théorème 1 permet de déterminer les caractéristiques du cercle, dont l'arc γ_0 ou γ_1 est modélisé par $RQBC \{(P_0; P_1; P_2)\}$, passant par P_0 et P_2 et ayant comme tangentes les droites (P_0P_1) et (P_2P_1) , figure 1.

Théorème 1 : *Centre du cercle déterminé par deux points et deux tangentes*

Soit \mathcal{C} le cercle de centre O_0 et de rayon R passant par P_0 et P_2 et ayant comme tangente (P_0P_1) et (P_2P_1) , les points P_0 , P_1 et P_2 n'étant pas alignés.

Soit I_1 le milieu du segment $[P_0P_2]$. Soit Δ la médiatrice du segment $[P_0P_2]$. Alors :

1. *Si le cercle \mathcal{C} existe alors le point P_1 appartient à la droite Δ .*

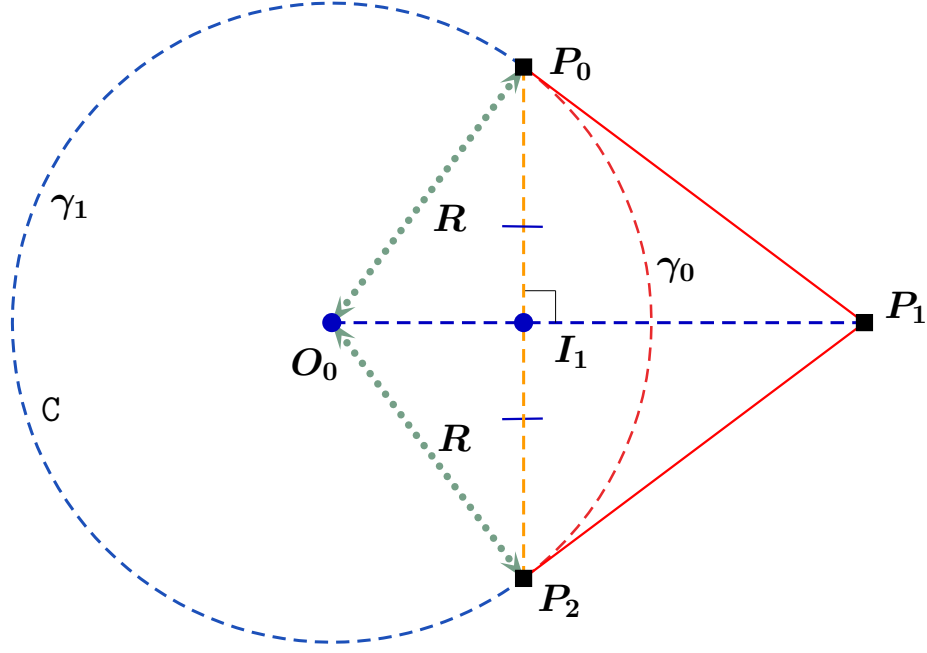


FIG. 1 – Modélisation de deux arcs de cercle par deux CBRQs.

2. Si le cercle \mathcal{C} existe, le centre O_0 est donné par :

$$\overrightarrow{P_1O_0} = t_0 \overrightarrow{P_1I_1} \quad \text{avec} \quad t_0 = \frac{\overrightarrow{P_0P_1}^2}{\overrightarrow{I_1P_1} \bullet \overrightarrow{P_0P_1}} \quad (4)$$

et le rayon est $R = O_0P_0$.

Démonstration :

1. Si le cercle \mathcal{C} existe alors $\Delta = (I_1O_0)$ est un axe de symétrie de \mathcal{C} . Soit s_Δ la réflexion d'axe Δ .

Ainsi $s_\Delta(P_0) = P_2$ et $s_\Delta(P_2) = P_0$. Soit \mathcal{T}_0 et \mathcal{T}_2 les tangentes respectives à \mathcal{C} en P_0 et P_2 . Nous avons donc $s_\Delta(\mathcal{T}_0) = \mathcal{T}_2$. Les tangentes \mathcal{T}_0 et \mathcal{T}_2 sont concourantes (puisque les deux contiennent P_1) et se coupent sur l'axe Δ donc P_1 appartient à la droite Δ .

2. Dans cette partie, le point P_1 appartient à la médiatrice Δ et nous supposons que le cercle \mathcal{C} existe.

(P_0P_1) est la tangente au cercle \mathcal{C} en P_0 si et seulement si nous avons :

$$\overrightarrow{P_0P_1} \bullet \overrightarrow{P_0O_0} = 0$$

Le point O_0 appartient à la droite (P_1I_1) donc il existe un réel t_0 tel que :

$$\overrightarrow{P_1O_0} = t_0 \overrightarrow{P_1I_1}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P_0P_1} \bullet \overrightarrow{P_0O_0} = 0 &\iff \overrightarrow{P_0P_1} \bullet (\overrightarrow{P_0P_1} + \overrightarrow{P_1O_0}) = 0 \\
&\iff \overrightarrow{P_0P_1} \bullet \overrightarrow{P_0P_1} + \overrightarrow{P_0P_1} \bullet \overrightarrow{P_1O_0} = 0 \\
&\iff \overrightarrow{P_0P_1}^2 + t_0 \overrightarrow{P_0P_1} \bullet \overrightarrow{P_1I_1} = 0 \\
&\iff t_0 = \frac{\overrightarrow{P_0P_1}^2}{\overrightarrow{P_0P_1} \bullet \overrightarrow{I_1P_1}}.
\end{aligned}$$

Nous avons bien $\overrightarrow{P_0P_1} \bullet \overrightarrow{P_1I_1} \neq 0$ puisque les points P_0 , P_1 et P_2 ne sont pas alignés. Comme le point P_0 appartient au cercle \mathcal{C} de centre O_0 , le rayon R du cercle \mathcal{C} est donc $R = O_0P_0$.

■

Réciproquement, le théorème 2 permet de construire le point P_1 pour que la $RQBC(P_0; P_1; P_2)$ soit l'un des deux arcs de cercle de centre donné et d'extrémités P_0 et P_2 .

Théorème 2 : *Construction de P_1 connaissant le centre du cercle*

Soit \mathcal{C} le cercle de centre O_0 et de rayon R passant par les deux points distincts P_0 et P_2 et I_1 le milieu du segment $[P_0P_2]$.

