N° 124 – Juin 2012

Feuille de Vigne

Irem de Dijon

- ✓ Éclipses de Soleil
- ✓ Maths et musée
- ✓ Géométrie sur une image
- ✓ Le problème des anniversaires

Revue Trimestrielle

Issn 0246-5752

Sommaire

Éditorial

"Et l'édito, qui est-ce qui s'y colle ?", petite phrase qui se baladait dans l'air chaud de l'Irem. Quelle ballade !

Comme souvent dans ce cas là, les paires d'yeux présents s'égarent … Qui vers le plafond, qui – fixement – vers une affiche, qui encore vers … une introspection intérieure fort à propos. Remarquez le choix des mots, il ne s'agit pas de regards fuyants.
Hasardeux, vous passez par là … Proies et prédateurs, vous connaissez ? Les regards vous repèrent, ils s'accrochent, ne vous lâchent plus, des regards prenant des allures de lasers perçants, capables de faire fondre toutes les résistances. La vôtre en particulier.

Et voilà, vous êtes l'élu, sans vote ni urne, mais unanimement et dans le meilleur des consensus, élu pour présenter le contenu d'une Feuille de Vigne, ce fruit du travail de plusieurs collègues, important, forcément.

Dans son livre (1960) "Mathematics in the making[1]", Lancelot Hogben, faisant œuvre de vulgarisateur, notait que "l'histoire des découvertes mathématiques est […] plus humaine que ne l'admettent certains commentateurs […]", et il semblait regretter que "l'enseignement […] en classe ne permît en aucune façon de découvrir comment les besoins matériels et le climat intellectuel des premiers âges ont façonné cette science".
Zoologiste et généticien, Hogben n'était pas tendre avec les enseignants de mathématiques, "personnes qui mettent l'intellect avant l'estomac, […] rebut[ant] ainsi ceux, sains, pour qui les symboles ne sont que les outils d'une expérience sociale organisée et attir[ant] ceux qui se servent des symboles pour échapper à notre monde complexe où les hommes se battent pour une petite lueur de vérité, et pour se réfugier dans un monde « réel » où la vérité semble aller de soi".
Mots cruels mais que les mathématiciens ont su pardonner, tant Hogben sut déployer de talents[2] à faire apprécier les mathématiques. C'est bien connu : quelqu'un qui aime le rugby ne peut pas être vraiment mauvais.

Il reste que ces propos sont à la fois d'une étonnante modernité et d'une impressionnante justesse : les concepts mathématiques répondent d'abord à des besoins et des questionnements sociaux d'époque (évolutifs avec les sociétés), ils sont, dans ce sens, utilitaires, et l'enseignement l'a oublié en occultant les situations aux sources des notions et en usant et abusant surtout de manipulations de symboles insensés.

Je pense que Hogben aurait apprécié cette Feuille de Vigne : l'astronomie y est présentée comme un possible terrain d'investigations (air du temps oblige !) soit au sujet des éclipses, ou lors d'une visite d'un musée, ou encore lors de la réalisation en maquette du système solaire. Il n'aurait pas moins aimé l'expérimental des dates d'anniversaire.
Toi aussi, lecteur, à n'en pas douter.
Les jeux et problèmes sont toujours du plaisir, dédié.

Et puis, qui écrit un "édito" peut s'autoriser une certaine liberté, pas seulement de ton, dans les limites d'une bienséance bien comprise, évidemment.
Je profite donc de l'occasion, avant son départ prochain – en tous cas avant mon prochain édito – pour remercier Françoise Besse de ce qu'elle a fait durant les années qu'elle a passées à l'Irem de Dijon. Depuis la création d'icelui en 1974.
Stagiaires, formateurs, animateurs, directeurs, tous, nous avons apprécié son professionnalisme, sa constante disponibilité et sa réelle et profonde gentillesse, et je suis sûr que tous se joignent à l'auteur de ces quelques lignes pour lui souhaiter "bon vent", où que ce soit.

Michel Bridenne

[1] Bizarrement traduit en "L'univers des nombres". Le titre français focalise sur les objets "nombres", statiques, alors que le titre original insiste sur l'idée d'une "construction par l'action". On dépasse le faux sens : c'est un monde qui sépare ces deux titres, et ça frise la trahison.
[2] *Mathematics for the Million* (1936) et *Science for the Citizen* (1938) (Traductions en français : *Les mathématiques pour tous*, Payot, 1946 ; *La science pour tous*, Payot, 1946)

Jeux et Problèmes

Michel LAFOND
mlafond001@yahoo.fr

JEU – 74.

Il est assez facile de partager un carré en un nombre fini de triangles rectangles isocèles tous inégaux en tailles.
Il est plus difficile de partager un carré en un nombre fini de triangles rectangles isocèles tous inégaux en tailles si <u>on interdit le tracé d’une diagonale du carré</u>.
Saurez-vous résoudre ces deux énigmes ?

PROBLÈME – 74.

Quelle est la particularité de la courbe de représentation paramétrique :

$$x(t) = 10 \cos^6(t) - 15 \cos^8(t) + 6 \cos^{10}(t)$$
$$y(t) = 10 \sin^6(t) - 15 \sin^8(t) + 6 \sin^{10}(t)$$

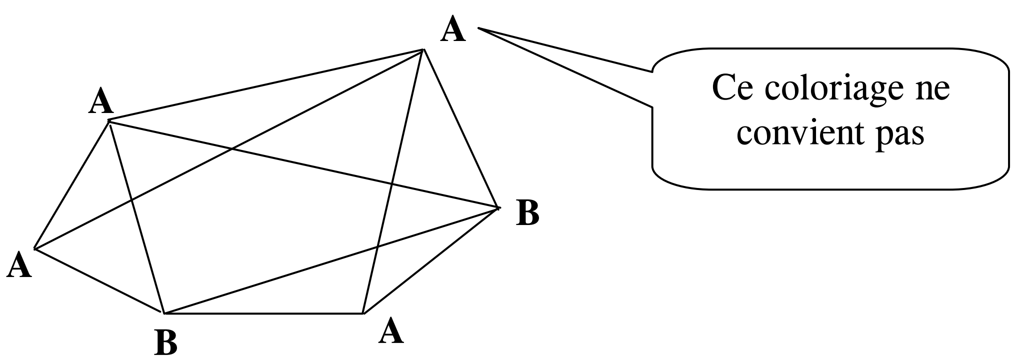
si $t \in [0 , \pi/2]$?

Solutions

JEU – 73.

Étant donné un graphe simple, connexe, montrer qu’on peut colorer ses sommets avec deux couleurs A, B de telle sorte que tout sommet coloré A possède une majorité* de sommets voisins colorés B et réciproquement.

* Majorité signifie ici au moins 50 %.



Solution :

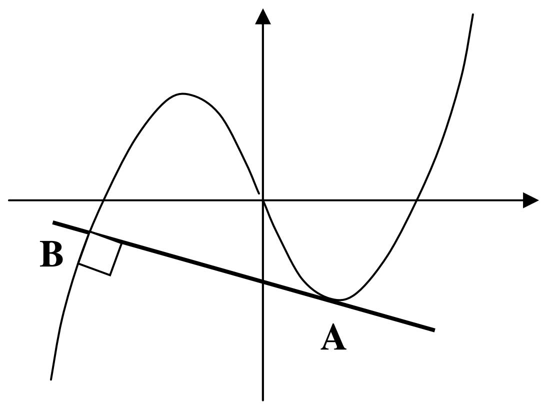
Parmi tous les coloriages possibles, soit G un de ceux qui <u>maximise</u> le nombre d'arêtes colorées (A---B).
Supposons que G ne vérifie pas la propriété voulue, et par exemple qu'un sommet S coloré A a une majorité de voisins colorés A.
Alors le graphe G' obtenu en colorant le sommet S avec B au lieu de A aurait un nombre d'arêtes colorées (A---B) supérieur à celui de G. Il y a contradiction, donc G vérifie la propriété voulue.

PROBLEME – 73

Dans un repère orthonormé, est-ce que la cubique d'équation $y = x^3 - x$ possède une tangente-normale ?

Voir le schéma ci-contre montrant une tangente-normale.

Ce schéma est peut-être faux !



Solution :

Supposons que la tangente (T) en A à la courbe (C) soit aussi normale en B.
A a pour coordonnées $(a, a^3 - a = y_A)$.
Notons $y'_A = 3\,a^2 - 1$ la dérivée en A.
(T) a pour équation $y = y'_A\,(x - a) + y_A$ de coefficient directeur $y'_A = 3\,a^2 - 1$.

Si dans le système formé des équations de (C) et de (T), on élimine y, on obtient l'équation aux abscisses $x^3 - x = (3\,a^2 - 1)(x - a) + a^3 - a$ qui s'ordonne en
$x^3 - 3\,a^2\,x + 2a^3 = 0$ (1) dont la racine double $x = a$ est connue.

Par suite, (1) équivaut à $(x - a)^2\,(x + 2a) = 0$ donc le point B a pour abscisse $-2\,a$.

En B, le coefficient directeur de la tangente à (C) est $\beta = 3\,(-2a)^2 - 1$.
Comme le repère est orthonormé, (T) est normale en B à (C) si et seulement si le produit des deux coefficients directeurs $\beta\,y'_A$ est égal à -1.

Or $\beta\,y'_A = -1$ équivaut à $(12a^2 - 1)\,(3\,a^2 - 1) = -1$ soit $36\,a^4 - 15\,a^2 + 2 = 0$

qui n'a pas de solution réelle puisque $36\,a^4 - 15\,a^2 + 2 = \left(6a^2 - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}$.

Cette cubique n'a pas de tangente-normale.

Rectificatif

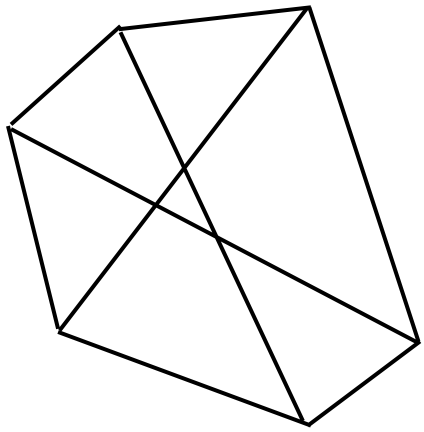
Dans la feuille de vigne précédente, une figure fausse rendait la solution du JEU - 72 incorrecte. De plus la participation de Richard Beczkowski (qui a aussi résolu le problème 72) avait été omise.
Voici le corrigé :

JEU – 72.

