N° 126 – Décembre 2012

Feuille de Vigne

Irem de Dijon

- ✓ Les comptes faits de M Barreme
- ✓ Apprentis chercheurs sur la conjecture d'Erdös-Straus
- ✓ Humour, Littérature et Mathématiques

Revue Trimestrielle

Issn 0246-5752

Sommaire

Éditorial

Dans ce numéro :

Marie-Noëlle Racine propose des activités (fin de cycle 3 et collège) autour des tarifs et conversions ayant cours au XVII^{ème} siècle au sujet des deniers, septiers muids et autres boisseaux. C'est l'occasion de découvrir le sieur François Barrême, mathématicien français et les antonomases.

Marie-Line et Denis Gardes rendent compte (Première partie) d'une expérimentation en classe de TS sur une conjecture d'Erdös-Straus. Passionnant.

Michel Lafond essaie de nous faire rire avec des blagues de matheux, oubliant de dire qu'on peut rire de tout mais pas avec n'importe qui.

Enfin, une lettre de Henry Plane donne des compléments à l'article paru dans la FdV 125 (M-N Racine) sur la technique de multiplication avec les mains.

Ce sont deux amis au restaurant, qui parlent des blondes. Jean prétend qu'elles sont aussi intelligentes que les autres, ce qui n'est pas de l'avis de Pierre. Pendant que Pierre s'absente aux toilettes, Jean fait signe à la serveuse, une belle blonde, et en glissant un billet de 10 € lui dit :

- J'ai fait un pari avec mon ami, dans quelques minutes je vous appellerai et je vous poserai une question. Vous n'aurez qu'à répondre "X 3 sur 3". Ne cherchez pas à comprendre. Vous voulez bien ?
- S'il n'y a que ça, je veux bien.
- Répétez la réponse pour voir.
- X 3 sur 3.
- C'est bon, à tout de suite.
Lorsque Pierre revient, Jean lui dit :
- A propos de blondes, tu vois la serveuse là-bas ? Je te parie 20 € qu'elle connaît les bases du calcul intégral.
- Tu plaisantes, dit Pierre ? Pari tenu.
Jean appelle la serveuse et lui dit :
- Mademoiselle, pouvez-vous me donner la primitive de X 2 ?
Aussitôt, la serveuse répond
- "X 3 sur 3".
Pierre n'en revient pas. Pendant que la serveuse repart, il sort un billet de 20 €.
La serveuse se retourne alors et dit en souriant :
- A une constante près.

Michel Lafond

Jeux et Problèmes

Michel LAFOND
mlafond001@yahoo.fr

JEU – 76.

Avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 et les 4 opérations, on peut approcher π à $2.\ 10^{-3}$ près par

$$\pi \approx 3 + \frac{1}{5+4-2} = 3{,}1428\ldots$$

Faites de même :
en approchant π à $8.\ 10^{-5}$ près avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6 et les 4 opérations,
en approchant π à $3.\ 10^{-7}$ près avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et les 4 opérations.

PROBLÈME – 76.

Démontrer pour tout x réel l'égalité :

$$(11^x + 111^x)^{10} \times (1001^{10} + 10101^{10})^x = (11^{10} + 111^{10})^x \times (1001^x + 10101^x)^{10}$$

Solutions

JEU – 75.

Démontrer sans calculette que :

$$\frac{(9994^4+4)(9998^4+4)}{(9995^4+4)(9996^4+4)} = \frac{(9993^2+1)(9999^2+1)}{(9994^2+1)(9996^2+1)}$$

Solution :

La clé est l'identité remarquable

$$a^4 + 4\,b^4 = (a^2 + 2ab + 2\,b^2)\,(a^2 - 2ab + 2\,b^2)$$

On a donc :

$$\frac{(x+1)^4+4}{(x+2)^4+4} \times \frac{(x+5)^4+1}{(x+3)^4+4} =$$
$$\frac{((x+1)^2+2(x+1)+2)\,((x+1)^2-2(x+1)+2)}{((x+2)^2+2(x+2)+2)\,((x+2)^2-2(x+2)+2)} \times \frac{((x+5)^2+2(x+5)+2)\,((x+8)^2-2(x+5)+2)}{((x+3)^2+2(x+3)+2)\,((x+3)^2-2(x+3)+2)} =$$
$$\frac{(x^2+4x+5)\,(x^2+1)}{(x^2+6x+10)\,(x^2+2x+2)} \times \frac{(x^2+12x+37)\,(x^2+8x+17)}{(x^2+8x+17)(x^2+4x+5)} = \frac{(x^2+1)\,(x^2+12x+37)}{(x^2+2x+2)(x^2+6x+10)} =$$
$$\frac{(x^2+1)\,((x+6)^2+1)}{((x+1)^2+1)((x+3)^2+1)}$$

Il n’y a plus qu’à remplacer x par 9993.

PROBLÈME – 75.

Pour résoudre l’équation (1) $e^{x-2} + e^{x+8} = e^{4-x} + e^{3x+2}$ un élève dit :

On sait que $e^a + e^b = e^{a+b}$ et que l’exponentielle est bijective.
Donc (1) $\Leftrightarrow$ $(x-2)(x+8) = (4-x)(3x+2)$
Je développe : $x^2 + 6x - 16 = -3x^2 + 10x + 8$
Je réduis : $4x^2 - 4x - 24 = 0$
Je factorise : $4(x+2)(x-3) = 0$
Les solutions sont $x = -2$ ou $x = 3$.

Quelle note lui mettez-vous ?

Solutions :

Solution proposée par Alain GUILLON (collège Abel Minard à TONNERRE) :

On ne peut que relever la contre-vérité avancée par cet élève pour étayer sa démarche :
l’égalité $e^a + e^b = e^{a.b}$ n’est manifestement pas vraie pour tous a et b. Il suffit, pour s’en convaincre si nécessaire, de choisir $a = b = 1$. Cependant, avant de noter le travail de notre étudiant, on ne peut s’empêcher de constater que ses « solutions » - celles de l’équation (1’) - vérifient aussi l’équation (1).
Comment lever ce paradoxe ?

D’abord, résolvons ladite équation :

Multiplions les deux membres de (1) par e^{x+2} $\quad e^{2x} + e^{2x}\, e^{10} = e^6 + e^{4x}\, e^4$
posons $X = e^{2x}$ $\quad X + e^{10}\, X = e^6 + X^2\, e^4$
réduisons $\quad e^4\, X^2 - (e^{10} + 1)\, X + e^6 = 0$ notée (1’’)
le discriminant est $\quad \Delta = (e^{10} + 1)^2 - 4\, e^4\, e^6$
qui se réduit puis factorise en $\quad \Delta = (e^{10} - 1)^2$, strictement positif

les deux racines sont $X_1 = e^{6}$ et $X_2 = e^{-4}$

l'exponentielle étant bijective (l'élève a raison sur ce point), on obtient

$$x_1 = (\ln e^{6}) / 2 = 3 \text{ et } \quad x_2 = (\ln e^{-4}) / 2 = -2,$$

qui sont précisément les solutions avancées par notre élève, décidément chanceux.