$RQBC(P_0; P_1; P_2)$ peut¹ être un arc de cercle de \mathcal{C} passant par les deux points distincts P_0 et P_2 si P_1 vérifie :

$$\overrightarrow{I_1P_1} = t_1 \overrightarrow{O_0I_1} \quad \text{avec} \quad t_1 = \frac{\overrightarrow{O_0P_0} \bullet \overrightarrow{I_1P_0}}{\overrightarrow{O_0P_0} \bullet \overrightarrow{O_0I_1}} \quad (5)$$

Démonstration :

Soit I_1 le milieu du segment $[P_0P_2]$. Tout diamètre de cercle est axe de symétrie donc P_1 appartient à la droite (O_0I_1) donc il existe un réel t_1 tel que :

$$\overrightarrow{I_1P_1} = t_1 \overrightarrow{O_0I_1}$$

La droite (P_0P_1) est une tangente au cercle si et seulement si $\overrightarrow{O_0P_0} \bullet \overrightarrow{P_0P_1} = 0$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{O_0P_0} \bullet \overrightarrow{P_0P_1} = 0 &\iff \overrightarrow{O_0P_0} \bullet (\overrightarrow{P_0I_1} + \overrightarrow{I_1P_1}) = 0 \\
&\iff \overrightarrow{O_0P_0} \bullet \overrightarrow{P_0I_1} + \overrightarrow{O_0P_0} \bullet \overrightarrow{I_1P_1} = 0 \\
&\iff \overrightarrow{O_0P_0} \bullet \overrightarrow{P_0I_1} + t_1 \overrightarrow{O_0P_0} \bullet \overrightarrow{O_0I_1} = 0 \\
&\iff t_1 \overrightarrow{O_0P_0} \bullet \overrightarrow{O_0I_1} = -\overrightarrow{O_0P_0} \bullet \overrightarrow{P_0I_1} \\
&\iff t_1 = \frac{\overrightarrow{O_0P_0} \bullet \overrightarrow{I_1P_0}}{\overrightarrow{O_0P_0} \bullet \overrightarrow{O_0I_1}}.
\end{aligned}$$

Nous avons bien $\overrightarrow{O_0P_0} \bullet \overrightarrow{O_0I_1} \neq 0$ puisque chaque vecteur est non nul et ils ne peuvent pas être orthogonaux car I_1 appartient à une corde du cercle de centre O_0 issue de P_0 .

■

¹Pour déterminer une conique, il faut cinq contraintes, nous n'en avons que quatre (deux points et deux tangentes).

2.2 Calculs des poids

Après avoir déterminé les conditions géométriques permettant de passer d'un arc de cercle à une CBRQ et réciproquement, nous allons, dans ce paragraphe, donner les conditions sur les poids ω_0 , ω_1 et ω_2 pour qu'une CBRQ modélise un arc de cercle. Nous considérons dans un premier temps le cas général puis nous verrons les simplifications qu'il est possible d'apporter lorsque la CBRQ est sous forme quasi standard.

Théorème 3 : *Cercle déterminé par deux points et les tangentes en ces points*

Soit \mathcal{C} le cercle de centre O_0 et de rayon R passant par P_0 et P_2 et ayant comme tangente (P_0P_1) et (P_2P_1) , les points P_0 , P_1 et P_2 n'étant pas alignés. Soit I_1 le milieu du segment $[P_0P_2]$. Soit Δ la médiatrice du segment $[P_0P_2]$.

Soit w_0 et w_2 deux réels strictement positifs, nous posons $\omega = \omega_0 + \omega_2$. Soit G le barycentre des points pondérés (P_0, ω_0) et (P_2, ω_2) .

Soit $\gamma = RQBC \{(P_0; P_1; P_2), (\omega_0; \omega_1; \omega_2)\}$. La courbe² γ est un arc de cercle si et seulement si :

$$\left\| \overrightarrow{O_0\gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \right\| = R \quad (6)$$

qui est équivalent à :

$$(\omega + 2\omega_1)^2 \left\| \overrightarrow{O_0\gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \right\|^2 = \left(\omega \overrightarrow{O_0G} + 2\omega_1 \overrightarrow{O_0P_1} \right)^2 \quad (7)$$

qui est équivalente à l'équation $\alpha\omega_1^2 + \beta = 0$ où α et β sont donnés par :

$$\alpha = 4(R^2 - O_0P_1^2), \quad \beta = \omega^2(R^2 - O_0G^2) \quad (8)$$

La solution positive ω_1^+ (resp. négative ω_1^-) de la formule (9) permet de modéliser le petit (resp. grand) arc de cercle du cercle \mathcal{C} .

$$\omega_1^+ = \sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}, \quad \omega_1^- = -\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}} \quad (9)$$

Démonstration du théorème :

$M\left(\frac{1}{2}\right)$ appartient au cercle \mathcal{C} et $B_0\left(\frac{1}{2}\right) = B_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ et $B_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

$\omega_0 B_0\left(\frac{1}{2}\right) + \omega_1 B_1\left(\frac{1}{2}\right) + \omega_2 B_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\omega_0}{4} + \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_2}{4} = \frac{1}{4}(\omega_0 + \omega_2 + 2\omega_1) = \frac{1}{4}(\omega + 2\omega_1)$

avec $\omega = \omega_0 + \omega_2$.

G est le barycentre des points pondérés (P_0, ω_0) et (P_2, ω_2) donc pour tout point O , nous avons $\omega \overrightarrow{OG} = \omega_0 \overrightarrow{OP_0} + \omega_2 \overrightarrow{OP_2}$.

$$\overrightarrow{O\gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{\omega + 2\omega_1} \left(\frac{\omega_0}{4} \overrightarrow{OP_0} + \frac{\omega_1}{2} \overrightarrow{OP_1} + \frac{\omega_2}{4} \overrightarrow{OP_2} \right) = \frac{1}{\omega + 2\omega_1} \left(\omega \overrightarrow{OG} + 2\omega_1 \overrightarrow{OP_1} \right)$$

²Par abus, nous notons de la même façon la courbe γ et le chemin $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$ définissant les points $\gamma(t)$ de la courbe γ .