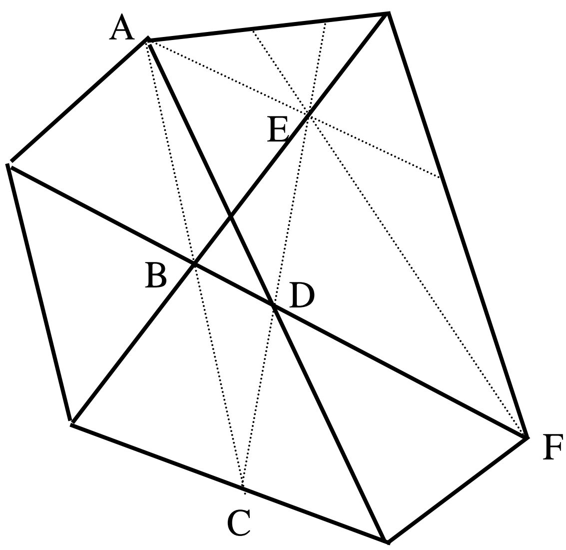
Dans l'hexagone quelconque H ci-contre, 3 diagonales sont tracées.

Elles partagent H en 7 parties (4 triangles et 3 quadrilatères).

Il s'agit de rajouter un nombre fini de sécantes (segments joignant deux points du bord de H) de telle sorte que toutes les parties soient des triangles.
Autrement dit, il faut éliminer les quadrilatères.



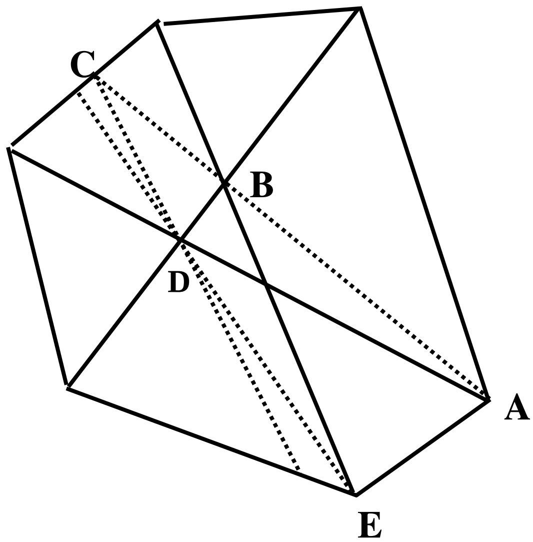
Richard Beczkowski donne deux solutions.
Certaines solutions fonctionnent pour certains hexagones et pas pour d'autres :



Pour l’hexagone proposé, 4 sécantes suffisent. On trace AB qui donne C. Puis CD qui donne E. Il reste deux quadrilatères qu’on élimine en traçant AE et FE.

Par contre :
Trois sécantes suffisent avec l’hexagone ci-dessous : On trace AB, qui donne C, puis on trace CD. Il reste un seul quadrilatère qu’on élimine en traçant ED.

Je pense qu’on peut réaliser une telle triangulation à partir d’un polygone convexe quelconque.



Éclipses de Soleil

Pierre CAUSERET, Math et astronomie

Cet article, paru dans la Feuille de Vigne n° 68 (février 1998), a été actualisé par Julien Lyotard et Pierre Causeret.

Résumé : De l'astronomie à mathématiques appliquées, il n'y a qu'un petit pas que l'auteur franchit allègrement avec cette présentation sur les éclipses.

Mots clés : Thalès, Éclipse, Géométrie, Astronomie

Le 26 février dernier, une éclipse totale de Soleil était visible depuis la Guadeloupe. Le 11 août 1999, une autre éclipse totale de Soleil sera observable depuis la France métropolitaine cette fois, sur une ligne passant par Fécamp, Reims, Metz... À Dijon, elle ne sera que partielle, mais la Lune cachera quand même près de 96 % de notre Soleil au moment du maximum à 10 h 27 TU. Il faudra ensuite attendre le 31 mai 2003 pour voir une éclipse partielle en France. Et Dijon aura droit à une éclipse totale de Soleil le 3 septembre 2081.

Ces éclipses peuvent donner lieu à de nombreux exercices de math à différents niveau. Il est simple de calculer à quelle distance mettre la Lune pour que celle-ci cache exactement le Soleil mais il est beaucoup plus complexe de calculer la durée d'une éclipse.

Éclipse totale de Soleil (photo AJ)

Éclipse annulaire de Soleil (photo AL/SAB)

Éclipse partielle de Soleil (photo PC/SAB)

Je vous propose ici un premier exercice d'application simple de Thalès que j'ai déjà donné à des troisièmes, suivi de quelques variations.

Exercice n° 1

Données :

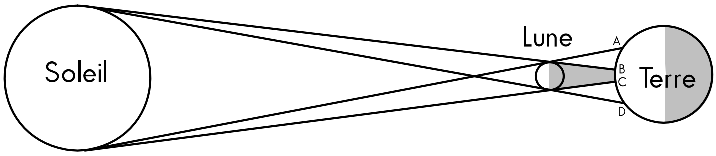
Rayon du Soleil r_s = 700 000 km — Distance moyenne Terre Soleil : 149 600 000 km

Rayon de la Lune r_L = 1 740 km — Distance moyenne Terre Lune : 384 400 km

Rayon de la Terre r_T = 6 370 km

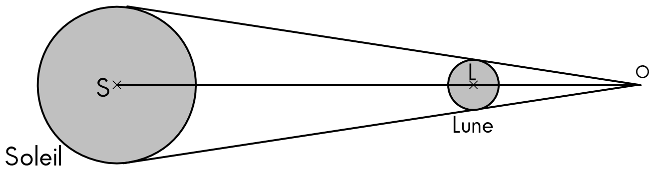
Principe d'une éclipse de Soleil

Les centres du Soleil, de la Lune et de la Terre sont alignés.



Pour un personnage situé sur Terre entre B et C, la Lune cache entièrement le Soleil : c'est une occultation de Soleil qu'on appelle aussi plus couramment (et improprement) éclipse totale de Soleil. Une personne située entre A et B ou entre C et D verra encore une partie du Soleil : c'est une éclipse partielle.

Éclipse totale



S et L sont les centres respectifs du Soleil et de la Lune. O représente ici l'observateur.

La distance de la Lune n'est pas constante. Elle varie de 360 000 km à 410 000 km environ.

Calculer à quelle distance il faudrait placer la Lune pour qu'elle cache exactement le Soleil (on prendra OS = 149 600 000 km).

Prochaines éclipses de Soleil

Les distances sont données entre le centre de la Lune et le centre de la Terre :

22 août 1998 (à observer depuis l'Indonésie) : la Lune sera distante de 394 000 km. Conclure.

11 août 1999 (à observer depuis la France) : la Lune sera distante de 373 000 km. Conclure.

Remarque : en réalité, la distance Terre-Soleil varie un peu et il faudrait en tenir compte pour plus de précision.

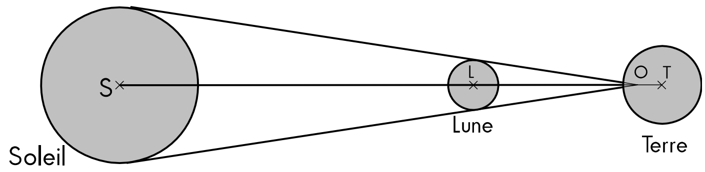
Solutions :

Pour que la Lune cache exactement le Soleil, on doit avoir : OL = 371 863 km (Thalès)

Le 22 août 1998, l'éclipse sera annulaire, la Lune étant trop éloignée, elle apparaîtra trop petite et on observera encore un anneau de lumière autour du Soleil au moment du maximum.

Le 11 août 1999, l'éclipse sera totale pour un observateur situé sur Terre non pas au centre mais à sa surface, du côté du Soleil évidemment. Sa distance à la Lune sera alors d'environ : 373 000 – 6 000= 367 000 km

Calculs un peu plus précis pour l'éclipse du 11 août 1999



S, L et T sont les centres respectifs du Soleil, de la Lune et de la Terre.
O est l'extrémité du cône d'ombre de la Lune. Il est représenté ici entre L et T mais il pourrait aussi être à droite du point T.

Éclipse de Soleil du 11 août 1999 (totale en France)
Distance Terre Soleil : TS = 151 630 000 km
Distance Terre Lune : TL = 373 000 km

Calculer OL et conclure.

Solutions
En écrivant le théorème de Thalès, on obtient une égalité avec 2 inconnues, OL et OS. Mais on peut calculer LS = TS–TL puis écrire OS = OL+LS. Il ne reste plus qu'une inconnue, OL. Des élèves de 3e ont généralement besoin d'un coup de pouce au départ pour y arriver.
On obtient OL = 373 000 km
Un observateur situé au centre de la face éclairée de la Terre sera distant du centre de la Lune de 367 000 km environ, donc l'éclipse sera bien totale.

Autre données
Vous pouvez vous amuser à refaire les calculs pour 2 autres éclipses avec les données suivantes :

- Éclipse de Soleil du 26 février 1998 (observée depuis la Guadeloupe)

Distance Terre Soleil : TS = 148 140 000 km
Distance Terre Lune : TL = 360 000 km

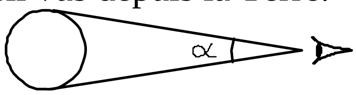
- Éclipse de Soleil du 22 août 1998 (à observer depuis l'Indonésie)

Distance Terre Soleil : TS = 151 320 000 km
Distance Terre Lune : TL = 394 000 km

Vous pouvez trouver les différentes données sur ces éclipses sur « Minitel 3616 BDL » (Faire 5 Ephémérides puis 2 Position apparente). On doit aussi les obtenir sur Internet à l'adresse du Bureau des Longitudes http://www.bdl.fr

Encore quelques calculs

On peut aborder ces éclipses sans Thalès mais uniquement en calculant les diamètres apparents de la Lune et du Soleil vus depuis la Terre.



On appelle diamètre apparent d'un astre l'angle sous lequel on l'observe.

On obtient aux alentours du demi degré pour la Lune et le Soleil mais les variations de distance de la Lune font pas mal osciller son diamètre apparent.

Les calculs peuvent se faire avec une tangente d'angle, avec $d=r\alpha$ si on connaît les radians ou encore plus simplement par des proportions, en assimilant le diamètre de la Lune ou du Soleil à un arc de cercle centré sur l'observateur et en écrivant que la longueur de l'arc est proportionnelle à l'angle au centre (c'est exactement $d=r\alpha$ mais sans le dire et sans radians).

On trouve pour l'éclipse du 11 août 0,53° pour le Soleil et 0,54° pour la Lune (vus depuis la surface de la Terre). Les astronomes comptent plutôt en minutes d'arc (notées ') mais on peut garder les degrés décimaux pour nos élèves.

Encore quelques remarques

La Lune est 400 fois plus petite que le Soleil mais par un heureux hasard, elle est aussi 400 fois plus proche de nous. Lorsque l'on introduit Thalès par des triangles ayant des côtés de longueurs proportionnelles, on utilise le coefficient d'agrandissement ×400 entre nos 2 triangles.

On peut aussi s'amuser à calculer le nombre de jours écoulés entre deux éclipses. On vérifiera que l'on trouve un nombre entier de lunaisons (29,5 jours), les éclipses de Soleil ayant évidemment toujours lieu à la Nouvelle Lune.