Mais s'agit-il de chance ? N'y aurait-il pas là dessous quelque stratagème caché ? Essayons de résoudre, à la manière de l'élève, une équation (2) ressemblant à (1), choisie (presque) au hasard.

Résoudre l'équation (2) $e^{x-2} + e^{x+8} = e^{10-x} + e^{3x-8}$

l'élève obtient $(x - 2)(x + 8) = (10 - x)(3x - 8)$ notée équation (2')

il développe $x^2 + 6x - 16 = -3x^2 + 38x - 80$

il réduit $4x^2 - 32x - 64 = 0$

il factorise $4(x - 4)^2 = 0$

Ainsi, $x = 4$ est solution unique de (2').

Mais cette valeur n'est pas solution de (2) : $e^{2} + e^{12} > 160\,000$, alors que $e^{6} + e^{4} < 500$.

Alors, qu'est-ce qui a permis à cet élève de trouver les bonnes solutions de (1), là où il aurait échoué avec l'équation (2) ?

La réponse se trouve dans le calcul des exposants :

Dans (1), pour $x = -2$, on trouve successivement : -4 ; 6 ; 6 et -4

pour $x = 3$, on trouve successivement : 1 ; 11 ; 11 et 1.

Dans (2), pour $x = 4$, on trouve successivement : 2 ; 12 ; 6 et 4.

La « réussite » de l'élève tient au fait que l'équation (1) est vérifiée lorsque les termes du 1er membre sont rigoureusement identiques à ceux du second membre. A, B, C et D désignant des nombres,

{A = C et B = D} ou {A = D et B = C} $\Rightarrow$ $e^{A} + e^{B} = e^{C} + e^{D}$. Il s'agit là d'une condition suffisante.

Nous laisserons au lecteur le soin de la recherche d'une condition nécessaire, et nous contenterons de constater que les expressions affines des exposants avaient été « bien » choisies dans l'équation (1).

Par ailleurs, {A = C et B = D} ou {A = D et B = C} $\Rightarrow$ AB = CD, d'où la démarche de l'élève.

On remarquera que, à contrario, AB = CD n'implique pas {A = C et B = D} ou {A = D et B = C}, ce qui explique l'échec dans l'exemple de l'équation (2).

Enfin, le choix des exposants de l'équation (1), notamment des coefficients de l'inconnue x, a mené à l'obtention d'une équation du second degré (1'') lors la résolution par le professeur. On pourrait étudier les situations où le degré est plus élevé. On ouvre alors un autre champ de questionnements que nous ne développerons pas ici.

Pour répondre – enfin – à la question du problème, celle de l'évaluation de l'élève, il convient de clarifier ce que l'on attendait de lui. Qu'il utilise une démarche rigoureuse ? C'est perdu ! Qu'il trouve les solutions ? Gagné !
L'enseignant privilégiera sans doute la première compétence.
Par contre, si l'élève avait testé ses « solutions », validant ainsi ses réponses, on aurait pu valoriser cette dernière démarche.

Solution de Michel Lafond :

La démonstration de l'élève est fantaisiste, mais le résultat est exact car :
Si on pose $e^x = X$ on a :
(1) $\Leftrightarrow$ $e^{-2}X + e^8X = e^4/X + e^2X^3 \Leftrightarrow e^2X^4 - (e^{-2} + e^8)X^2 + e^4 = 0$
$\Leftrightarrow e^2(X^2 - e^{-4})(X^2 - e^6) = 0$

Les solutions sont $e^{2x} = X^2 = e^{-4}$ ou $e^{2x} = X^2 = e^6$
D'où l'on tire $x = -2$ ou $x = 3$.

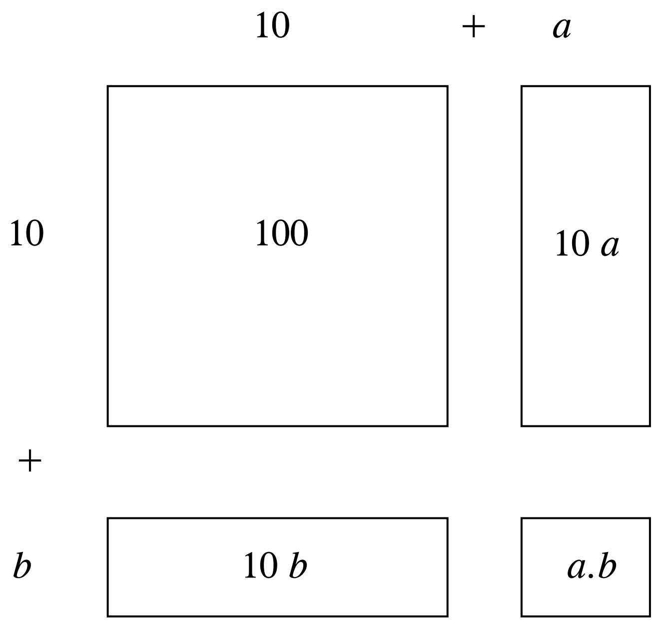
Courrier des lecteurs

Lettre envoyée par M. Henry Plane

Les divers numéros de *Feuille de Vigne* sont toujours bienvenus chez moi. J'y ai beaucoup appris. C'est pourquoi je me permets de vous communiquer quelques compléments pour l'article concernant la technique de la multiplication citée dans le livre d'Arnauld de 1667 (FdV 125).

- Un procédé similaire peut être utilisé entre 10 et 15.

Ainsi : soit à trouver le résultat de 13 × 14.
Pour 13 : 3 doigts levés ; pour 14 : 4 doigts levés.
On dira : 100 + (3 + 4) dizaines + (3 × 4)
100 + 70 + 12 = 182.
Quant à la démonstration, elle apparaît facilement en géométrie :



Ici, *a* est le nombre de doigts levés d'une main, *b* est le nombre de doigts levés de l'autre main.
Il est dommage que nous n'ayons que cinq doigts par main ….

- Par ailleurs, j'ai lu que le moine mathématicien Alcuin (735-804), abbé de Saint Martin de Tours, qui était venu de York vers 782 pour aider Charlemagne (742-814) à dresser un projet d'éducation pour le royaume, usait du procédé cité.
- Enfin, personnellement, j'ai été instruit de cette méthode par une vieille paysanne auvergnate à qui cela avait été enseigné à l'école à la fin du XIX^{e} siècle. Elle n'avait eu à apprendre les tables de multiplication que jusqu'à celle de cinq !