La définition vectorielle d'une courbe de Bézier rationnelle ne dépend pas du point O choisi, nous prenons donc O au centre du cercle O_0 et nous avons la relation :

$$(\omega + 2\omega_1) \overrightarrow{O_0\gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \left(\omega \overrightarrow{O_0G} + 2\omega_1 \overrightarrow{O_0P_1}\right)$$

En prenant le carré scalaire, nous obtenons :

$$\begin{aligned} (\omega + 2\omega_1)^2 \left\| \overrightarrow{O_0\gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \right\|^2 &= \left(\omega \overrightarrow{O_0G} + 2\omega_1 \overrightarrow{O_0P_1}\right)^2 \\ \iff (\omega^2 + 4\omega\omega_1 + 4\omega_1^2) R^2 &= \omega^2 O_0G^2 + 4\omega\omega_1 \overrightarrow{O_0G} \bullet \overrightarrow{O_0P_1} + 4\omega_1^2 O_0P_1^2 \\ \iff 4\omega_1^2 (R^2 - O_0P_1^2) + 4\omega\omega_1 \left(R^2 - \overrightarrow{O_0G} \bullet \overrightarrow{O_0P_1}\right) &+ \omega^2 (R^2 - O_0G^2) = 0. \end{aligned}$$

Montrons que $R^2 - \overrightarrow{O_0G} \bullet \overrightarrow{O_0P_1} = 0$.

$$R^2 = \overrightarrow{O_0P_0}^2 = \overrightarrow{O_0P_0}^2 + \overrightarrow{O_0P_0} \bullet \overrightarrow{P_0P_1} \text{ (car } \overrightarrow{O_0P_0} \bullet \overrightarrow{P_0P_1} = 0) \text{ d'où :}$$

$$R^2 = \overrightarrow{O_0P_0} \bullet \left(\overrightarrow{O_0P_0} + \overrightarrow{P_0P_1}\right) = \overrightarrow{O_0P_0} \bullet \overrightarrow{O_0P_1}$$

Comme $(P_0P_2) \perp (O_0P_1)$ et $G \in (P_0P_2)$ figure 1, nous avons $\overrightarrow{P_0G} \bullet \overrightarrow{O_0P_1} = 0$ d'où :

$$R^2 = \overrightarrow{O_0P_0} \bullet \overrightarrow{O_0P_1} + \overrightarrow{P_0G} \bullet \overrightarrow{O_0P_1} = \left(\overrightarrow{O_0P_0} + \overrightarrow{P_0G}\right) \bullet \overrightarrow{O_0P_1} = \overrightarrow{O_0G} \bullet \overrightarrow{O_0P_1}$$

d'où :

$$R^2 - \overrightarrow{O_0G} \bullet \overrightarrow{O_0P_1} = 0$$

et nous obtenons $\alpha\omega_1^2 + \beta = 0$ en posant $\alpha = 4(R^2 - O_0P_1^2)$ et $\beta = \omega^2 (R^2 - O_0G^2)$. α est bien non nul puisque le point de contrôle P_1 n'appartient pas au cercle de centre O_0 et de rayon R .

De plus, $\alpha\beta < 0$ car le point de contrôle P_1 n'appartient pas au disque de centre O_0 et de rayon R tandis que G l'est : G est le barycentre des points pondérés (P_0, ω_0) et (P_2, ω_2) , ω_0 et ω_2 sont positifs donc $G \in [P_0P_2]$. Les racines du trinôme du second degré $\alpha\omega_1^2 + \beta = 0$ sont $\pm \sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}$.

■

Lorsque deux CBRQs modélisent un même arc de cercle (les points de contrôle sont évidemment les mêmes) les valeurs des poids n'interviennent que dans la vitesse de parcours des deux CBRQs.

Le théorème 4 donne les conditions sur le poids ω pour qu'une CBRQ sous forme quasi standard modélise un arc de cercle.

Théorème 4 : *Arc de cercle modélisé par une CBRQ quasi standard*

Soit P_0, P_1 et P_2 trois points non alignés du plan euclidien \mathcal{P} muni du repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) et I_1 le milieu du segment $[P_0P_2]$.

La CBRQ $\gamma = RQBC \{(P_0; P_1; P_2), \omega\}$ est un arc de cercle \mathcal{C} de centre O_0 et de rayon R définis par les points P_0, P_1 et P_2 , théorème 3, si et seulement si w vérifie l'équation :

$$|1 + \omega| R = |O_0I_1 + \omega O_0P_1| \tag{10}$$

1. La courbe γ correspond au plus petit arc de cercle si et seulement si ω vérifie :

$$\omega^+ = \frac{O_0I_1 - R}{R - O_0P_1} \quad (11)$$

2. La courbe γ correspond au plus grand arc de cercle si et seulement si w vérifie :

$$\omega^- = -\frac{O_0I_1 + R}{R + O_0P_1} \quad (12)$$

3. Les poids définis dans les formules (11) et (12) sont opposés c'est-à-dire qu'ils vérifient :

$$\omega^+ + \omega^- = 0 \quad (13)$$

Démonstrations : Nous allons utiliser les lemmes suivants.

Lemme 1 :

Soit $P_0P_1O_0$ un triangle rectangle en P_0 et I_1 le pied de la hauteur issue de P_0 . Nous avons alors la relation :

$$O_0P_0^2 = R^2 = O_0I_1 \times O_0P_1 \quad (14)$$

Lemme 2 :

Soit G le barycentre de deux points pondérés (A, a) et (B, b) avec $a > 0$, $b < 0$ et $|b| < a$.

Alors le point G appartient à la demi-droite $(AB) - [AB)$.

Démonstration du lemme 2 :

G est le barycentre de deux points pondérés (A, a) et (B, b) si et seulement si

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}.$$

$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \iff a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \iff (a + b)\overrightarrow{AG} = b\overrightarrow{AB}$. Comme nous avons $a > 0$, $b < 0$ et $|b| < a$, nous avons $a + b > 0$ et donc les vecteurs \overrightarrow{AG} et \overrightarrow{AB} sont de sens contraires donc le point G appartient à la demi-droite $(AB) - [AB)$.