Il n'y a pas éclipse de Soleil à chaque Nouvelle Lune car en général notre satellite semble passer au dessus ou en dessous du Soleil. En effet, le plan de l'orbite de la Lune n'est pas confondu avec le plan de l'orbite de la Terre, un angle de 5° les séparant. On appelle ligne des nœuds l'intersection de ces deux plans. Pour qu'il y ait éclipse de Soleil, la Lune doit être sur la ligne des nœuds au moment de la Nouvelle Lune. Cela se produit au minimum 2 fois par an, mais ce n'est pas si simple puisque la ligne des nœuds se déplace aussi.

Les éclipses se reproduisent dans le même ordre après un intervalle de temps appelé Saros qui dure 18 ans et 11,3 jours. Il se trouve que cette durée contient 223 lunaisons, 242 mois draconitiques (le temps que la Lune revienne au même nœud) et 239 mois anomalistiques (qui séparent deux passages de la Lune au périgée). Chaque saros compte 70 éclipses dont 41 de Soleil et 29 de Lune[1].

Et n'oubliez pas l'éclipse totale du 28 septembre 2015....

[1] On ne compte pas ici les éclipses de Lune par la pénombre.

Maths et musée

Exemple d'activités à l'école et au collège

Marie-Noëlle RACINE, professeure retraitée,
mnracine@wanadoo.fr

Résumé : activité sur les nombres dits « complexes » (heures minutes), en liaison avec une partie de la visite du musée des beaux arts de Dijon. Raisonnement, justification à partir d'indices trouvés dans un document.

Mots clés : calculs heures minutes, éphéméride, durée jour, midi solaire, éphéméride, lecture graphique

La journée maths et musée de cette année 2012 a eu pour thème *les nombres dans la peinture*. Liliane Boccacio nous a, par exemple, présenté le tableau *Vanité* (voir figure 1), pour évoquer le calendrier éphéméride reproduit par l'artiste.

Figure 1

Anonyme, *Vanité ou Allégorie des cinq Sens*, MBAD, ©photo MN Racine

Parlons d'abord du tableau : on ne connaît pas l'auteur, on sait seulement attribuer cette œuvre à l'école allemande et la dater du XVII^e^ siècle. C'est une peinture à l'huile, sur toile, de 52 cm de hauteur et 66 cm de largeur. Il s'agit d'une nature morte, plus exactement d'une « vanité », c'est-à-dire d'un tableau évoquant, à travers la présence de certains objets ou symboles, le temps qui passe, qui s'écoule inexorablement vers la mort. Depuis les grandes pestes et plus particulièrement vers

le milieu du XVII[e] siècle, on cultive les « vanités » qui font réfléchir à la mort et pour permettre au spectateur une prise de conscience du caractère transitoire autant qu'éphémère de l'existence humaine.
Malgré la présence d'une table, sur laquelle sont posés divers objets, et du calendrier plaqué verticalement, les objets sont amassés les uns à côté des autres sans s'intéresser à la perspective.
Quels indices permettent de confirmer le second titre de ce tableau (*Allégorie des cinq Sens*) ?

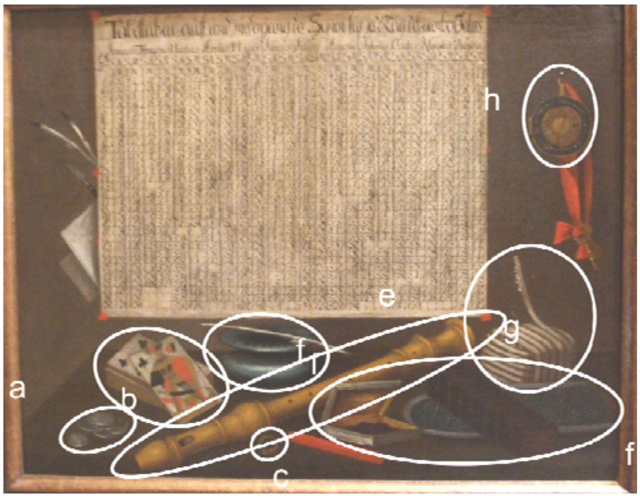


Figure 1 bis
Anonyme, *Vanité ou Allégorie des cinq Sens*, MBAD, ©photo MN Racine

De gauche à droite et de bas en haut, nous reconnaissons : (a) des pièces de monnaie, (b) des cartes à jouer, (c) une bague en or, pour évoquer le toucher ; (d) un encrier, pour l'odorat ; (e) une flûte à bec, pour l'ouïe ; (f) une tabatière, un ballotin de tabac à priser et une râpe, pour le goût) ; (g) une bougie appelée « rat de cave », pour la vue.
Le calendrier et la montre pour montrer le temps qui passe et le destin de tout un chacun, la mort.
Le calendrier était aussi symbole de connaissance. D'ailleurs le peintre l'a scrupuleusement recopié, de manière précise et lisible (voir figures 2 et 3).

Figure 2
Extrait de : Anonyme, *Vanité ou Allégorie des cinq Sens*,
MBAD, ©photo MN Racine

On lit ici beaucoup de chiffres et de nombres. Voyons ce qu'ils représentent :
Le titre du calendrier est *Tabellatur auf und Niedergang der Sonnen für jede Tag des gantzen Jahrs*, qui signifie « tableau du lever et du coucher du soleil pour chaque jour de l'année entière ». La lecture de ces nombres va être aisée et nous allons pouvoir faire quelques calculs.
Les heures de lever et de coucher du soleil sont indiquées en heures et minutes (Stunden und Minuten).
Par exemple, pour le 1er janvier, le soleil s'est levé à 7 h 53 min et s'est couché à 4 h 7 min. Le 2 février, le soleil s'est levé à 7 h 21 min et s'est couché à 4 h 39 min.
Quelle fut la durée de chacun de ces deux jours ?

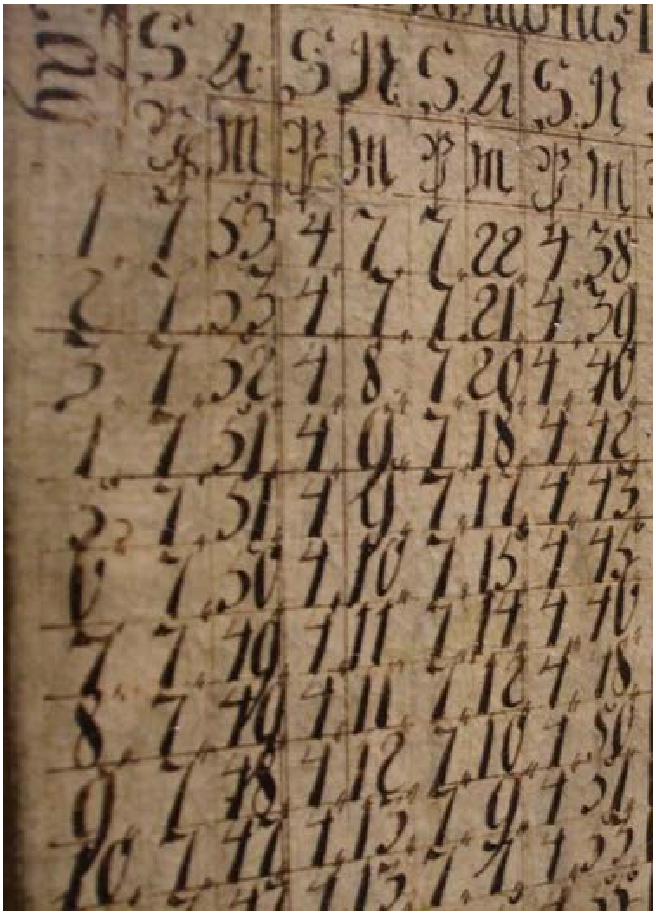


Figure 3
Extrait de : Anonyme, *Vanité ou Allégorie des cinq Sens*,
MBAD, ©photo MN Racine

Sur la figure 3 : relever, comme précédemment, les heures de lever et de coucher du soleil pour d'autres jours du mois de janvier.
Calculer la durée de chacun de ces jours.
On dit qu'en janvier, « les jours rallongent ». Expliquer.

Avec les heures de lever et de coucher du soleil, on peut calculer l'heure du midi solaire : pour le 1er janvier par exemple on aurait :
(7h53min + 16h07min) : 2 = 12h00min ;
pour le 2 février, (7h21min + 16h39min) : 2 = 12h00min.
Rien de très surprenant, direz-vous ! Midi est toujours à midi !
Quoique !...

Voici un éphéméride concernant la ville de Dijon et des jours de l'année 2012 :
Tableau des levers et couchers de soleil à Dijon deux dates :

10 mai 2012	28 juin 2012
Lever : 06h09, Coucher : 21h03	Lever : 05h46, Coucher : 21h40

Calculer la durée du jour pour chacune de ces deux dates.
Calculer l'heure de midi pour chacune de ces deux journées.
On constate que midi solaire ne se produit pas à 12h et que midi n'est pas toujours à la même heure ! (13h36 pour le 10 mai et 13h43 pour le 28 juin)
Aujourd'hui, les montres sont réglées sur un temps moyen qui diffère quelque peu de l'heure solaire. En effet :
1) L'heure temps moyen est en avance sur l'heure solaire d'une heure en hiver et de deux heures en été. C'est-à-dire, en hiver, lorsqu'il est 13h à notre montre, il est environ midi solaire.
2) Dijon est à une latitude d'environ 5°Est par rapport au méridien de Greenwich. 5° égalent ⅓ de fuseau horaire, soient 20 minutes. Le midi solaire se produit à Dijon 20min avant qu'il soit midi solaire à Greenwich, c'est-à-dire environ 20min avant qu'il soit 13h (ou 14h) à notre montre.
3) L'axe de la terre est incliné par rapport à la perpendiculaire au plan de l'écliptique, plan de son mouvement annuel autour du soleil. Ce décalage, appelé obliquité, est de 23°26'. De plus, le mouvement de la terre autour du soleil n'est ni tout à fait circulaire (il est elliptique) ni tout à fait uniforme (la Terre va plus vite lorsqu'elle est proche du soleil et va moins vite lorsqu'elle en est plus éloignée, en raison de la loi des aires). Ces variations sont les mêmes d'une année sur l'autre. Pour tenir compte de ces variations, les astronomes ont construit une courbe appelée *équation du temps* reproduite ci-dessous, voir figure 4. En abscisse, on lit la date, en ordonnée, on lit l'avance, en minutes, du temps moyen (de la montre) sur le temps vrai.