Les Comptes faits de M. Barreme

Activités au cours moyen ou au collège.

Marie-Noëlle RACINE
mnracine@orange.fr

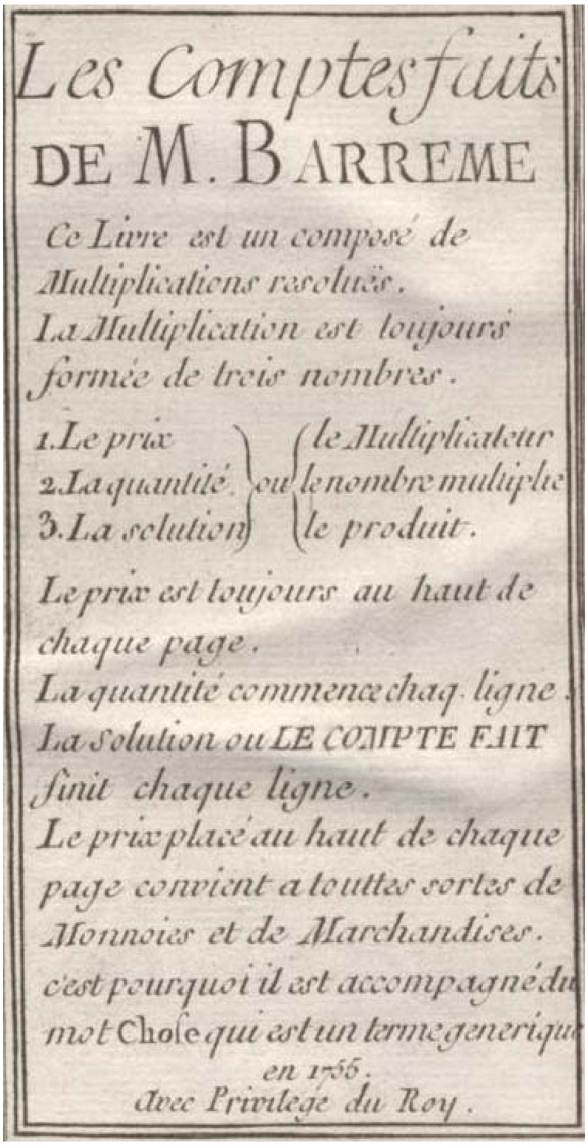
Résumé : utilisation d'un livre de comptes faits du sieur BARREME, manipulation d'unités de mesures dans un système de numération non décimal.
Ces activités peuvent être menées en fin de cycle 3 de l'école élémentaire ou en collège.

Mots-clé : Barreme, numération, tarifs, multiplications, conversions.

.

À une époque où la population dans son ensemble et les commerçants en particulier avaient du mal à compter dans un système de numération non décimal, le sieur BARREME, François, (1638 ; 1703) eut l'idée de produire un livre de « comptes faits » où toutes sortes de multiplications sont proposées : pour chaque prix unitaire, les prix de plusieurs articles sont calculés et notés sur les pages de ce livre de « *comptes faits* », autrement dit, il s'agit d'un livre de tables de multiplications, destinées à éviter des calculs fastidieux. Compte tenu de la grande utilité de ce type de livre, il a été souvent réédité, adapté aux nouvelles monnaies jusqu'à la fin du XIX^{e} siècle.

Les extraits photographiés ci-dessous proviennent de l'exemplaire écrit en 1755 et publié en MDCCLXXI.


Les Comptes faits
DE M. BARREME
Ce Livre est un composé de
Multiplications resoluës.
La Multiplication est toujours
formée de trois nombres.
1. Le prix ⎫ ⎧ le Multiplicateur
2. La quantité ⎬ ou ⎨ le nombre multiplie
3. La solution ⎭ ⎩ le produit.
Le prix est toujours au haut de
chaque page.
La quantité commence chaq. ligne.
La Solution ou LE COMPTE FAIT
finit chaque ligne.
Le prix placé au haut de chaque
page convient a touttes sortes de
Monnoies et de Marchandises.
c'est pourquoi il est accompagné du
mot Chose qui est un terme generique
en 1756.
Avec Privilege du Roy.

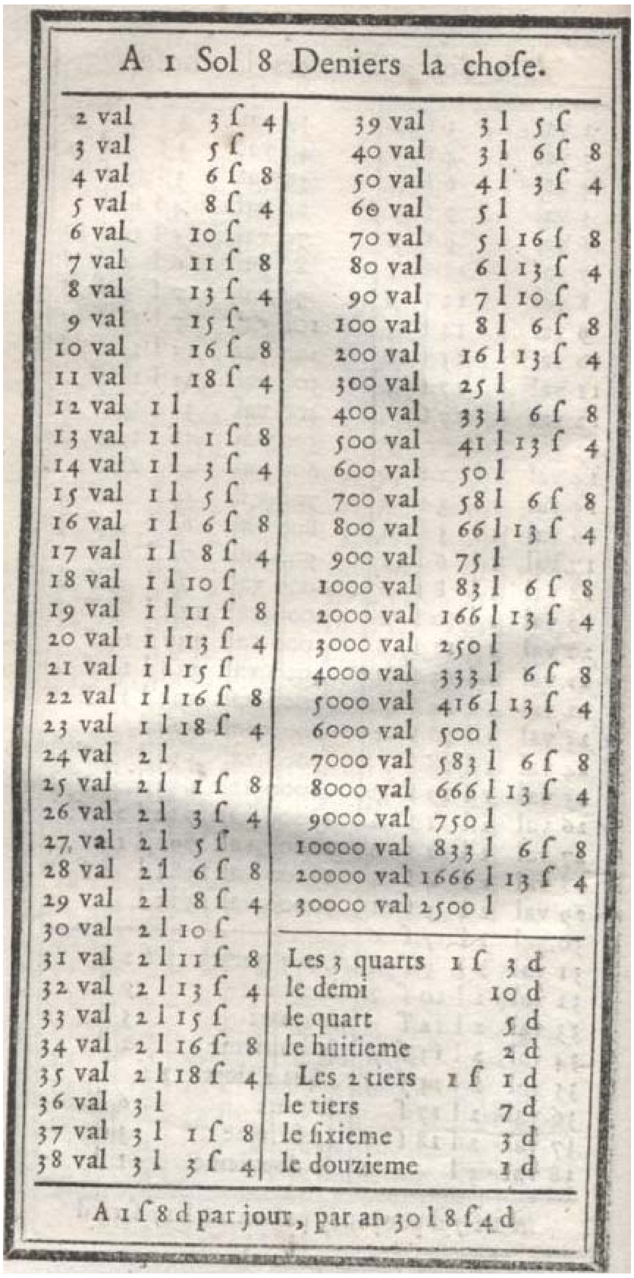
Ce livre est un composé de
Multiplications résoluës.
La Multiplication est toujours
formée de trois nombres.