■

Démonstration du théorème 4 :

$\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ appartient au cercle \mathcal{C} , $B_0\left(\frac{1}{2}\right) = B_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ et $B_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

$$B_0\left(\frac{1}{2}\right) + \omega B_1\left(\frac{1}{2}\right) + B_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}(1 + \omega)$$

I_1 est le milieu du segment $[P_0P_2]$ donc pour tout point O , nous avons :

$$2\overrightarrow{OI_1} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{OP_2}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{O\gamma\left(\frac{1}{2}\right)} &= \frac{2}{1+\omega} \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{OP_0} + \frac{\omega}{2}\overrightarrow{OP_1} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OP_2} \right) \\
&= \frac{2}{1+\omega} \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OI_1} + \frac{\omega}{2}\overrightarrow{OP_1} \right) \\
&= \frac{1}{1+\omega} \left(\overrightarrow{OI_1} + \omega\overrightarrow{OP_1} \right)
\end{aligned}$$

La définition vectorielle d'une courbe de Bézier rationnelle ne dépend pas du point O choisi, nous prenons donc O au centre du cercle O_0 et nous obtenons la relation :

$$\overrightarrow{O_0\gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{1+\omega} \left(\overrightarrow{O_0I_1} + \omega\overrightarrow{O_0P_1} \right) \quad (15)$$

I_1 appartient au segment $[O_0P_1]$, figure 1, donc nous avons la relation :

$$\overrightarrow{O_0P_1} = \frac{O_0P_1}{O_0I_1} \overrightarrow{O_0I_1} \quad (16)$$

En combinant les formules (15) et (16), nous avons la relation :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{O_0\gamma\left(\frac{1}{2}\right)} &= \frac{1}{1+\omega} \left(\overrightarrow{O_0I_1} + \omega \frac{O_0P_1}{O_0I_1} \overrightarrow{O_0I_1} \right) \\
&= \left(\frac{1}{1+\omega} \times \frac{O_0I_1 + \omega O_0P_1}{O_0I_1} \right) \overrightarrow{O_0I_1}
\end{aligned} \quad (17)$$

Nous déduisons alors la relation (18) puis la relation (19) après le passage aux normes et le fait que $\frac{\|O_0I_1\|}{O_0I_1} = 1$.

$$(1+\omega) \overrightarrow{O_0\gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{O_0I_1 + \omega O_0P_1}{O_0I_1} \overrightarrow{O_0I_1} \quad (18)$$

$$|1+\omega| \left\| \overrightarrow{O_0\gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \right\| = |O_0I_1 + \omega O_0P_1| \quad (19)$$

Le point $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ appartient au cercle de centre O_0 et de rayon R si et seulement si $O_0\gamma\left(\frac{1}{2}\right) = R$. Le scalaire ω est donc solution de l'équation :

$$|1+\omega| R = |O_0I_1 + \omega O_0P_1| \quad (20)$$

1. Nous nous plaçons dans le cas où $(1+\omega) R = O_0I_1 + \omega O_0P_1$.

$$\begin{aligned}
(1+\omega) R = O_0I_1 + \omega O_0P_1 &\iff R + \omega R = O_0I_1 + \omega O_0P_1 \\
&\iff \omega (O_0P_1 - R) = R - O_0I_1.
\end{aligned}$$

P_1 n'appartient pas au cercle de centre O_0 et de rayon R donc $O_0P_1 - R \neq 0$.

Il vient :

$$\omega = \frac{R - O_0I_1}{O_0P_1 - R} = \frac{O_0I_1 - R}{R - O_0P_1} \quad (21)$$

Montrons que ω appartient à $]0; 1[$ et nous le noterons ω^+ .

Comme I_1 est le milieu de la corde $[P_0P_2]$ du cercle de centre O_0 et de rayon R , nous avons $O_0I_1 < R$ c'est-à-dire $R - O_0I_1 > 0$.

Nous avons aussi $O_0P_1 > R$ c'est-à-dire $O_0P_1 - R > 0$.

Nous avons bien $\omega^+ > 0$.

Montrons que : $\omega^+ < 1$.

$$\begin{aligned}\omega^+ < 1 &\iff \frac{R - O_0I_1}{O_0P_1 - R} < 1 \\ &\iff R - O_0I_1 < O_0P_1 - R \text{ (car } O_0P_1 - R > 0)\end{aligned}$$

donc :

$$\omega^+ < 1 \iff O_0P_1 > 2R - O_0I_1$$

Par construction, le triangle $P_0P_1O_0$ est rectangle en P_0 , $R = O_0P_0$ et I_1 est le pied de la hauteur issue de P_0 , figure 1. En appliquant la propriété de la hauteur dans le triangle $P_0P_1O_0$, lemme 1, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}O_0P_1 > 2R - O_0I_1 &\iff O_0I_1 \times O_0P_1 > O_0I_1 \times (2R - O_0I_1) \\ &\iff R^2 > 2R \times O_0I_1 - O_0I_1^2 \\ &\iff R^2 > 2R \times O_0I_1 - O_0I_1^2 \\ &\iff R^2 - 2R \times O_0I_1 + O_0I_1^2 > 0 \\ &\iff (R - O_0I_1)^2 > 0.\end{aligned}$$

Ceci est toujours vrai puisque I_1 est sur une corde du cercle de centre O_0 et de rayon R donc :

nous avons bien $\omega^+ < 1$.

L'inégalité $\omega^+ > 0$ implique $1 + \omega^+ > 0$ et $O_0I_1 + \omega^+O_0P_1 > 0$. A partir de la relation (18), nous déduisons que les vecteurs $\overrightarrow{O_0\gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$ et $\overrightarrow{O_0I_1}$ sont de même sens donc $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ appartient au petit arc de cercle.