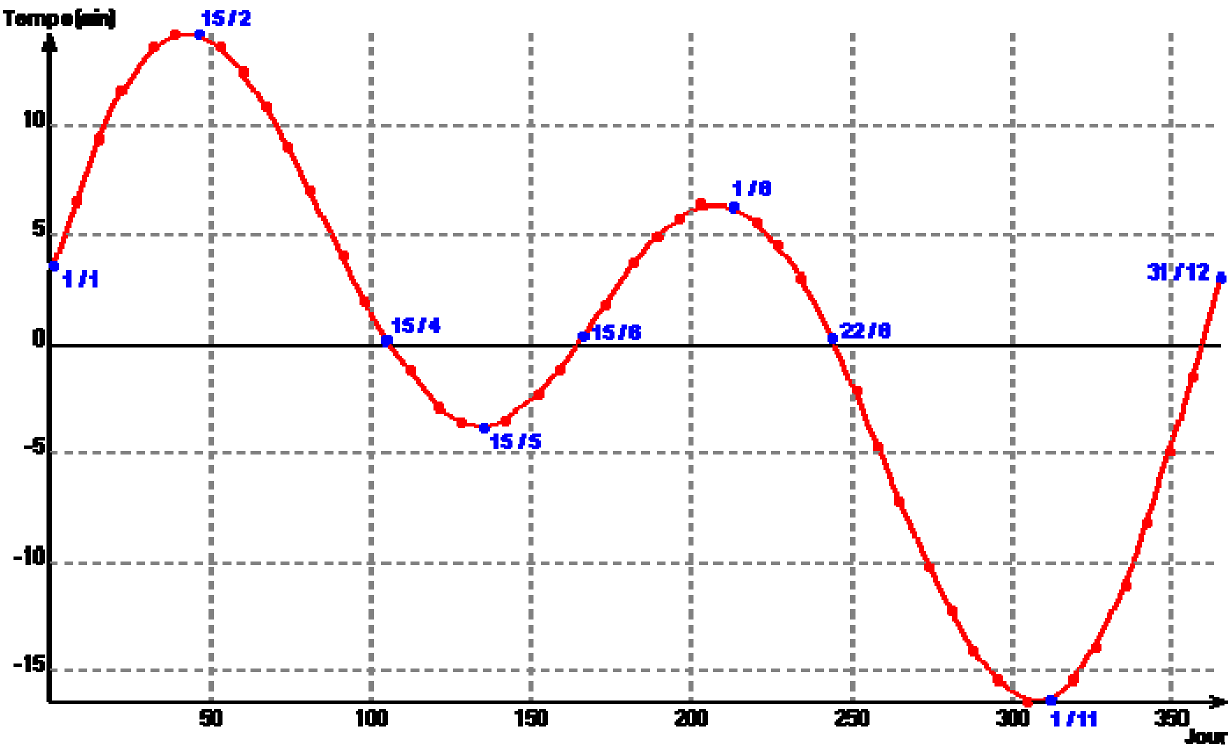


Figure 4

Equation du temps, document tiré du site de l'académie de Dijon.

Voici comment lire un tel graphique :

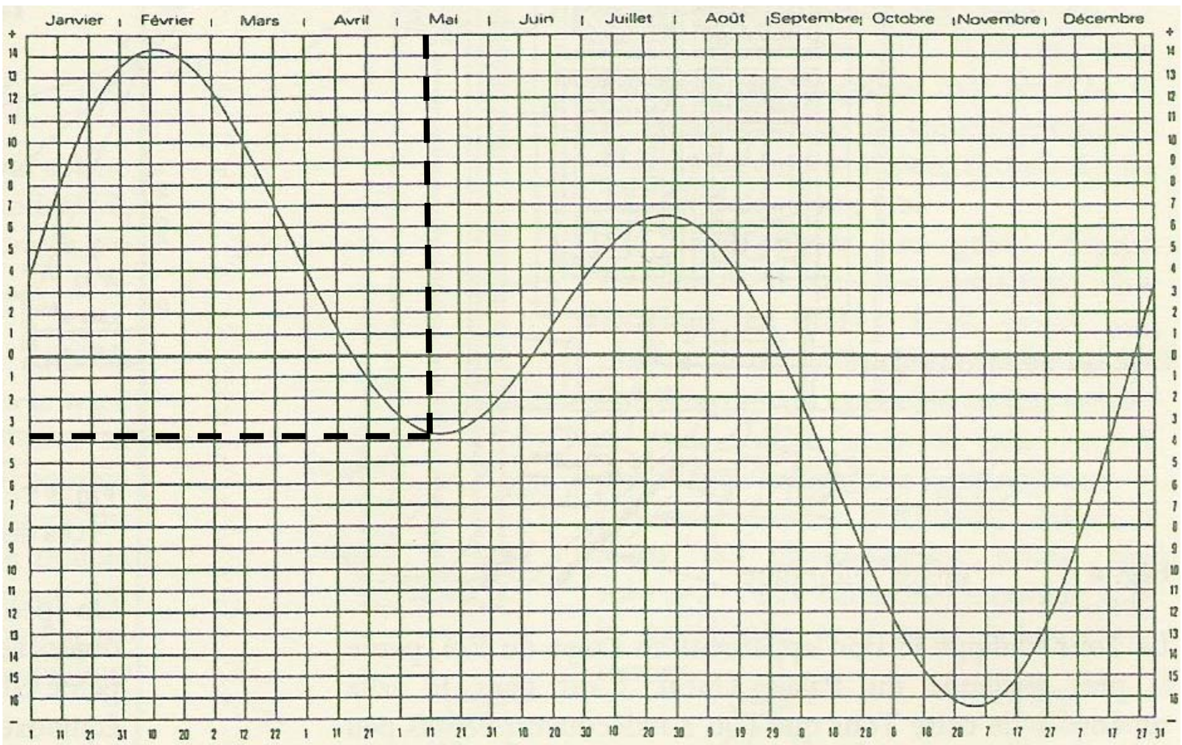


Figure 5

Équation du temps, extrait de la brochure *Science et Patrimoine* éditée par la ville de Dijon, 2000.

Prenons, sur la figure 5 ci-dessus, l'exemple du 10 mai. Le graphique indique, pour cette date et à Dijon, un décalage de - 4 min. par ailleurs, nous sommes en heure d'été. Midi solaire se produira donc à :

12 h	+ 4 min	- 20 min	+ 2 h	= 13 h 36 min
Midi solaire	Compensation du décalage par rapport au temps moyen	Avance de Dijon par rapport à Greenwich	Décalage dû à l'heure d'été	Heure lue sur la montre lorsqu'il est midi solaire

Vérifier, en utilisant l'*équation du temps*, que midi solaire se produit bien à 13h40 le 28 juin 2012.

Figure 6
Méridienne, palais des Ducs de Bourgogne

Lorsqu'on regarde une méridienne comme l'une de celles du palais ducal de Dijon (ci-contre, figure 6), à midi solaire, chaque jour, un point lumineux éclaire le filet central de la méridienne. Le 10 mai 2012, il fallait donc regarder la méridienne à 13h36 pour apercevoir ce point lumineux.

Géométrie sur une image

Alain MASCRET, collège de Gevrey-Chambertin

Résumé : Insérer une image dans une figure obtenue grâce à un logiciel de géométrie dynamique. Deux exemples d'utilisation : une maquette du système solaire et une étude de tableau.

Mots clés : Géométrie dynamique, *geowiki*, *geogebra*, *geonext*, *carmetal*, système solaire, planètes, Zanobi di Machiavelli, *Le couronnement de la Vierge*, perspective, point de fuite, point de distance, distorsion, traitement d'image, agrandissement, réduction, théorème de Thalès, transformation géométrique, homothétie, similitude, affinité, transvection, motivation des élèves à la géométrie par le travail sur une photographie.

Certains logiciels de géométrie dynamique permettent d'insérer une image dans une figure. Une telle technique a été décrite dans le numéro 120 de la *feuille de vigne* ainsi que sur le site du groupe « géométrie dynamique » de l'IREM de Dijon :http://geowiki.u-bourgogne.fr/. Voyons maintenant, sur deux exemples quel peut en être l'intérêt.

1. Une maquette du système solaire :

Pour des raisons techniques, dans les livres d'astronomie, les représentations du système solaire sont rarement correctes. Les planètes sont trop grosses et leurs distances relatives ne sont pas respectées.

Pour donner une idée des dimensions du système solaire, nous allons en réaliser une maquette à l'échelle.

Le soleil sera à Dijon et la terre à Gevrey-Chambertin. La distance Dijon-Gevrey est de 12 km ce qui permet de remplir le tableau de proportionnalité ci-contre.

Corps céleste	Distance au soleil en réalité en millions de km	Distance au soleil sur la maquette en km
Soleil	0	0
Mercure	57,94	5
Vénus	108,26	9
Terre	149,68	12
Mars	228,06	18
Jupiter	778,69	62
Saturne	1430,10	115
Uranus	2876,5	231
Neptune	4506,8	361

Les trajectoires des planètes seront représentées par des cercles de centre Dijon.

Ouvrons *geogebra*. Choisissons un fond de carte de la Bourgogne et insérons-le dans la figure.

Pluton	5903,4	473

Tableau 1

Pour cela nous choisissons un segment horizontal [AB] qui sera solidaire du bas de l'image. Pour cela, il est pratique d'utiliser la grille ou l'axe des abscisses.

Nous insérons l'image en cliquant sur le point A. L'image apparaît avec sa taille d'origine.

Nous ouvrons les propriétés de l'image en faisant un clic droit dessus.

Dans l'onglet « position » nous choisissons le point B comme coin numéro 2.

L'image est maintenant solidaire de la figure. Il est possible de contrôler sa taille et sa position dans la figure en déplaçant les points A et B.

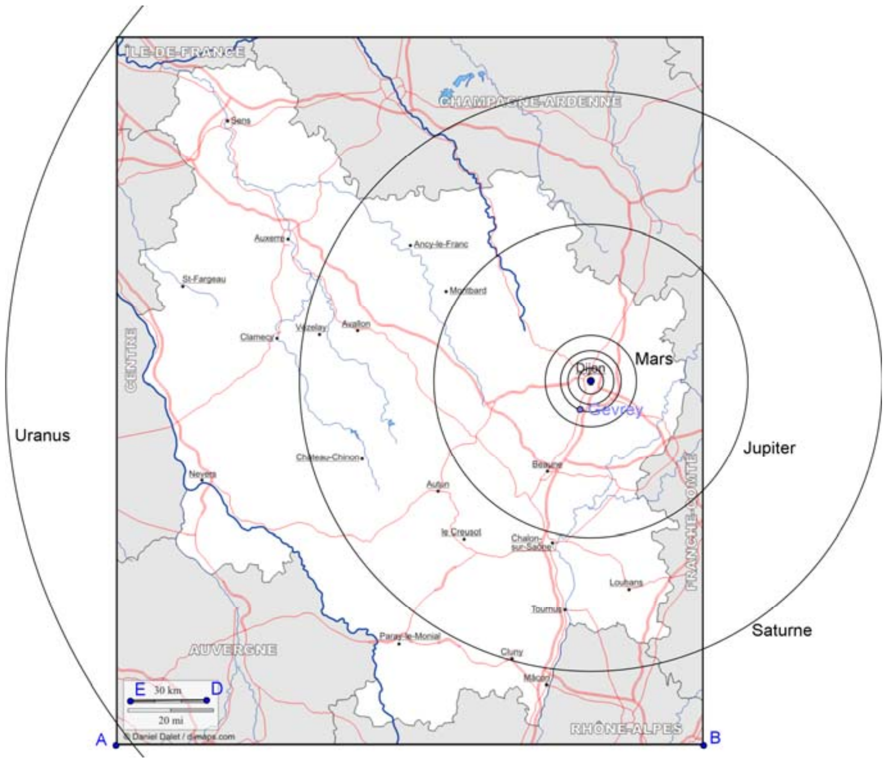


Figure 1

Plaçons avec soin le point C sur Dijon et les points E et D dans le cartouche d'échelle de la carte. La longueur ED représentera 30 km. *Geogebra* appelle cette longueur b et en précise la valeur. Les rayons des cercles seront obtenus en multipliant les nombres de la dernière colonne du tableau 1 par $\frac{b}{30}$ et *geogebra* se charge des calculs.