1. *Le prix* ⎫ ⎧ *le Multiplicateur*
2. *La quantité* ⎬ ou ⎨ *le nombre multiplié*
3. *La solution* ⎭ ⎩ *le produit*

Le prix est toujours au haut de
chaque page.
La quantité commence chaq[ue] ligne.
La solution ou LE COMPTE FAIT
finit chaque ligne.
Le prix placé au haut de chaque
page convient a touttes sortes de
Monnoies et de Marchandises.
c'est pourquoi il est accompagné du
mot Chose qui est un terme générique.
en 1755
Avec le Privilège du Roy.

Les comptes faits
ou
le tarif général
de touttes les
monnoyes.

Ce Vend 50 sols a Paris chés
les Libraires
Associés

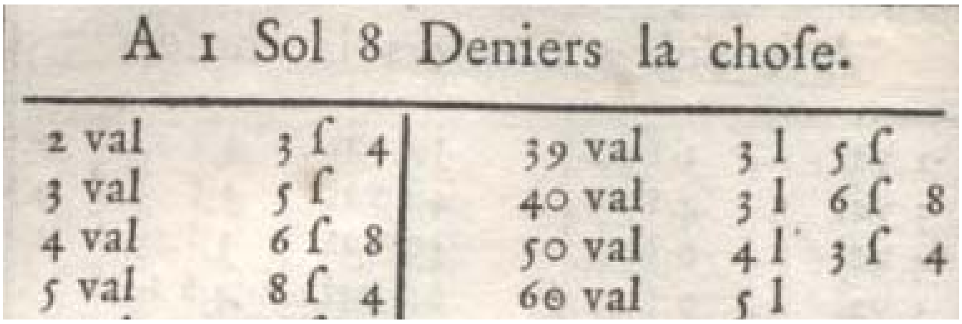


A 1 Sol 8 Deniers la choſe.

2 val		3 ſ	4	39 val	3 l	5 ſ	
3 val		5 ſ		40 val	3 l	6 ſ	8
4 val		6 ſ	8	50 val	4 l	3 ſ	4
5 val		8 ſ	4	60 val	5 l		
6 val		10 ſ		70 val	5 l	16 ſ	8
7 val		11 ſ	8	80 val	6 l	13 ſ	4
8 val		13 ſ	4	90 val	7 l	10 ſ	
9 val		15 ſ		100 val	8 l	6 ſ	8
10 val		16 ſ	8	200 val	16 l	13 ſ	4
11 val		18 ſ	4	300 val	25 l		
12 val	1 l			400 val	33 l	6 ſ	8
13 val	1 l	1 ſ	8	500 val	41 l	13 ſ	4
14 val	1 l	3 ſ	4	600 val	50 l		
15 val	1 l	5 ſ		700 val	58 l	6 ſ	8
16 val	1 l	6 ſ	8	800 val	66 l	13 ſ	4
17 val	1 l	8 ſ	4	900 val	75 l		
18 val	1 l	10 ſ		1000 val	83 l	6 ſ	8
19 val	1 l	11 ſ	8	2000 val	166 l	13 ſ	4
20 val	1 l	13 ſ	4	3000 val	250 l		
21 val	1 l	15 ſ		4000 val	333 l	6 ſ	8
22 val	1 l	16 ſ	8	5000 val	416 l	13 ſ	4
23 val	1 l	18 ſ	4	6000 val	500 l		
24 val	2 l			7000 val	583 l	6 ſ	8
25 val	2 l	1 ſ	8	8000 val	666 l	13 ſ	4
26 val	2 l	3 ſ	4	9000 val	750 l		
27 val	2 l	5 ſ		10000 val	833 l	6 ſ	8
28 val	2 l	6 ſ	8	20000 val	1666 l	13 ſ	4
29 val	2 l	8 ſ	4	30000 val	2500 l		
30 val	2 l	10 ſ					
31 val	2 l	11 ſ	8	Les 3 quarts		1 ſ	3 d
32 val	2 l	13 ſ	4	le demi			10 d
33 val	2 l	15 ſ		le quart			5 d
34 val	2 l	16 ſ	8	le huitieme			2 d
35 val	2 l	18 ſ	4	Les 2 tiers		1 ſ	1 d
36 val	3 l			le tiers			7 d
37 val	3 l	1 ſ	8	le ſixieme			3 d
38 val	3 l	3 ſ	4	le douzieme			1 d

A 1 ſ 8 d par jour, par an 30 l 8 ſ 4 d

Une page du livre dont nous allons exploiter divers renseignements.



A 1 Sol 8 Deniers la choſe.

2 val		3 ſ	4	39 val	3 l	5 ſ	
3 val		5 ſ		40 val	3 l	6 ſ	8
4 val		6 ſ	8	50 val	4 l	3 ſ	4
5 val		8 ſ	4	60 val	5 l		

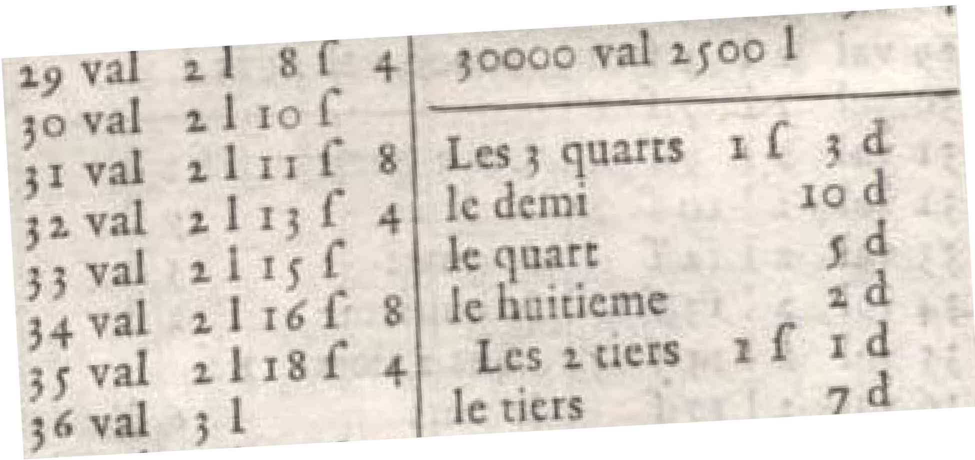
« A 1 Sol 8 Deniers la chose. » signifie que dans cette page on donne les prix de plusieurs choses dont une seule coûte 1 sol et 8 deniers.
« A 1 Sol 8 Deniers la chose. 2 val 3 s 4 » signifie que « Si 1 chose vaut 1 sol et 8 deniers, 2 de ces mêmes choses valent ensemble 3 sols et 4 deniers »
Aujourd'hui, avec notre monnaie, si 1 chose vaut 1 euro et 8 centimes, alors 2 de ces mêmes choses valent ensemble 2 euros et 16 centimes. À notre époque, 1 euro vaut 100 centimes (ou 100 cents), mais, en 1771, à l'époque où le livre a été imprimé, 1 sol vaut …. un certain nombre de deniers, mais le livre ne dit pas combien ! De même, il ne dit pas combien de sols vaut 1 (une) livre.