2. Nous nous plaçons dans le cas où $-(1 + \omega)R = O_0I_1 + \omega O_0P_1$.

$$\begin{aligned}-(1 + \omega)R = O_0I_1 + \omega O_0P_1 &\iff -R - \omega R = O_0I_1 + \omega O_0P_1 \\ &\iff -\omega(R + O_0P_1) = R + O_0I_1\end{aligned}$$

donc :

$$\omega = -\frac{R + O_0I_1}{R + O_0P_1} \tag{22}$$

ce qui implique $\omega < 0$.

$$|\omega| < 1 \iff \frac{R + O_0I_1}{R + O_0P_1} < 1 \iff R + O_0I_1 < R + O_0P_1 \iff O_0I_1 < O_0P_1$$

Ceci est toujours vrai puisque I_1 est le milieu de la corde $[P_0P_2]$ d'où $-1 < \omega < 0$ et nous le noterons ω^- . A partir de la relation (15), nous déduisons que $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ est le barycentre des points pondérés $(I_1, 1)$ et (P_1, ω^-) . En appliquant le lemme 2, $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ n'appartient pas à la demi-droite $[I_1P_1)$ donc il appartient au grand arc de cercle.

3. Calculons $\omega^+ + \omega^-$.

$$\begin{aligned}
\frac{R - O_0I_1}{O_0P_1 - R} - \frac{R + O_0I_1}{R + O_0P_1} &= \frac{(R - O_0I_1)(R + O_0P_1) + (R + O_0I_1)(R - O_0P_1)}{O_0P_1^2 - R^2} \\
&= \frac{R^2 + R \times O_0P_1 - R \times O_0I_1 - O_0P_1 \times O_0I_1 + R^2}{O_0P_1^2 - R^2} \\
&\quad + \frac{-R \times O_0P_1 + R \times O_0I_1 - O_0P_1 \times O_0I_1}{O_0P_1^2 - R^2} \\
&= \frac{2R^2 - 2O_0P_1 \times O_0I_1}{O_0P_1^2 - R^2} \\
&= 2 \frac{O_0P_0^2 - O_0P_1 \times O_0I_1}{O_0P_1^2 - R^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

d'après le lemme 1.

■

Il est possible de montrer [Gar07] que nous avons aussi :

$$\omega^+ = \cos \left(\widehat{P_0P_1; P_0P_2} \right) = \frac{\overrightarrow{P_0P_1} \bullet \overrightarrow{P_0P_2}}{P_0P_1 \times P_0P_2} = -\omega^- \quad (23)$$

Exemple 1 :

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan affine euclidien \mathcal{P} . Considérons les points $P_0 = (1; 0)$, $P_1 = (1; 1)$ et $P_2 = (0; 1)$.

1. Déterminer le poids ω pour que le cercle de centre O et de rayon 1 soit modélisé par l'union de deux courbes de Bézier rationnelles quadratiques quasi standard γ^+ et γ^- de points de contrôle respectifs $(P_0; 1)$, $(P_1; \omega)$ et $(P_2; 1)$ d'une part, $(P_0; 1)$, $(P_1; -\omega)$ et $(P_2; 1)$ d'autre part, figure 2.
2. Déterminer le poids ω_1 pour que l'arc de cercle de centre O et de rayon 1 situé dans le premier quadrant soit modélisé par une courbe de Bézier rationnelle quadratique γ_1 de points de contrôle $(P_0; 1)$, $(P_1; \omega_1)$ et $(P_2; 2)$

★

1. Nous avons $\overrightarrow{P_1O} = (-1; -1)$. Soit I le milieu du segment $[P_0P_2]$. Ainsi, $I \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right)$ et $\overrightarrow{P_1I} = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right)$. Il reste à calculer le scalaire t_0 , formule (4).
 $\overrightarrow{P_0P_1} = (0; 1)$ donc $\overrightarrow{P_0P_1}^2 = 1$. $\overrightarrow{I_1P_1} \bullet \overrightarrow{P_0P_1} = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$ donc $t_0 = 2$ et nous avons bien $\overrightarrow{P_1O} = 2\overrightarrow{P_1I}$ c'est-à-dire que les conditions géométriques sont vérifiées. Il reste à calculer le poids ω , formule (23). $\overrightarrow{P_0P_2} = (-1; 1)$ d'où :

$$\omega = \frac{\overrightarrow{P_0P_1} \bullet \overrightarrow{P_0P_2}}{P_0P_1 \times P_0P_2} = \frac{0 \times -1 + 1 \times 1}{1 \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (24)$$

γ^+ est la CBRQ de points de contrôle $(P_0; 1)$, $\left(P_1; \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ et $(P_2; 1)$.

γ^- est la CBRQ de points de contrôle $(P_0; 1)$, $\left(P_1; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ et $(P_2; 1)$.

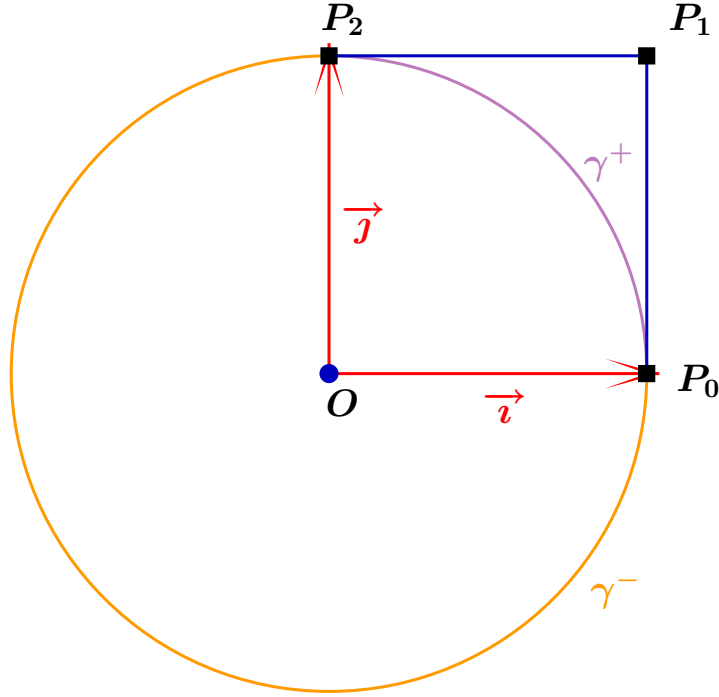


FIG. 2 – Cercle modélisé par l’union de deux courbes de Bézier rationnelles quadratiques γ^+ et γ^- .

2. Naturellement, d’après la question 1, les conditions géométriques concernant les points O , P_0 , P_1 et P_2 sont vérifiées et le seul travail à réaliser est le calcul du poids ω_1 en utilisant la formule (9).