À partir d'Uranus, les orbites des planètes ne sont plus sur la carte de la Bourgogne. Nous passons donc à la carte de France

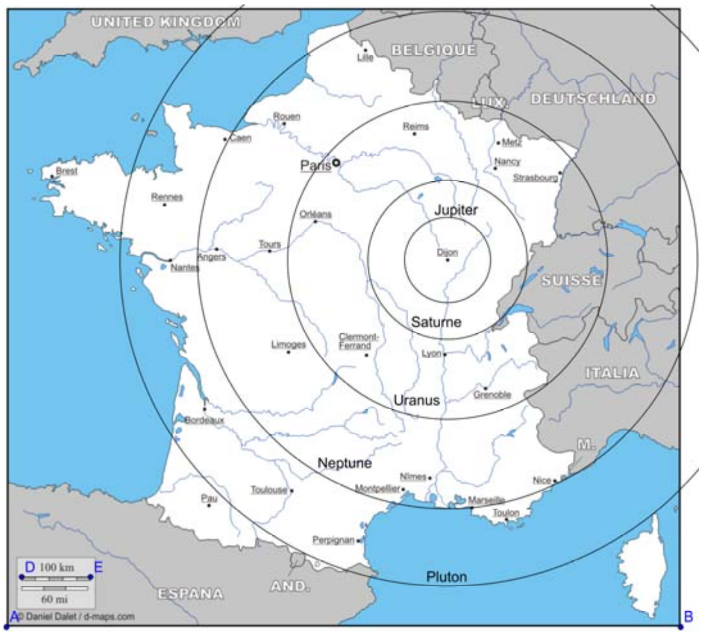


Figure 2

Et qu'en est-il de l'étoile la plus proche du soleil ?

Elle est située à 4 années-lumière de nous, c'est à dire que sa lumière met 4 ans pour nous parvenir à la vitesse de 300000 kilomètres par seconde.

Sur notre maquette, il faudrait placer cette étoile à 3 036 000 km de Dijon, ce qui fait près de 8 fois la distance terre-lune !

Pour terminer, le tableau ci-contre donne les diamètres des planètes sur notre maquette en utilisant la même échelle.

La lune se trouve seulement à 30 mètres de la terre. Son diamètre est suffisant pour que la terre apparaisse, vue de l'espace, comme une planète double.

Corps céleste	Diamètre en réalité en km	Diamètre sur la maquette en m
Soleil	1392000	111,6
Mercure	4847	0,39
Vénus	12249	0,98
Terre	12757	1,02
Lune	3476	0,28
Mars	6748	0,54
Jupiter	142880	11,45
Saturne	120960	9,7
Uranus	47170	3,78
Neptune	44990	3,61
Pluton	2300	0,18

Remarques :

Cette activité est possible dans une classe de sixième motivée par l'astronomie, l'idéal étant que chaque élève dispose d'un ordinateur. Le tableau 1 fait l'objet d'un travail précédant la séance.

La taille de la figure dépend des points A et B, de même, les rayons des cercles sont fonction de la longueur ED et leur centre est le point C. Une fois les ajustements de départ réalisés, il est donc judicieux de masquer ces points de façon à ne pas les déplacer de manière accidentelle.

Les logiciels *geogebra* et *carmetal* permettent d'utiliser un troisième coin. Dans ce cas, le déplacement d'un coin déformera la figure. Pour éviter toute déformation, il suffit, avec *geogebra*, de ne pas définir ce troisième coin.

2. Analyse d'un tableau :

L'histoire des arts fait maintenant partie intégrante des disciplines sanctionnées par le brevet des collèges. Une étude géométrique de tableau peut être une façon pour le professeur de mathématiques de participer à la préparation de cette épreuve qui est, théoriquement, l'affaire de tous.

Le groupe Math et Arts de l'IREM de Dijon organise chaque année une visite du musée des beaux-arts. À cette occasion, Marie-Noëlle Racine a pris des photographies, « sans flash et sans pied » que le musée des beaux-arts de Dijon nous permet aimablement de publier. (Ces photographies ne peuvent cependant pas être reproduites sans l'accord du musée).

Afin de mettre en évidence certaines particularités d'un tableau, nous sommes amenés à y tracer des lignes. Le gros avantage des logiciels de géométrie, c'est que ces lignes peuvent être déplacées et modifiées, sans avoir à recommencer comme autrefois, quand les tracés se faisaient à la main.

À titre d'exemple, examinons *le Couronnement de la Vierge* de Zanobi di Machiavelli. Ce tableau date de 1473 et provient de l'église du monastère Santa Croce de Fossabanda près de Pise.

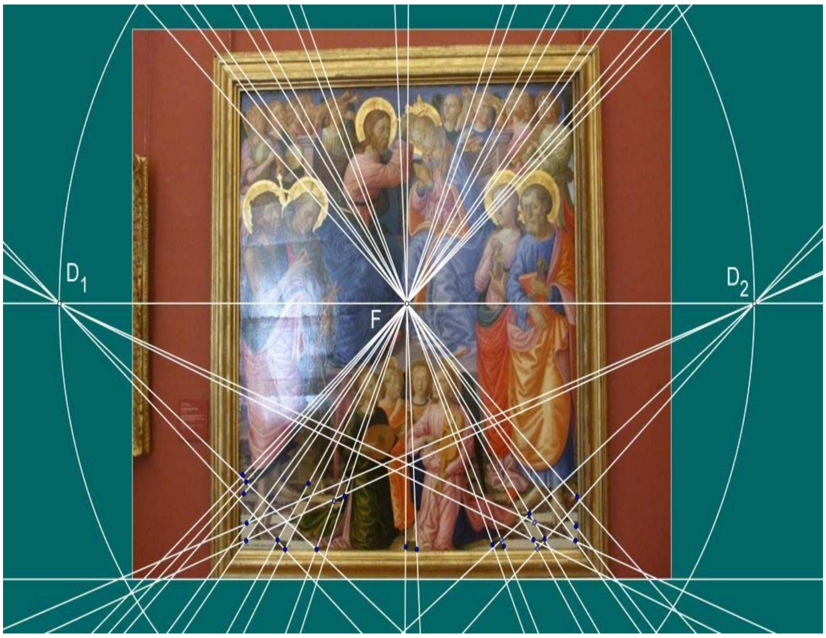


Figure 2
Zanobi di Machiavelli, *Le couronnement de la Vierge*, 1473
Musée des beaux-arts de Dijon
© Photo Marie-Noëlle Racine

Zanobi di Machiavelli a peint un carrelage. En prolongeant les côtés des carreaux, il est possible de trouver le point de fuite principal F qui se trouve au centre de ce tableau de forme carrée. Les points marqués sur le tableau sont les points choisis pour définir les droites.

De la même façon, les diagonales des carreaux vont concourir en les points D et D', symétriques par rapport à F sur la ligne d'horizon. Ces deux points sont les « points de distance ». La distance FD est la distance à laquelle il faut placer **un** œil sur la normale au tableau passant par F, si l'on veut bénéficier pleinement de l'impression de relief donnée par la perspective.

En toute rigueur, c'est aussi en ce point qu'il aurait fallu pouvoir placer l'appareil photographique, ce qui n'a pas été le cas. C'est pourquoi le point de fuite principal est légèrement au dessus du centre du tableau comme le montre le schéma de la figure 3.

[AB] représente le tableau. O est la position de l'appareil photographique. [DE] représente la photographie. C est le milieu de [DE].

(OC) est l'axe optique de l'appareil, c'est donc aussi la médiatrice de [DE] et la bissectrice de l'angle $\widehat{BOA}$.

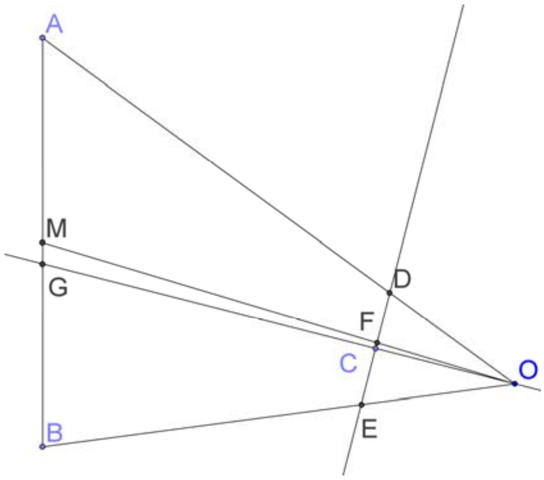
(OC) coupe [AB] en G ce qui permet d'écrire : $\frac{BO}{BG} = \frac{AO}{AG}$.

Dans le cas d'un tableau placé « trop haut », comme c'est souvent le cas, AO est plus grand que BO donc AG est plus grand que BG, ce qui veut dire que le point G est au dessous du milieu M de [AB].

Mais le point M correspond au point de fuite principal F sur la photographie. Le milieu C de [DE] se trouve donc bien au dessous de F.

Il ne faut pas oublier de penser aux distorsions possibles quand on étudie un tableau à partir d'une photographie.

Figure 3 *(Distorsion de la photographie)*



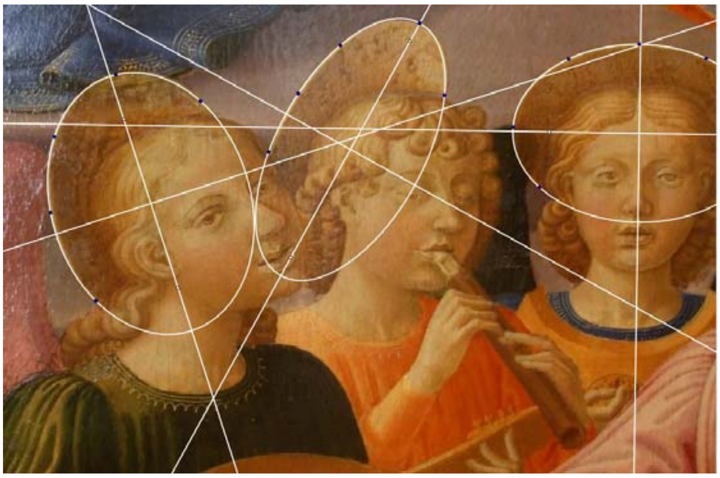


Figure 4 *(détail du tableau de la figure 2)*

Examinons maintenant la façon dont l'artiste a représenté les auréoles des personnages. Pour les plus importants, les auréoles sont situées dans un plan frontal, c'est-à-dire un plan parallèle au plan du tableau. Elles ne subissent aucune déformation. Un cercle reste un cercle.