Les recherches que l'on peut proposer aux élèves :

1°) Sur la page photographiée ci-dessus, on apprend que si 1 chose vaut 1 sol 8 deniers, alors 2 choses valent 3 sols 4 deniers, sauriez-vous calculer combien il faut de deniers pour faire 1 sol ?

2°) Sur cette page, on lit que 39 choses valent 3 livres et 5 sols, sauriez-vous dire combien de sols correspondent à 1 (une) livre ?

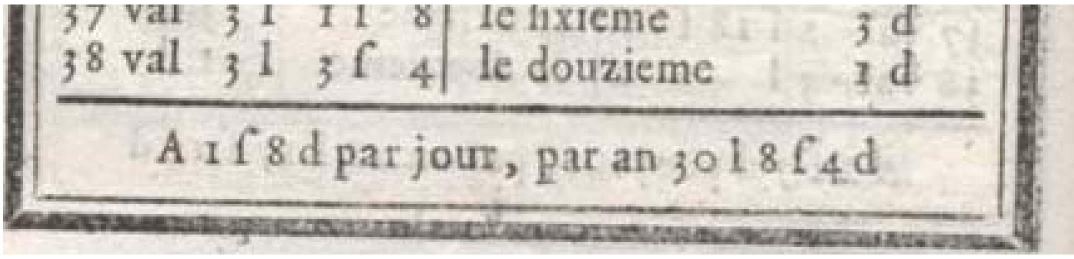
3°) En bas, à droite de chaque page du livre de « comptes faits », on trouve les valeurs des fractions de la chose.
Sur cette page, on peut lire que si 1 chose vaut 1 sol 8 deniers, alors 3 quarts (¾) de la chose valent 1 sol 3 deniers.
De même on lit : si 1 chose vaut 1s 8d alors, les 2 tiers (⅔) valent 1s 1d.



29 val	2 l	8 ſ	4	30000 val 2500 l				
30 val	2 l	10 ſ						
31 val	2 l	11 ſ	8	Les 3 quarts	1 ſ	3 d		
32 val	2 l	13 ſ	4	le demi		10 d		
33 val	2 l	15 ſ		le quart		5 d		
34 val	2 l	16 ſ	8	le huitieme		2 d		
35 val	2 l	18 ſ	4	Les 2 tiers	1 ſ	1 d		
36 val	3 l			le tiers		7 d		

Vérifiez les résultats donnés par le livre. Les valeurs données sont-elles exactes ou approchées ?

4°) La dernière ligne de chaque page donne la valeur d'une année : à 1 sol 8 deniers par jour, par an 30 livres 8 sols 4 deniers.



37 val	3 l	11	8	le sixieme	3 d
38 val	3 l	5 ſ	4	le douzieme	1 d

A 1 ſ 8 d par jour, par an 30 l 8 ſ 4 d

Sauriez-vous calculer combien on comptait de jours dans 1 an ?

5°) le muid, le septier, le boisseau sont des unités de mesure pour la quantité d'avoine. Là encore, les correspondances entre ces unités ne sont pas indiquées dans le livre

TARIF

A tant le MUID d'AVOINE, combien le SEPTIER & le BOISSEAU.

Prix du Muid,		du Septier,	du Boiſſeau.	
à 48 l le muid	1 ſeptier	4 l	1 boiſ.	3 ſ 4 d
51 l	1	4 l 5 ſ	1	3 ſ 6 d
54 l	1	4 l 10 ſ	1	3 ſ 9
57 l	1	4 l 15 ſ	1	3 ſ 11
60 l	1	5 l	1	4 ſ 2
63 l	1	5 l 5 ſ	1	4 ſ 4
66 l	1	5 l 10 ſ	1	4 ſ 7
69 l	1	5 l 15 ſ	1	4 ſ 9

a]Sachant que 1 muid vaut 48 livres et que 1 septier vaut 4 livres, combien de septiers sont contenus dans 1 muid ?

b] Sachant que 1 septier vaut 4 livres et que 1 boisseau vaut 3 sols et 4 deniers, combien de boisseaux sont contenus dans 1 septier ?

c] Déduire des questions précédentes combien de boisseaux sont contenus dans 1 muid.

Réponses :

1°) Comme $1s + 8d + 1s + 8d = 2s + 16d$, alors 2 sols 16 deniers sont aussi 3 sols 4 deniers. Ainsi, 1 sol vaut 12 deniers.

2°) Comme $39 \times (1s + 8d) = 3l + 5s$, alors $39s + 312d = 3l + 5s$,
càd : $39s + 26s = 3l + 5s$, ou encore : $65s = 3l + 5s$, soit : $60s = 3l$.
Ainsi, 1 livre vaut 20 sols.

3°) $(1s + 8d) \times 3 / 4 = 20d \times 3 / 4 = 15d = 1s\ 3d$. la valeur donnée pour les 3 quarts d'une chose est exacte.
$(1s + 8d) \times 2 / 3 = 20d \times 2 / 3 = 40 / 3d = 13d + 1 / 3d = 1s\ 1d + 1 / 3d \approx 1s + 1d$
Le résultat donné pour les 2 tiers d'une chose est approché.

4°) $30l + 8s + 4d = 30 \times 20 \times 12d + 8 \times 12d + 4d$
soit $30l + 8s + 4d = 7\,200d + 96d + 4d$, ou encore : $30l + 8s + 4d = 7\,300d$.
$1s + 8d = 1 \times 12d + 8d$, soit $1s + 8d = 20d$.
$7\,300 / 20 = 365$. Pour calculer le prix à payer par an si chaque jour est payé 1 sol et 8 deniers, le sieur Barrême a compté qu'il y a 365 jours dans une année.

5°) a] À 48 livres le muid, 1 septier vaut 4 livres. Autrement dit, 1 muid contient $48 / 4 = 12$ septiers. 1 muid = 12 septiers.

b] À 4 livres le septier, 1 boisseau vaut 3 sols et 4 deniers. Autrement dit, 1 septier vaut $4 \times 20 \times 12$, soit 960 deniers et 1 boisseau vaut $3 \times 12 + 4$ deniers soit 40 deniers. Or, $960 / 40 = 24$. Ainsi, 1 septier contient 24 boisseaux.

c] Comme $12 \times 24 = 288$ alors, 1 muid contient 288 boisseaux.
Autre méthode : 1 muid vaut $48 \times 20 \times 12$ deniers, 1 muid vaut 11 520 deniers.
Comme $11\,520 / 40 = 288$ alors, 1 muid contient 288 boisseaux.