Nous avons $\omega = 3$ et $G \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ d’où :

$$\alpha = 4 (R^2 - O_0P_1^2) = 4 (1 - 2) = -4$$

$$\beta = w^2 (R^2 - O_0G^2) = 9 \left(1 - \frac{5}{9}\right) = 4$$

d’où :

$$w_1 = \sqrt{-\frac{4}{-4}} = 1$$

γ_1 est la CBRQ de points de contrôle $(P_0; 1)$, $(P_1; 1)$ et $(P_2; 2)$.

3 Modélisation fractale d’un arc de cercle

En nous basant sur l’algorithme 2 paru dans *la feuille de vigne* numéro 113 de septembre 2009, permettant de modéliser de façon fractale un arc de parabole, nous proposons un algorithme permettant de modéliser de façon fractale un arc de cercle, algorithme 1. Cet algorithme repose sur la modélisation d’un arc de cercle en utilisant une CBRQ sous forme standard.

Algorithme 1 : Construction fractale d'un arc de cercle.

Entrée : Soit P_0, P_1 et P_2 trois points non alignés de \mathcal{P} tel que $P_0P_1 = P_2P_1$.

Soit $\omega = \cos \left(\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2} \right)$.

Procédure $\text{FractCercle}(P_0, P_1, P_2, \omega)$

1. Soit $N_1 = \text{bar} \{(P_0; 1); (P_1; \omega)\}$.
2. Soit $N_2 = \text{bar} \{(P_2; 1); (P_1; \omega)\}$.
3. Soit N_3 le milieu du segment $[N_1N_2]$.
4. $\omega = \sqrt{\frac{1 + \omega}{2}}$.
5. $\text{FractCercle}(P_0, N_1, N_3, \omega)$.
6. $\text{FractCercle}(N_3, N_2, P_2, \omega)$.

Sortie : un arc de cercle défini de façon fractale par les extrémités P_0, P_2 de l'arc et les tangentes (P_0P_1) et (P_2P_1) à l'arc.

L'algorithme 1 est récursif et son exécution induit la construction d'un arbre binaire (chaque nœud a deux branches).

La figure 3 illustre les éléments de l'algorithme 1.

Nous allons montrer que cet algorithme construit bien des points de l'arc de cercle souhaité en quatre étapes :

(Etape 1) : montrer que le point N_3 est bien sur l'arc de cercle ;

(Etape 2) : montrer que la droite (N_1N_2) est tangente au cercle en N_3 ;

(Etape 3) : montrer que les triangles $P_0N_1N_3$ et $N_3N_2P_2$ sont isocèles en N_1 et N_2 ;

(Etape 4) : montrer que le nouveau calcul de ω est le bon.

Etape 1.

Montrons que le point N_3 de cet algorithme est bien un point du cercle.

Soit $\gamma = RQBC \{(P_0; P_1; P_2), \omega\}$ l'arc de cercle \mathcal{C} , de centre O_0 , d'extrémités P_0 et P_2 ayant pour tangentes les droites (P_0P_1) et (P_2P_1) . D'après les points 1 et 2 de l'algorithme 1, nous avons pour tout point O :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ON_1} &= \frac{1}{1 + \omega} \left(\overrightarrow{OP_0} + \omega \overrightarrow{OP_1} \right) \\ \overrightarrow{ON_2} &= \frac{1}{\omega + 1} \left(\omega \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} \right)\end{aligned}\tag{25}$$

et d'après le point 2 de l'algorithme 1, nous avons pour tout point O :

$$\overrightarrow{ON_1} + \overrightarrow{ON_2} = 2\overrightarrow{ON_3}\tag{26}$$

et en remplaçant dans la formule (26), les expressions données dans la formule (25), nous obtenons :

$$2\overrightarrow{ON_3} = \frac{1}{1 + \omega} \left(\overrightarrow{OP_0} + 2\omega \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} \right)$$

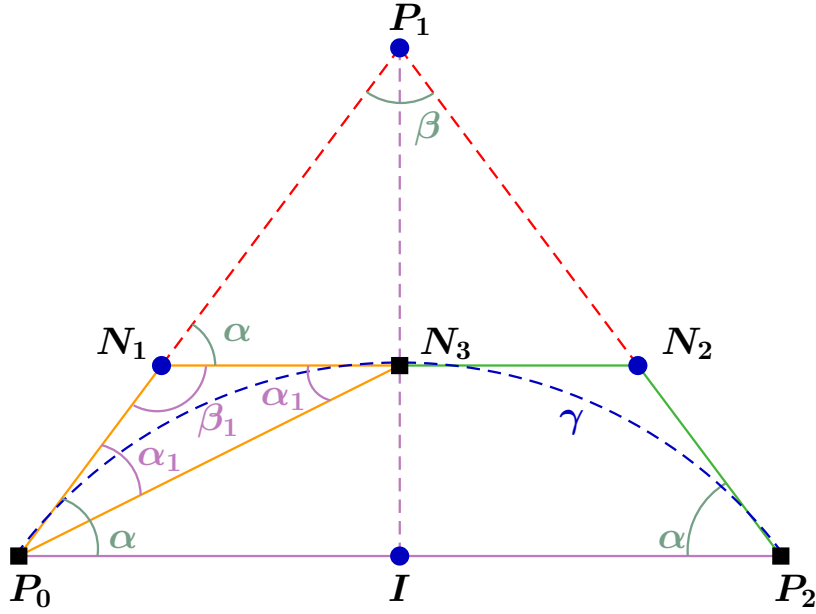


FIG. 3 – Principe de la construction fractale d'un arc de cercle.

ce qui conduit à :

$$\overrightarrow{ON_3} = \frac{1}{1 + 2\omega + 1} \left(\overrightarrow{OP_0} + 2\omega \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} \right)$$

que nous mettons sous la forme :

$$\overrightarrow{ON_3} = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{OP_0} + \frac{1}{2}\omega \overrightarrow{OP_1} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OP_2} \right) = \overrightarrow{O\gamma} \left(\frac{1}{2} \right)$$

ce qui prouve que **le point N_3 est un point du cercle C .**

Comme γ est sous forme standard, le point N_3 appartient à la médiatrice du segment $[P_0P_2]$ c'est-à-dire que les points P_1 , N_3 et O_0 sont alignés et **les droites (O_0N_3) et (P_0P_2) sont perpendiculaires.**

Etape 2.