Pour les quatre anges du premier plan, c'est différent. L'outil « conique passant par cinq points » va nous montrer (figure 4) que leurs auréoles sont bien représentées par des ellipses dont il est possible de tracer les axes et les foyers. Nous constatons que le petit axe de l'auréole de l'ange vu de face est l'axe de symétrie de son visage.

En conclusion, nous pouvons dire que Zanobi di Machiavelli maîtrisait bien les lois de la perspective.

Dans un prochain article nous verrons d'autres utilisations possibles d'images insérées dans une figure.

Le problème des anniversaires

Michel PLATHEY, Lycée Carnot, Dijon

Résumé : Le « problème des anniversaires » qui consiste à déterminer la probabilité que, dans une liste de longueur $n, n \in \mathbb{N}^*$ de nombres pris au hasard entre 1 et 365, on ait au moins une répétition de nombres, est une application bien connue de la propriété $p(E) = 1 - p(\overline{E})$ où p est une probabilité, E un évènement et $\overline{E}$ l'évènement contraire.
On approfondit ici ce problème, en s'intéressant aux probabilités de répétitions multiples.
Ce problème illustre bien l'apport des logiciels de calcul qui permettent, d'une part de faire des conjectures qui, sans eux seraient plus difficilement accessibles, et d'autre part de vérifier expérimentalement la validité des raisonnements mathématiques mis en place pour les démonstrations des conjectures. Il faut cependant prendre garde que ces vérifications ne sont pas des preuves et que la vigilance théorique reste de mise.

Mots clés : Probabilités, coïncidence, évènements équiprobables, évènement contraire, dénombrement, anniversaire, modélisation.

On peut faire intervenir ce problème très tôt (peut-être même dès la classe de 3^{e}) dans l'étude de la théorie des probabilités de façon à illustrer le caractère surprenant et intuitivement paradoxal de certains résultats obtenus dans cette matière.

1. LE PROBLÈME ET QUELQUES PROLONGEMENTS POSSIBLES.

Considérons une classe de 36 élèves.

Le problème des anniversaires consiste à se demander si, dans cette assemblée, il est plus ou moins probable que 2 personnes au moins aient le même jour anniversaire.

Voici une solution bien connue, où on se place dans le cas où toutes les dates d'anniversaires sont équiprobables et où l'année a 365 jours. Cela implique aussi que les dates d'anniversaires sont indépendantes les unes des autres (en particulier, qu'il n'y ait pas de jumeaux dans la classe).

Les différents jours de l'année sont alors numérotés de 1 à 365 et un évènement élémentaire est un élément de D^{36} où D désigne l'ensemble des nombres entiers compris entre 1 et 365 au sens large : c'est une suite de 36 dates. On est en situation d'équiprobabilité et si $\Omega = D^{36}$ désigne l'univers de l'expérience, on a : $card(\Omega) = 365^{36}$.

Soit E l'évènement : « 2 personnes au moins ont le même jour anniversaire. » et soit $\overline{E}$ l'évènement contraire : « toutes les personnes de l'assemblée ont des anniversaires différents deux à deux. »

Il est plus facile de calculer d'abord $p(\overline{E})$.

On a : $card(\overline{E}) = 365*364*363*...*(365-35) = A_{365}^{36} = \dfrac{365!}{(365-36)!}$.

C'est le nombre d'arrangements de 36 dates prises parmi 365 dates.

On a : $$p(\overline{E}) = \frac{card(\overline{E})}{card(\Omega)} = \frac{A_{365}^{36}}{365^{36}} \approx 0{,}1678$$

et donc $p(E) \approx 1 - 0{,}1678 = 0{,}8322$.

Remarque :

Cette méthode de calcul de *p(E)* liée à la locution « au moins » est préférable au calcul direct car l'événement *E* est très compliqué. Il est réalisé si :

- Une date $d \in \mathbb{N} ; 1 \le d \le 365$ et une seule est répétée *k* fois exactement pour $k \in \mathbb{N} ; 2 \le k \le 36$.
- Deux dates différentes d_1 *et* d_2 ; $d_1, d_2 \in \mathbb{N} ; 1 \le d_1 < d_2 \le 365$ sont répétées k_1 *et* k_2 fois exactement, pour $k_1, k_2 \in \mathbb{N} ; 2 \le k_1 \le 36 ; 2 \le k_2 \le 36 ; k_1 + k_2 \le 36$
- *i ; i* $\in \mathbb{N} ; 3 \le i \le 18$ dates différentes $d_1, d_2, \ldots, d_i$;
  $d_1, d_2, \ldots \in \mathbb{N} ; 1 \le d_1 < d_2 < \ldots < d_i \le 365$ sont répétées $k_1, k_2 \ldots, k_i$ fois exactement, pour :
  $k_1, k_2 \ldots k_i \in \mathbb{N} ; 2 \le k_1 \le 36 ; 2 \le k_2 \le 36 ; \ldots ; 2 \le k_i \le 36 ; k_1 + k_2 + \ldots + k_i \le 36$.

<u>Retour sur le résultat obtenu</u> :

Si on ne connaît pas ce résultat au préalable, il est très surprenant par sa grandeur.

Il signifie que dans ma classe, il y a plus de 4 chances sur 5 de trouver **au moins deux** élèves ayant le même anniversaire.

On peut alors prolonger la question.

Par exemple, on se demande quelle est la probabilité d'avoir :

a. exactement 2 personnes parmi les 36 qui aient le même anniversaire,

b. exactement 2 couples de personnes où les personnes de chaque couple ont le même anniversaire, les 2 anniversaires communs aux 2 couples étant différents, les autres anniversaires étant tous différents.

c. exactement 3 personnes parmi les 36 qui aient le même anniversaire, les autres anniversaires étant tous différents.

La remarque précédente montre que ce ne sont que quelques probabilités particulières parmi d'autres qu'on pourrait calculer.

Pour moi, en l'absence d'expérience précise, en me fiant à ma seule intuition, j'ai toujours pensé qu'il est très peu probable d'avoir plus de 2 personnes ayant le même jour anniversaire.

Mais cette intuition m'a déjà trompé car je ne pensais pas qu'il est presque certain d'avoir au moins 2 personnes ayant le même anniversaire, dans une assemblée de 36 personnes.

Il est à présent utile de vérifier, en utilisant un tableur si, d'abord, le raisonnement théorique tenu plus haut se confirme bien en pratique et si, d'autre part, mon intuition est bonne.

2. SIMULATION INFORMATIQUE DU PROBLÈME.

1. Simulation réalisée à l'aide d'un tableur. Voir les tableaux 1, 2, 3 ci-dessous.

On choisit au hasard et indépendamment 36 dates et on repère les coïncidences de dates, expérience réitérée 19 fois.

Cette simulation informatique décrite ci-dessous aux tableaux n°1 et n°2 permet de constater des résultats peu prévisibles dès l'abord et donc intéressants.

On voit que :

Dans 18 cas sur 19, soit 94,74 % des cas, au moins 2 personnes de l'assemblée choisie ont un anniversaire commun, ce qui est encore supérieur à ce que prévoit la théorie.

Mais ce n'est pas tout :

Il existe 6 cas sur 19 où il y a seulement 2 personnes de l'assemblée choisie ayant un anniversaire commun, soit 31,58 % des cas.

Il y a 8 cas sur 19, soit 42,11 % des cas ou encore 8 cas sur les 18 où il y a coïncidence d'anniversaires (44 % des coïncidences d'anniversaires) où il y a 2 paires de personnes de l'assemblée choisie, les personnes de chacune des paires ayant un anniversaire commun, ces 2 anniversaires étant eux-mêmes différents.

Dans 2 cas sur 19, il y a 3 paires de personnes de l'assemblée choisie, les personnes de chacune des paires ayant un anniversaire commun, ces 3 anniversaires étant eux-mêmes différents 2 à 2.

Dans 1 cas sur 19, il y a 5 paires de personnes de l'assemblée choisie, les personnes de chacune des paires ayant un anniversaire commun, ces 4 anniversaires étant eux-mêmes différents 2 à 2.

Et même, dans 1 cas sur 19, il y a un triple anniversaire.

Par contre, dans ce tableau, on n'a pas trouvé de quadruple, quintuple, etcetera anniversaire.

Ces résultats sont pour moi une totale surprise.
Je m'imaginais qu'il était déjà difficile de trouver 1 couple de personnes avec un anniversaire commun. Et il me semblait pratiquement impossible que l'on puisse trouver plusieurs couples de personnes avec un anniversaire commun.
Or l'expérience permet de soupçonner le contraire : parmi les assemblées de 36 personnes où il y a au moins 1 couple de personnes avec un anniversaire commun, celles où il existe plusieurs couples de personnes avec un anniversaire commun, sont en grande majorité. Par contre les anniversaires quadruples et plus apparaissent plutôt rares.

La moyenne du nombre de couples de personnes avec un anniversaire commun, parmi les 19 assemblées de 36 personnes obtenues est de :

$$\frac{6*1+8*2+2*3+1*3+1*4+1*5}{19} \approx 2{,}11 .$$

On peut alors estimer que, en moyenne, dans une assemblée de 36 personnes, on aura 2 couples de personnes avec un anniversaire commun.

On peut se demander d'où provient notre si piètre intuition des probabilités.

Une réponse possible serait que la lecture d'un tableau est chose difficile.

Il nous est presque impossible de faire facilement un tri de données numériques, ce que l'ordinateur fait de façon parfaite et rapide.

Ce handicap intuitif est par contre un atout pour l'enseignement des probabilités (informatique et théorique) car le raisonnement permet de prouver des résultats non triviaux.