Ce livre peut être téléchargé sur le site gallica, bibliothèque numérique de la bibliothèque nationale de France (bnf) :
http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k204458g

site wikipedia consulté le 16/11/12 sur la vie de M. François Barrême :
http://fr.wikipedia.org/wiki/Fran%C3%A7ois_Barr%C3%AAme

Apprentis chercheurs sur la conjecture d'Erdös-Straus (première partie)

Marie-Line GARDES
gardes.marie-line@wanadoo.fr
Doctorante en didactique des mathématiques.
S2HEP, Université Lyon 1, ENS de Lyon
Denis GARDES
denis.gardes@wanadoo.fr
Professeur, lycée Henri Parriat Montceau-les-mines

Résumé : Dans cet article, nous rendons compte d'une expérimentation en classe de terminale scientifique où les élèves ont pratiqué une activité de recherche mathématique. Après présentation du problème et de quelques éléments mathématiques, nous détaillons le dispositif didactique mis en œuvre dans la classe puis nous analysons les travaux de recherche des élèves.

Mots clés : problème de recherche, terminale scientifique, conjecture d'Erdös-Straus, dimension expérimentale.

Introduction

Depuis plusieurs années, les programmes de l'enseignement secondaire mettent en évidence l'importance de la démarche d'investigation et plus particulièrement, la résolution de problèmes pour l'apprentissage des mathématiques (Houdement 2012). Parallèlement, de nombreux travaux en didactique des mathématiques se sont intéressés à cette problématique dès les années 80 (Brousseau 1986, Arsac et al 1988). Actuellement, ces questions autour de la démarche d'investigation en classe sont toujours discutées (Université d'été Animath[1] en 2004, veille scientifique[2] INRP en 2006, journées mathématiques de l'Ifé 2012) et étudiées (travaux des équipes

[1] Les actes sont publiés dans la brochure APMEP 168 *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire*.
[2] Cette veille a donné lieu à un dossier coordonné par Kuntz, *Démarche expérimentale et apprentissages mathématiques*, en ligne sur le site de l'Ifé.

Math à Modeler[3] et DREAM-RESCO[4]). Ces travaux montrent à la fois l'intérêt des enseignants pour ces pratiques de classes et la difficulté de leur mise en œuvre.
Dans cet article, nous rendons compte d'une expérimentation en classe de terminale scientifique où les élèves ont pratiqué une activité de recherche mathématique. Après avoir présenté le problème de recherche choisi, nous développons un exemple d'une recherche de ce problème. Ensuite, nous détaillons le dispositif didactique mis en œuvre en classe, avec ses différentes phases de recherche illustrées par les travaux des élèves. En les mettant en perspective avec ceux des chercheurs, nous mettons en évidence des similitudes de démarche de recherche. Nous présentons également la séance de synthèse où les connaissances mathématiques en jeu dans la recherche du problème et en lien avec le programme sont explicitées et retravaillées.

Présentation du problème de recherche

Le problème choisi pour cette expérimentation est une conjecture énoncée par Erdös et Straus en 1950 (Erdös, 1950) :

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, il existe trois entiers naturels non nuls et non nécessairement distincts a, b, c tels que $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. [*]

Ce problème a été étudié par plusieurs mathématiciens (Oblath 1950, Rosati 1954, Bernstein 1961, Yamamoto 1964, Mordell 1969, Schinzel 2000, Swett 1999, Mizony 2010) mais n'est actuellement pas résolu. Nous avons choisi un problème non résolu en raison de notre projet d'étudier à la fois la recherche de mathématiciens, d'élèves et d'étudiants sur un même problème. Afin de pouvoir le présenter à un chercheur, il semblait nécessaire qu'il ne soit pas résolu par la communauté mathématique. Pour les élèves et les étudiants, ce caractère n'est pas nécessaire. Cela pourrait être un problème résolu mais ouvert pour eux[5]. Un critère important est la possibilité pour les élèves de s'engager dans la résolution du problème avec leurs connaissances. Ici ce critère est assuré par la familiarité des objets en jeu, à savoir les nombres entiers et les fractions.

Un exemple de recherche

Nous présentons dans ce paragraphe le déroulement d'une recherche de ce problème avec ses hésitations et ses avancées. Nous mettons en évidence des idées stratégiques et des techniques qui ont permis d'établir quelques résultats intermédiaires.
Essayons de trouver des solutions à l'équation [*] pour les premières valeurs de n.

- Si $n = 1$, nous avons : $4 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Ceci est impossible puisque la valeur maximale de $\frac{1}{a}$, de $\frac{1}{b}$ et de $\frac{1}{c}$ est 1.
- Si $n = 2$, il est clair que $\frac{4}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$. Donc pour $n = 2$, c'est possible.

[3] mathsamodeler.ujf-grenoble.fr/
[4] http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/equipes-associees/problemes-et-enseignement-des-mathematiques
[5] Pour une définition du problème ouvert, voir Arsac et Mante 2007.

• Si $n = 3$, nous avons : $\frac{4}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ mais nous avons aussi $\frac{4}{3} = \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$.
Pour $n = 3$, c'est encore possible et on peut noter que la décomposition n'est pas unique.

• Si $n = 4$, il vient immédiatement que : $\frac{4}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$. Cela marche encore pour $n = 4$.

• Si $n = 5$, alors $\frac{4}{5} = \ldots$. Ah, ah, cela ne vient pas immédiatement. $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$. C'est bon pour $n = 5$, mais cela a demandé un effort plus important.

• Si $n = 6$, que nous sommes bêtes ! Il suffit de prendre l'égalité pour $n = 3$ et de la diviser par 2, donc $\frac{4}{6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$. Cette idée nous donne le lemme suivant :

Lemme 1 : S'il existe des entiers *a, b* et *c* tels que $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ alors il existe des entiers *a'*, *b'* et *c'* tels que $\frac{4}{kn} = \frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'}$.
Il suffit de prendre $a' = k\,a$, $b' = k\,b$ et $c' = k\,c$.
Grâce au théorème de décomposition en facteurs premiers, nous en déduisons le résultat suivant :

Lemme 2 : Il suffit de résoudre le problème pour tout entier *n* premier.
Reprenons nos essais.