Du fait que la géométrie projective conserve les incidences, la droite (N_1N_2) est tangente au cercle au point N_3 . Cependant, en restant dans le contexte de la géométrie affine, d'après la formule (25), nous avons :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1N_1} &= \frac{1}{1 + \omega} \overrightarrow{P_1P_0} \\ \overrightarrow{P_1N_2} &= \frac{1}{\omega + 1} \overrightarrow{P_1P_2} \end{aligned} \tag{27}$$

et en considérant l'homothétie \mathcal{H} de centre P_1 et de rapport $\frac{1}{1+\omega}$, la droite (N_1N_2) , contenant le point N_3 , est l'image de la droite (P_0P_2) par cette homothétie \mathcal{H} . ces deux droites étant parallèles, la droite (P_0P_2) étant perpendiculaire à la droite

(O_0N_3) , nous en déduisons que les droites (N_1N_3) et (O_0N_3) sont perpendiculaires ce qui prouve que la droite (N_1N_2) est tangente au cercle au point N_3 , figure 3.

Etape 3.

Etant donné que la construction est symétrique par rapport à la droite (O_0P_1) , pour pouvoir ré-itérer le processus, il suffit de montrer que nous avons :

$$P_0N_1 = N_1N_3 \quad (28)$$

Nous savons que la droite (N_1N_2) est tangente au cercle au point N_3 et que la droite (N_1P_0) est tangente au cercle au point P_0 donc N_1 appartient à la médiatrice du segment $[P_0N_3]$ **ce qui prouve la formule (28).**

Etape 4.

Afin d'améliorer la rapidité de l'algorithme 1, déterminons une relation simple entre le poids ω dans le triangle $P_0P_1P_2$ isocèle en P_1 et le poids ω_1 dans le triangle $P_0N_1N_3$ isocèle en N_1 . En ne considérant que des angles géométriques, nous avons :

$$\beta_1 = 180^\circ - 2\alpha_1$$

et le point N_1 appartenant au segment $[P_1P_0]$, nous avons :

$$\alpha + \beta_1 = 180^\circ$$

d'où :

$$\alpha = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha_1) = 2\alpha_1$$

Comme $\omega = \cos \alpha$ et $\omega_1 = \cos \alpha_1$, la relation :

$$\cos \alpha_1 = \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

conduit à :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1 + \omega}{2}}$$

La figure 4 montre un déroulement de profondeur 2 de l'algorithme 1. Nous partons d'un triangle $P_0P_1P_2$ isocèle en P_1 . Le premier niveau va construire les points N_1 et N_2 , étapes 1 et 2 de l'algorithme 1, puis le point N_3 de l'arc de cercle, étape 3 de l'algorithme 1. La valeur ω du poids est alors recalculée, étape 4 de l'algorithme 1. La première (resp. deuxième) partie du second niveau va construire les points N_4^a et N_5^a (resp. N_4^b et N_5^b), étapes 1 et 2 de l'algorithme 1, puis le point N_6^a (resp. N_6^b) de l'arc de cercle, étape 3 de l'algorithme 1.

Dans l'algorithme 1, nous avons pris le poids ω positif ce qui permet d'obtenir le petit arc de cercle. Que se passe-t-il si nous prenons une valeur négative pour le poids ω (c'est-à-dire que nous travaillons sur le grand arc de cercle) ?

Le poids n'intervient pas dans les trois premières étapes, ces dernières sont donc encore valides. Il reste donc à considérer l'étape 4, figure 5. Nous avons :

$$\omega = -\cos \left(\widehat{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}} \right) = -\cos \alpha$$

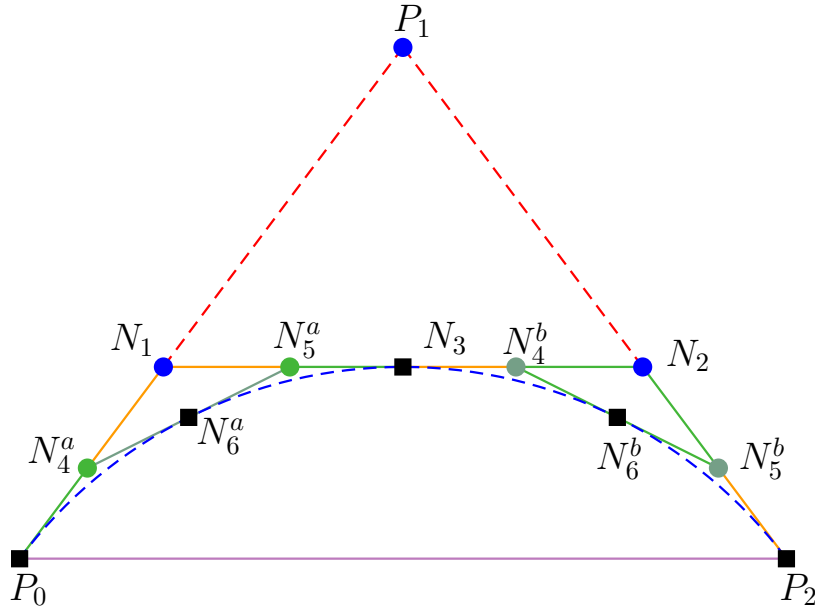


FIG. 4 – Déroulement de l’algorithme sur une profondeur de 2.

d’une part, $2\alpha_1 + \beta_1 = \pi$ et $\alpha = \beta$ d’autre part, figure 5, d’où :

$$\alpha_1 = \frac{\pi - \alpha}{2}$$

d’où :

$$\cos \alpha_1 = \cos \left(\frac{\pi - \alpha}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(\pi - \alpha)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}$$

ce qui conduit à :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1 + \omega}{2}}$$

et l’étape 4 de l’algorithme 1 est encore valide.