Tableau n°1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1			**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**
2																					
3	**1**		1	27	14	4	1	12	32	40	7	4	1	1	3	12	9	2	2	15	2
4	**2**		6	47	20	12	24	15	42	46	21	8	8	36	14	21	47	34	18	15	14
5	**3**		12	49	59	25	35	32	43	46	49	15	19	40	53	21	52	37	42	24	15
6	**4**		16	65	69	29	38	39	46	51	65	15	48	44	58	21	56	57	46	25	31
7	**5**		18	85	89	30	48	73	54	55	66	18	48	66	64	89	56	76	57	26	37
8	**6**		25	85	117	52	49	75	57	68	67	20	66	81	65	99	80	79	58	27	52
9	**7**		27	89	127	65	58	88	61	69	69	53	70	90	74	113	92	96	70	28	55
10	**8**		30	111	134	65	63	89	64	76	71	73	89	106	86	121	93	106	77	31	62
11	**9**		30	126	139	76	66	108	68	92	94	85	96	122	97	136	104	109	85	33	66
12	**10**		82	151	156	85	68	123	69	105	136	105	98	146	98	136	134	118	91	39	80
13	**11**		135	167	171	87	103	123	72	107	137	118	98	147	103	137	137	124	94	42	81
14	**12**		153	170	172	89	109	133	95	110	137	128	100	154	143	152	139	131	96	44	83
15	**13**		158	195	177	100	116	150	105	110	149	135	108	163	145	152	142	132	114	104	108
16	**14**		173	212	183	107	118	163	111	120	168	145	111	166	147	157	159	134	115	107	109
17	**15**		177	213	202	129	120	165	114	125	172	152	121	168	167	180	161	154	117	116	133
18	**16**		186	213	202	146	159	166	116	132	175	175	122	177	170	190	163	172	156	130	133
19	**17**		190	215	206	148	181	167	118	133	191	177	124	189	170	198	166	172	158	154	137
20	**18**		190	220	217	156	192	172	118	149	221	185	140	189	213	200	175	209	163	162	139
21	**19**		204	235	233	169	201	173	124	149	235	210	169	195	222	209	176	215	170	172	151
22	**20**		217	236	246	169	224	180	162	157	255	216	172	205	223	221	197	233	184	191	151
23	**21**		241	243	258	177	227	225	193	162	261	226	181	229	233	222	201	241	188	192	152
24	**22**		248	272	259	179	245	226	198	166	270	230	190	230	237	236	219	249	192	196	161
25	**23**		249	276	278	219	249	236	211	179	292	230	206	233	241	236	250	258	197	200	166
26	**24**		260	278	285	237	258	242	228	179	296	231	210	250	245	248	258	259	216	215	183
27	**25**		266	283	293	251	283	243	229	210	305	232	224	258	249	256	259	262	216	217	213
28	**26**		276	286	301	255	289	250	232	226	310	303	227	265	258	273	262	265	224	221	218
29	**27**		287	287	310	260	294	257	234	229	314	314	245	272	261	276	272	276	235	253	226
30	**28**		289	295	313	272	296	259	249	244	320	314	251	281	264	278	275	277	244	268	256
31	**29**		295	298	314	310	302	290	260	272	324	318	254	288	274	281	276	282	287	268	275
32	**30**		300	310	319	314	306	292	276	275	335	324	263	299	289	297	278	298	291	292	279
33	**31**		308	311	322	316	310	293	277	278	336	331	284	315	293	303	299	309	311	309	286
34	**32**		328	316	329	329	316	304	291	279	337	338	285	324	329	303	326	318	342	315	288
35	**33**		336	324	335	340	317	325	295	281	337	342	331	331	337	305	341	318	351	316	302
36	**34**		345	331	335	345	334	337	297	311	353	345	335	342	343	329	347	334	354	325	311
37	**35**		358	336	340	348	359	345	343	340	360	355	344	343	361	353	359	345	357	328	352
38	**36**		365	365	357	354	361	362	347	340	365	362	361	351	365	360	365	345	363	361	355

Tableau n°2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	1																				
3	2		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
4	3		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
5	4		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
6	5		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
7	6		0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	7		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	8		0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	9		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	10		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
12	11		0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
13	12		0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	13		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
15	14		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	15		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	16		0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
18	17		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
19	18		1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
20	19		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	20		0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
22	21		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	22		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	23		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
25	24		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	25		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
27	26		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	27		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	28		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	29		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
31	30		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
32	31		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
33	32		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
34	33		0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
35	34		0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
36	35		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
37	36		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
38	S Co		2	2	2	2	0	1	1	5	2	3	2	1	1	6	1	3	1	2	2

Tableau n°3.

V	W	X	Y	Z
1	**Nombre de coïncidences d'ordre 2:**		**Totaux:**	**Pourcentages:**
2	0	1	0	0,0526
3	1	6	6	0,3158
4	2	8	16	0,4211
5	3	2	6	0,1053
6	4	1	4	0,0526
7	5	1	5	0,0526
8	**Nombre de coïncidences d'ordre 3:**	1	3	0,0526
9	**Nombre total de coïncidences :**		40	
10	**Nombre moyen de coïncidences :**		2,11	

Commandes utilisées pour le remplissage du tableau n°1.

Le problème des anniversaires.
19 simulations des dates anniversaires d'une assemblée de 36 personnes.

La première colonne contient les numéros des 36 personnes de l'assemblée. La première ligne contient les numéros des expériences.

Les colonnes C à U contiennent chacune 36 dates anniversaires prises au hasard sur l'intervalle d'entiers $[\![1\ ;\ 365]\!]$: loi uniforme.

Ces dates ont été triées par ordre croissant, colonne par colonne, de façon à pouvoir ensuite repérer facilement de proche en proche les coïncidences.

Pour réaliser cela, on écrit sur une feuille n°1: =ENT(ALEA()*365)+1 en C3,
commande que l'on étend dans toute la plage C3:U38.

On recopie ensuite la plage A1:U38 sur une feuille n°2 à l'aide du collage spécial qui ne fait subsister
dans chaque cellule que les nombres obtenus.

On effectue ensuite un tri croissant sur les colonnes de C jusqu'à U.

Commandes utilisées pour le remplissage du tableau n°2.

Le problème des anniversaires.
Repérage des coïncidences de dates.

Sur une troisième feuille, les lignes 2 à 37 sont numérotées de 1 à 36.

Les colonnes C à U vont contenir les comparaisons de deux lignes successives.

Ainsi, en C3, on écrit la commande =SI(Feuil2!C3=Feuil2!C4;1;0) qui renvoie 1 en cas d'égalité des contenus de C3 et de C4; 0 si les valeurs sont différentes.

On étend cette commande de C3 à C37 puis de la colonne C à la colonne U.

La ligne notée SCo donne le total des coïncidences observées.

On constate que dans 1 cas sur 19, soit une proportion de 1/19=0,05 à 0,01 près (nombre à comparer avec 0,18), il n'y a pas de coïncidence d'anniversaire.

L'expérience ne contredit cependant pas la théorie, à cause des fluctuations d'échantillonnage.

Remarque : La formulation ci-dessus est prudente et précise d'un point de vue logique. En réalité, on ressent beaucoup plus et on sait, lorsqu'expérience et théorie sont compatibles comme dans ce cas, que l'on ne s'est pas trompé. On est un peu dans la même situation que dans la preuve par 9 d'une multiplication : cette preuve n'en est pas une, cependant elle donne une certitude qu'on n'a pas fait d'erreur.

Commandes utilisées pour le remplissage du tableau n°3.

On étudie ici les résultats de la ligne notée *SCo* qui compte le nombre d'anniversaires communs : un anniversaire double commun est repéré par un 1 entouré par des zéros et un anniversaire triple commun est repéré par deux 1 successifs entourés par des zéros.

Les anniversaires triples étant assez rares, le nombre indiqué dans la ligne *SCo* est généralement le nombre des doubles anniversaires.

La plage W2 :W7 contient les nombres de 0 à 5 qui représentent le nombre d'apparitions de doubles anniversaires dans les 19 expériences.

La plage X2 : X7 contient les nombres d'expériences où sont apparus 0, 1, 2, 3, 4, 5 doubles anniversaires. Pour cela, en X2, on introduit la commande : =NB.SI(C38 :U38 ;W2), commande reproduite vers le bas.

Cependant, en examinant la répartition des 1 dans le tableau 2, on constate que les 1 sont bien isolés, sauf dans un cas : en colonne P, il n'y a pas 6 doubles anniversaires, mais 4 et 1 triple anniversaire.

2. Simulation réalisée à l'aide d'un logiciel de calcul.

Ce qu'on vient de voir à l'aide d'un tableur peut être affiné en utilisant un logiciel de calcul qui permet d'augmenter dans d'importantes proportions le nombre des expériences réalisées.

Voici en langage naturel, un programme possible, où on fait 10 000 tirages au hasard d'une liste de 36 nombres compris entre 1 et 365 :

On crée d'abord une liste L_0 initialisée à 0 dont les indices varient de 0 à 8 qui recevra dans son terme d'indice i le nombre de fois où on obtient i doubles anniversaires.

Ensuite :

Pour k allant de 1 à 10 000 faire :

Début Pour

- 1. Créer une liste L_1 de 36 dates anniversaires.
- 2. Classer cette liste par ordre croissant. On obtient alors une liste L_2.
- 3. Comparer chaque nombre à son successeur. S'il y a égalité, la comparaison renvoie 1, sinon 0. On obtient alors une liste L_3.
- 4. On additionne les termes de la liste L_3. On obtient ainsi le nombre *n* de doubles anniversaires. On fait ici une approximation un peu fautive qui consiste à considérer que les anniversaires d'ordres 3 et plus sont rares.

- L_0[n] est alors augmentée de 1.

Fin Pour.

On affiche la ligne L_0.

Le programme ci-dessus est intéressant mais trop rudimentaire car il ne prend pas en compte les anniversaires multiples d'ordre supérieurs à 3. Il les intègre à l'intérieur des anniversaires doubles et les résultats donnés sont donc un peu faussés. On peut s'en satisfaire dans un premier temps puisque, comme on le verra, les probabilités d'anniversaires multiples d'ordre supérieurs à 3 sont faibles.

Pour plus de précision, voici un programme plus complet réalisé par Michel Lafond en langage MAPLE.

coincid:=array(1..7): *nombres total de coïncidences d'ordre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 dans les 10000 classes*
for i to 7 do coincid[i]:=0: od:
fav:=0: *nombres de cas favorables à un évènement donné [ici* 1 *couple et pas de triple]*
for w to 10000 do *on teste 10 000 classes*
classe:=NULL: *classe au hasard (36 entiers au hasard entre 1 et 365)*
for i to 36 do classe:=classe,floor(rand()/1e12*365+1): od:
classe:=sort([classe]): *les dates sont classées pour pouvoir compter les coïncidences par balayage*
ncouple:=0: ntriple:=0: *nombre de couples, de triples*
debut:=1: *début de la tranche "coïncidence"*
while debut<36 do
q:=1: *effectif de la tranche "coïncidence"*
for k from debut+1 to 36 do *tant que ça coïncide on incrémente le compteur et on continue*
if classe[k]=classe[debut] then q:=q+1: ndebut:=k+1: else ndebut:=k: k:=36: fi:
od: *on termine une coïncidence d'ordre q. La prochaine commence à ndebut*
coincid[q]:=coincid[q]+1:
if ndebut=36 then coincid[1]:=coincid[1]+1: fi: *cas particulier dernière année isolée*
if q=2 then ncouple:=ncouple+1: fi:
if q=3 then ntriple:=ntriple+1: fi:
debut:=ndebut:
od:

```
  if ncouple=1 and ntriple=0 then fav:=fav+1: fi:          un évènement
favorable
od: classe suivante
 s:=0: for i to 7 do s:=s+coincid[i]*i: od:

 print (`vérification effectif total 36 x 10000`,s):
 print (`cumul `,coincid):
 print (`exactement un triple`,fav):
```

Remarque :
Les deux logiciels utilisés sont complémentaires.