• Si $n = 7$, alors $\frac{4}{7} = \ldots$. Cela devient moins évident. Ah, nous avons une idée, décomposons $\frac{4}{7}$ avec la plus grande faction de numérateur égal à 1 et inférieure à $\frac{4}{7}$.
Appelons la, la fraction « juste inférieure » à $\frac{4}{7}$. Cette fraction est $\frac{1}{2}$.
Ainsi $\frac{4}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{14} = \frac{1}{2} + \frac{1}{28} + \frac{1}{28}$.
C'est une idée à poursuivre, elle rappelle celle utilisée pour le développement des fractions continues.

• Si $n = 11$, $\frac{4}{11} = \frac{1}{3} + \frac{1}{33} = \frac{1}{3} + \frac{1}{66} + \frac{1}{66}$. L'idée permet d'ébaucher une technique de décomposition.

Vérifions la validité de cette technique sur les cas suivants :

• Si $n = 13$, $\frac{4}{13} = \frac{1}{4} + \frac{3}{52}$; Ah, Ah, renouvelons notre technique pour $\frac{3}{52}$. Nous avons : $\frac{3}{52} = \ldots$.

Quelle est cette fraction « juste inférieure » à $\frac{3}{52}$ de numérateur égal à 1 ?

En tâtonnant, par comparaison des valeurs approchées de $\frac{3}{52}$ et de $\frac{1}{n}$ pour n entre 10 et 20, nous trouvons $\frac{3}{52} = \frac{1}{18} + \frac{1}{468}$.

Ainsi nous obtenons : $\frac{4}{13} = \frac{1}{4} + \frac{1}{18} + \frac{1}{468}$.

Une impression se dégage, les décompositions deviennent de plus en plus difficiles à obtenir.

• Si $n = 17$, cherchons de nouveau la fraction « juste inférieure » à $\frac{3}{85}$ de numérateur 1.

Au lieu de tâtonner, cherchons l'expression de cette fraction de numérateur 1 inférieure ou égale à la fraction $\frac{4}{a}$.

Nous avons donc : $\frac{4}{a} \geq \frac{1}{x}$ et $\frac{4}{a} < \frac{1}{x-1}$, c'est-à-dire $x - 1 < \frac{a}{4} \leq x$.

Nous en déduisons aisément le lemme suivant :

Lemme 3 : Si a n'est pas un multiple de 4, alors la plus grande fraction de numérateur 1 inférieure ou égale à $\frac{4}{a}$ est $\frac{1}{\mathrm{E}\left(\frac{a}{4}\right) + 1}$ où E(x) désigne la partie entière de x.

Utilisons ce lemme pour $\frac{4}{17}$. Nous avons $\frac{1}{\mathrm{E}\left(\frac{17}{4}\right) + 1} = \frac{1}{5}$. Ainsi $\frac{4}{17} = \frac{1}{5} + \frac{3}{85}$.

Réitérons le procédé avec $\frac{3}{85}$.

Pour ce faire, nous devons généraliser le lemme 3 avec les fractions $\frac{b}{a}$ avec l'énoncé suivant :

Lemme 4 : Si a n'est pas un multiple de b, alors la plus grande fraction de numérateur 1 inférieure ou égale à $\frac{b}{a}$ est $\frac{1}{\mathrm{E}\left(\frac{a}{b}\right) + 1}$.

Ainsi nous obtenons : $\frac{3}{85} = \frac{1}{\mathrm{E}\left(\frac{85}{3}\right) + 1} + r = \frac{1}{29} + r$. Donc $r = \frac{3}{85} - \frac{1}{29} = \frac{2}{2465}$.

Aïe, aïe, aïe, cela ne marche pas. Nous n'obtenons pas $\frac{4}{17}$ comme la somme de trois fractions de numérateur 1.

Persévérons et au lieu de prendre $\frac{1}{5}$ comme première fraction, prenons $\frac{1}{6}$. Ainsi $\frac{4}{17} = \frac{1}{6} + \frac{7}{102}$ et $\frac{7}{102} = \frac{1}{15} + \frac{1}{510}$. Enfin nous obtenons : $\frac{4}{17} = \frac{1}{6} + \frac{1}{15} + \frac{1}{510}$. Ouf !

Poursuivons nos essais, 17 a été pour l'instant un entier particulier, et 19 alors ?

• Si $n = 19$. Nous avons $\mathrm{E}\left(\frac{19}{4}\right) + 1 = 5$, donc $\frac{4}{19} = \frac{1}{5} + \frac{1}{95}$. Nous devons décomposer $\frac{1}{95}$ en deux fractions de numérateur 1. Comme $95 = 5 \times 19$, on ne peut simplifier une fraction de dénominateur égal à 95 que par 5 ou 19. Essayons de faire apparaître 5 au numérateur d'une fraction égale à $\frac{1}{95}$.

Nous trouvons $\frac{1}{95} = \frac{1}{19 \times 5} = \frac{6}{6 \times 19 \times 5} = \frac{5}{6 \times 19 \times 5} + \frac{1}{6 \times 19 \times 5} = \frac{1}{114} + \frac{1}{570}$.

Donc $\frac{4}{19} = \frac{1}{5} + \frac{1}{114} + \frac{1}{570}$.

Au passage, nous avons utilisé l'identité suivante : $\frac{1}{ab} = \frac{1}{(a+1)b} + \frac{1}{a(a+1)b}$.

Nous pouvons énoncer le lemme suivant :

Lemme 5 : Pour tous a et b entiers naturels non nuls, $\frac{1}{ab} = \frac{1}{(a+1)b} + \frac{1}{a(a+1)b}$.

Pour $n = 19$, l'idée première de prendre $\frac{1}{\mathrm{E}\left(\frac{a}{4}\right) + 1}$ comme première fraction a été fructueuse.

Essayons encore pour $n = 23$ avant de faire le point … à moins que ce cas nous réserve des surprises !

• Si $n = 23$. Nous avons $\mathrm{E}\left(\frac{23}{4}\right) + 1 = 6$, donc $\frac{4}{23} = \frac{1}{6} + \frac{1}{138}$.

En appliquant la technique utilisant le lemme 5, $\frac{1}{138} = \frac{1}{2 \times 69} = \frac{1}{3 \times 69} + \frac{1}{2 \times 3 \times 69} = \frac{1}{207} + \frac{1}{414}$.

Ainsi : $\frac{4}{23} = \frac{1}{6} + \frac{1}{207} + \frac{1}{414}$.