Remarquons qu’à partir de la seconde étape, tous les poids calculés sont positifs (i.e. $-1 < \omega \Rightarrow 1 + \omega > 0$) c’est-à-dire que se donner un poids initial négatif permet de construire trois arcs de cercles décrivant totalement le cercle et modélisés par trois CBRQs, sous forme standard (i.e. tous les poids sont positifs), de points de contrôle pondérés :

- $(P_0; 1)$, $(P_1; -\omega)$ et $(P_2; 1)$;
- $(P_0; 1)$, $(N_1; \omega_1)$ et $(N_3; 1)$;
- $(N_3; 1)$, $(N_2; \omega_1)$ et $(P_2; 1)$.

Déroulons l’algorithme 1, sur une profondeur de 2, sur la courbe donnée à la question 1 de l’exemple 1 : γ^- est la courbe de Bézier rationnelle quadratique de points de contrôle $(P_0; 1)$, $(P_1; -\frac{\sqrt{2}}{2})$ et $(P_2; 1)$, figure 5.

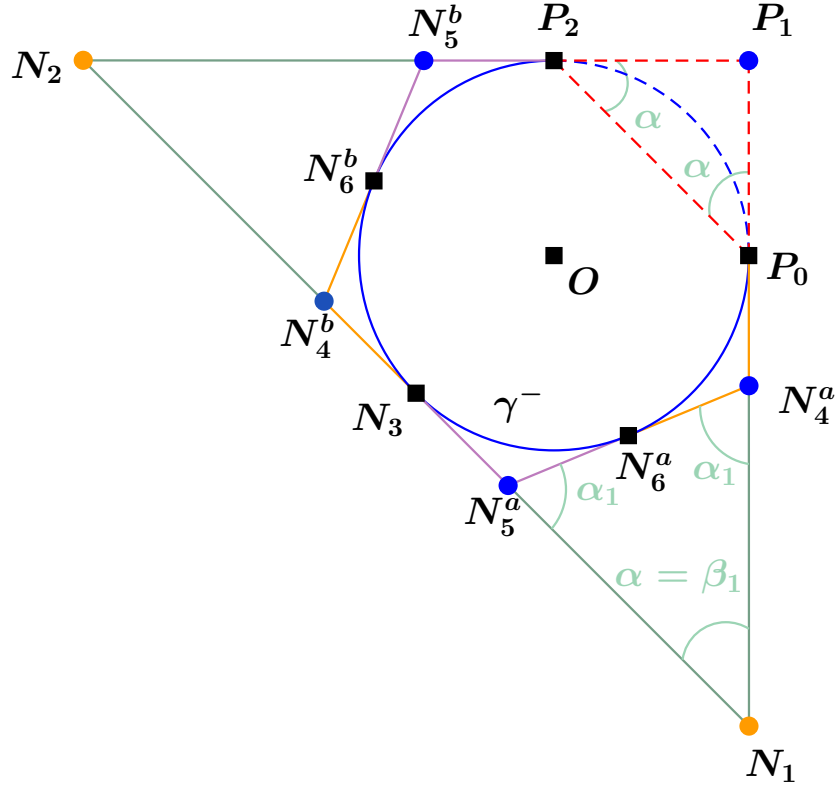


FIG. 5 – Construction fractale d'un arc de cercle à partir d'un poids négatif.

Nous avons $N_1 = \text{bar} \left\{ (P_0; 1); \left(P_1; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}$ d'où :

$$\overrightarrow{P_1 N_1} = \frac{2}{2 - \sqrt{2}} \overrightarrow{P_1 P_0} = \frac{2(2 + \sqrt{2})}{4 - 2} \overrightarrow{P_1 P_0} = (2 + \sqrt{2}) \overrightarrow{P_1 P_0} = -(2 + \sqrt{2}) \vec{j}$$

et nous obtenons :

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ -2,414 \end{pmatrix}$$

et nous obtiendrions de même :

$$N_2 = \begin{pmatrix} -1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -2,414 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui conduit à :

$$N_3 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

et :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} \simeq 0,383$$

Les coordonnées des points calculés lors de l'étape suivante sont données dans le tableau 1. Les points en gras sont des points du cercle.

Nom	Coordonnées exactes	Coordonnées approchées
N_4^a	$\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}-1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -0,668 \end{pmatrix}$
N_5^a	$\begin{pmatrix} -1+\sqrt{2-\sqrt{2}} \\ -\sqrt{2-\sqrt{2}}+1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0,235 \\ -1,180 \end{pmatrix}$
N_6^a	$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ -\frac{1+\sqrt{2}}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathbf{0,383} \\ \mathbf{-0,924} \end{pmatrix}$
N_4^b	$\begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}-1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0,668 \\ 1 \end{pmatrix}$
N_5^b	$\begin{pmatrix} -\sqrt{2-\sqrt{2}}+1-\sqrt{2} \\ -1+\sqrt{2-\sqrt{2}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1,180 \\ -0,235 \end{pmatrix}$
N_6^b	$\begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{2}}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathbf{-0,924} \\ \mathbf{0,383} \end{pmatrix}$

TAB. 1 – Coordonnées des points calculés lors de la seconde étape du déroulement de l’algorithme 1.

Références

- [FJ89] J.C. Fiorot and P. Jeannin. *Courbes et surfaces rationnelles*, volume RMA 12. Masson, 1989.
- [Gar07] L. Garnier. *Mathématiques pour la modélisation géométrique, la représentation 3D et la synthèse d’images*. Ellipses, 2007. ISBN : 978-2-7298-3412-8.

MISE EN PAGE :
Françoise BESSE

COMITE DE REDACTION ET DE LECTURE :
Michel LAFOND
Alain MASCRET
Marie-Noëlle RACINE

REDACTEUR EN CHEF :
Catherine LABRUIERE CHAZAL

DIRECTEUR DE LA PUBLICATION :
Catherine LABRUIERE CHAZAL, Directrice de l'IREM

DÉPÔT LÉGAL :
n° 191 - 2^e semestre 2009

IMPRESSION :
Service Reprographie

FEUILLE DE VIGNE

Université de Bourgogne - UFR Sciences et Techniques

IREM

9 Avenue Alain Savary - BP 47870 - 21078 Dijon cedex

☎ 03 80 39 52 30 - Fax 03 80 39 52 39

@ : iremsecr@u-bourgogne.fr.

<http://math.u-bourgogne.fr/IREM>