Dans un premier temps, le tableur permet une meilleure vision d'ensemble. Je n'ai utilisé que 19 expériences car, à cause d'une connaissance insuffisante de l'outil, je n'ai pas su comment trier automatiquement l'ensemble des résultats colonne par colonne. L'aurais-je su que j'aurais pu faire intervenir un bien plus grand nombre d'expériences.

Dans un second temps, l'utilisation de logiciels tels que MAPLE, XCas, Python ou SciLab pour n'en citer que quelques-uns permet de passer à des vérifications plus fines, qui nous permettent de quasi-certitudes.

Passons maintenant à la démonstration de certaines des conjectures qu'on a pu exprimer.

3. *Calcul de la probabilité d'avoir exactement 2 personnes avec le même anniversaire, les anniversaires des autres personnes étant tous différents.*

Soit E_2 l'évènement : « 2 personnes exactement de l'assemblée de 36 personnes ont un anniversaire commun ».

Alors, on a :

- 365 choix pour la date de l'anniversaire commun ;
- $\binom{36}{2}$ choix des 2 personnes ayant cet anniversaire commun ;
- A_{364}^{34} choix de la suite des 364 dates différentes 2 à 2 et différentes de l'anniversaire commun pour les 36 – 2 = 34 autres personnes.

Donc : $$card(E_2) = 365 * \binom{36}{2} * A_{364}^{34}$$

Et $$p(E_2) = \frac{card(E_2)}{card(\Omega)} = \frac{365 * \binom{36}{2} * A_{364}^{34}}{365^{36}} \approx 0,3204 .$$

Ce résultat est assez différent du résultat expérimental obtenu par tableur, mais comme le nombre d'expériences faites est trop petit (19), cela n'est pas étonnant.

Il est nécessaire dans ce cas, d'augmenter le nombre des expériences pour accroître la fiabilité du résultat expérimental.
Il est certainement possible de le faire en utilisant un tableur, mais ici, l'utilisation d'un logiciel de calcul apparaît plus efficace.

4. *Calcul de la probabilité d'avoir exactement 3 personnes avec le même anniversaire, les anniversaires des autres personnes étant tous différents. Généralisation.*

Soit E_3 l'évènement : « 3 personnes exactement de l'assemblée de 36 personnes ont un anniversaire commun. Les anniversaires des autres personnes sont tous différents et en particulier, il n'y a pas de couple parmi les 33 autres ».

Alors, on a :

- 365 choix pour la date de l'anniversaire commun ;
- $\binom{36}{3}$ choix des 3 personnes ayant cet anniversaire commun ;
- A_{364}^{33} choix de la suite des 33 dates différentes 2 à 2 et différentes de l'anniversaire commun pour les $36-3=33$ autres personnes.

Donc : $$card(E_3)=365*\binom{36}{3}*A_{364}^{33}$$

et $$p(E_3)=\frac{card(E_3)}{card(\Omega)}=\frac{365*\binom{36}{3}*A_{364}^{33}}{365^{36}}\approx 0,0110.$$

Ce cas ne s'est pas produit dans les expériences faites, ce qui s'explique facilement par le résultat théorique obtenu (on a environ 1 chance sur 100 de réaliser E_3).

Généralisation :
Soit E_k l'évènement : « k personnes exactement de l'assemblée de 36 personnes ont un anniversaire commun avec $k\in\mathbb{N}\,;2\le k\le 36$. Il y a exactement une coïncidence d'ordre k et pas d'autre coïncidence parmi les $36-k$ autres anniversaires. »

Alors, on a :

- 365 choix pour la date de l'anniversaire commun ;
- $\binom{36}{k}$ choix des k personnes ayant cet anniversaire commun ;
- A_{364}^{36-k} choix de la suite des $36-k$ dates différentes 2 à 2 et différentes de l'anniversaire commun pour les $36-k$ autres personnes.

Donc : $$card(E_k)=365*\binom{36}{k}*A_{364}^{36-k}$$

et $$p(E_k)=\frac{card(E_k)}{card(\Omega)}=\frac{365*\binom{36}{k}*A_{364}^{36-k}}{365^{36}}.$$

À la calculatrice, on obtient les résultats suivants :

k	2	3	4	5	6
$p(E_k)$	$\approx 0{,}3204$	$\approx 0{,}0110$	$\approx 0{,}0003$	$\approx 5*10^{-6}$	$\approx 8*10^{-8}$

5. Calcul de la probabilité d'avoir exactement 2 paires disjointes de personnes ayant un anniversaire commun, la première paire ayant une date commune d'anniversaire, la deuxième paire ayant une date commune d'anniversaire, ces deux dates d'anniversaires étant différentes, les anniversaires des autres personnes étant tous différents.

Soit $E_{2;2}$ l'évènement : « 2 paires de personnes exactement de l'assemblée de 36 personnes ont des anniversaires communs, les deux dates d'anniversaire étant différentes, et pas de coïncidence d'ordre supérieur ».

Alors, on a :

- 365 choix pour la date de l'anniversaire commun de la première paire ;
- $\binom{36}{2}$ choix des deux personnes ayant cet anniversaire commun ;
- 364 choix pour la date de l'anniversaire commun de la deuxième paire ;
- $\binom{34}{2}$ choix des deux personnes ayant cet anniversaire commun ;
- On doit diviser par 2 pour ne pas avoir de répétition ;
- A_{363}^{32} choix de la suite des $36-2*2=32$ dates différentes 2 à 2 choisies parmi les $365-2=363$ dates différentes des 2 anniversaires communs pour les $36-4=32$ autres personnes.

Donc : $$card(E_{2;2}) = 365*\binom{36}{2}*364*\binom{34}{2}*\frac{1}{2}*A_{363}^{32}$$

et $$p(E_{2;2}) = \frac{card(E_{2;2})}{card(\Omega)} = \frac{365*\binom{36}{2}*364*\binom{34}{2}*\frac{1}{2}*A_{363}^{32}}{365^{36}} \approx 0{,}2715.$$

Là aussi, la comparaison avec les 42,11% expérimentaux n'est pas très probante, mais comme précédemment, ce résultat expérimental n'entre certainement pas en contradiction avec la théorie.
Pour le vérifier, on pourrait faire une étude statistique.

<u>Généralisation :</u>
Soit $E_{2;k}$ l'évènement : « k paires de personnes exactement de l'assemblée de 36 personnes ont des anniversaires communs avec : $1 \le k \le 18$, les dates anniversaires des paires considérées étant différentes et les dates anniversaires des autres personnes étant toutes différentes aussi ».

Le raisonnement précédent permet d'obtenir le résultat général suivant :

$$card(E_{2;k}) = 365 * \binom{36}{2} * 364 * \binom{34}{2} * ... * (365 - k + 1) * \binom{36-2*k+2}{2} \frac{1}{k!} * A_{365-k}^{36-2*k}$$

et : $$p(E_{2;k}) = \frac{card(E_{2;k})}{card(\Omega)}.$$

À la calculatrice, on obtient les résultats suivants :

k	1	2	3	4	5	6
$p(E_{2;k})$	0,3204	0,2715	0,1352	0,0526	0,0100	0,0016

Vérification :

0,3204+0,2715+0,1352+0,0526+0,0100+0,0016+0,0110+0,0003=0,8026.

Ce résultat est proche de 0,8322.

Autre approche :

On peut avoir l'idée de calculer les résultats précédents de proche en proche.

Soit donc :

$u_k = p(E_{2;k})$ pour k entier naturel supérieur ou égal à 1 et inférieur ou égal à 18.

Cherchons une formule de récurrence reliant u_k et u_{k+1}.

$$u_k = \frac{365 * \binom{36}{2} * 364 * \binom{34}{2} * ... * (365 - k + 1) * \binom{36-2*k+2}{2} * \frac{1}{k!} * A_{365-k}^{36-2*k}}{365^{36}} ;$$

$$u_{k+1} = \frac{365 * \binom{36}{2} * 364 * \binom{34}{2} * ... * (365 - k + 1) * \binom{36-2*k+2}{2} * (365 - k) * \binom{36-2*k}{2} * \frac{1}{(k+1)!} * A_{365-k-1}^{36-2*k-2}}{365^{36}}$$

Donc :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{(365 - k) * \binom{36-2*k}{2} * \frac{1}{(k+1)!} * A_{365-k-1}^{36-2*k-2}}{\frac{1}{k!} * A_{365-k}^{36-2*k}} =$$

$$\frac{(365 - k) * \binom{36-2*k}{2}}{k+1} * \frac{(365 - k - 1)!}{(328 + k + 1)!} * \frac{(328 + k)!}{(365 - k)!} = \frac{(18 - k) * (35 - 2 * k)}{(k+1) * (329 + k)}$$

Soit : $$g(k) = \frac{(18 - k) * (35 - 2 * k)}{(k+1) * (329 + k)} ;$$

$$u_1 = \frac{365 * \binom{36}{2} * A_{364}^{34}}{365^{36}}$$

et
$$u_{k+1} = g(k) * u_k .$$

On peut faire le calcul sur tableur. On obtient les résultats vus plus haut.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	**k**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	
2	**g(k)**	0,85	0,4995	0,3276	0,227	0,1622	0,1177	0,0859	0,0626	0,0453	0,0322	0,0223	0,0149	0,0094	0,0054	0,0027	0,001	0,0002	0	
3	**u(k)**	0,3204	0,2723	0,136	0,0446	0,0101	0,0016	0,0002	2E-05	1E-06	5E-08	2E-09	3E-11	5E-13	5E-15	3E-17	7E-20	7E-23	1E-26	0
4																				

Conclusion.

Les probabilités constituent un domaine intéressant où réflexion théorique et expérimentation logicielle se renforcent mutuellement en permettant en amont de formuler des conjectures et en aval de vérifier les résultats théoriques obtenus.

Je remercie Messieurs Lafond, Marchivie et Thomassin pour leur aide avec leurs remarques, corrections et compléments.

MISE EN PAGE :
Françoise BESSE

COMITÉ DE RÉDACTION ET DE LECTURE :
Michel BRIDENNE
Catherine LABRUERE CHAZAL
Michel LAFOND
Julien LYOTARD
Alain MASCRET
Jean-François MUGNIER
Marie-Noëlle RACINE
Jean-Marie THOMASSIN

RÉDACTEUR EN CHEF :
Catherine LABRUERE CHAZAL

DIRECTEUR DE LA PUBLICATION :
Catherine LABRUERE CHAZAL, Directrice de l'IREM

DÉPÔT LÉGAL :
n° 202 – 1er semestre 2012

IMPRESSION :
Service Reprographie

FEUILLE DE VIGNE
Université de Bourgogne – UFR Sciences et Techniques
IREM
9 Avenue Alain Savary – BP 47870 – 21078 Dijon cedex
☎ 03 80 39 52 30 – Fax 03 80 39 52 39
@ : iremsecr@u-bourgogne.fr.
http://math.u-bourgogne.fr/IREM