Faisons le point sur ces premiers essais. Nous avons obtenu :

n	Décomposition	Commentaires
1	Impossible	
2	$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$	
3	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$	Nous avons aussi $\frac{1}{1}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$. La décomposition n'est pas unique.
5	$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$	
7	$\frac{1}{2}+\frac{1}{28}+\frac{1}{28}$	
11	$\frac{1}{3}+\frac{1}{66}+\frac{1}{66}$	
13	$\frac{1}{4}+\frac{1}{18}+\frac{1}{468}$	
17	$\frac{1}{6}+\frac{1}{15}+\frac{1}{510}$	La première fraction n'est pas $\frac{1}{\mathrm{E}\left(\frac{17}{4}\right)+1}$
19	$\frac{1}{5}+\frac{1}{114}+\frac{1}{570}$	
23	$\frac{1}{6}+\frac{1}{207}+\frac{1}{414}$	

Si nous examinons ces cas, nous pouvons remarquer que si n est congru à 3 modulo 4 (c'est-à-dire 3, 7, 11, 19 et 23) alors la première fraction est $\frac{1}{\mathrm{E}\left(\frac{n}{4}\right)+1}$. Essayons de prouver cela.

Posons $n = 4k + 3$ avec $k \in \mathbf{N}$. Ainsi $\mathrm{E}\left(\frac{n}{4}\right) + 1 = k + 1$.

Donc $\frac{4}{4k+3} = \frac{1}{k+1} + r$ avec $r = \frac{4}{4k+3} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{(4k+3)(k+1)}$

$= \frac{1}{(k+2)(4k+3)} + \frac{1}{(4k+3)(k+1)(k+2)}$ en utilisant le lemme 5.

Nous obtenons l'énoncé suivant :

Lemme 6 : Si $n \equiv 3\ [4]$, alors $n = 4k + 3$ avec $k \in \mathbf{N}$

et $\frac{4}{n} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+2)(4k+3)} + \frac{1}{(4k+3)(k+1)(k+2)}$.

Il reste donc les cas $n \equiv 1$ [4] à traiter (si $n \equiv 0$ ou 2 [4], alors n n'est pas premier sauf si $n = 2$).

En examinant les cas restants du tableau ($n = 5$, $n = 13$ et $n = 17$), nous remarquons que si n est congru à 5 modulo 8, alors la première fraction est encore $\dfrac{1}{E\left(\frac{n}{4}\right)+1}$.

En effet , si $n = 8k + 5$, nous obtenons $E\left(\frac{n}{4}\right) + 1 = 2k + 1 + 1 = 2(k + 1)$.

$$\text{Ainsi } \frac{4}{8k+5} = \frac{1}{2(k+1)} + r \text{ avec } r = \frac{4}{8k+5} - \frac{1}{2(k+1)} = \frac{3}{2(k+1)(8k+5)}$$

$$= \frac{2}{2(k+1)(8k+5)} + \frac{1}{2(k+1)(8k+5)}$$

$$= \frac{1}{(k+1)(8k+5)} + \frac{1}{2(k+1)(8k+5)}.$$

$$\text{Ainsi } \frac{4}{8k+5} = \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(8k+5)} + \frac{1}{2(k+1)(8k+5)}.$$

Nous en déduisons le lemme suivant :

Lemme 7 : Si $n \equiv 5$ [8], alors $n = 8k + 5$ avec $k \in \mathbf{N}$ et

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(8k+5)} + \frac{1}{2(k+1)(8k+5)}.$$

En examinant le cas restant $n = 17$ (nous sommes alors dans le cas $n \equiv 1$ [8]), nous pouvons conjecturer que la première fraction est $\dfrac{1}{E\left(\frac{n}{4}\right)+2}$. Essayons de prouver cette conjecture.

Posons $n = 8k + 1$ avec $k \in \mathbf{N}$. Ainsi $E\left(\frac{n}{4}\right) + 2 = 2k + 2$.

$$\text{Ainsi } \frac{4}{8k+1} = \frac{1}{2k+2} + \frac{7}{2(k+1)(8k+1)}$$

$$= \frac{1}{2k+2} + \frac{2}{2(k+1)(8k+1)} + \frac{5}{2(k+1)(8k+1)}$$

$$= \frac{1}{2k+2} + \frac{1}{(k+1)(8k+1)} + \frac{5}{2(k+1)(8k+1)}.$$

Donc si $k = 4 + 5k'$ ($k' \in \mathbb{N}$), alors

$$\frac{4}{8k+1} = \frac{1}{2k+2} + \frac{1}{(k+1)(8k+1)} + \frac{1}{2(k'+1)(8k+1)}.$$

Nous venons de prouver que si $n = 8(5(k' + 4) + 1) = 40k' + 33$, c'est-à-dire $n \equiv 33$ [40], alors

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{10k' + 10} + \frac{1}{5(k' + 1)(40k' + 33)} + \frac{1}{2(k' + 1)(40k' + 33)}.$$

En conclusion, à ce niveau de la recherche, nous pouvons écrire que :

Propriété : Soit $n \geq 3$ premier.

1. Pour tout n non congru à 1 modulo 8, il existe des entiers a, b et c tels que $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.
2. Si n est congru à 1 modulo 8 et si n est congru à 33 modulo 40 alors il existe a, b et c tels que $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Nous pourrions poursuivre la recherche dans cette direction, à savoir traiter des classes de nombres où le problème a une solution.

Présentation du dispositif

Cette expérimentation a eu lieu avec dix élèves de terminale scientifique du lycée H. Parriat à Montceau-les-Mines. Les élèves suivent la spécialité mathématiques et un parcours excellence en mathématiques[6]. Ce parcours leur offre deux heures hebdomadaires supplémentaires de mathématiques afin de mieux préparer une entrée en classe préparatoire l'année suivante. Le programme est libre et élaboré par l'enseignant[7].

Le dispositif a été construit sur sept séances de deux heures. La première séance a été consacrée à une recherche individuelle du problème. Il s'en est suivi quatre séances au travail de recherche collectif par groupe de trois ou quatre avec une mise en commun en classe entière après deux séances. La sixième séance a été dédiée à un débat en classe entière sur les travaux des différents groupes et la dernière séance a été consacrée à un travail de synthèse et d'institutionnalisation. Les séances ont été gérées par l'enseignant comme un dispositif problème-ouvert (Arsac et Mante 1988, 2007). Pour les besoins de l'étude didactique, nous avons enregistré et filmés les échanges au sein des groupes et de la classe grâce à des caméras et des enregistreurs numériques.

Le travail des élèves sur la conjecture

Les élèves savaient que le problème était non résolu. Nous leur avons demandé d'étudier l'énoncé suivant :

---

[6] Le choix de faire cette expérimentation dans une classe non ordinaire résulte de besoins pour nos recherches. Cependant de nombreuses expérimentations avec ce problème ont eu lieu dans des classes ordinaires. Voir Gardes 2010.

[7] Les élèves ont par exemple suivi un cours sur l'histoire des nombres complexes, ont fait un travail sur la quadrature du cercle, ont l'habitude de chercher des problèmes ouverts.

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on peut trouver trois entiers naturels non nuls a, b et c tels que $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$?

Ci -dessous, nous détaillons ces différentes séances avec les objectifs et des extraits de travaux d'élèves.

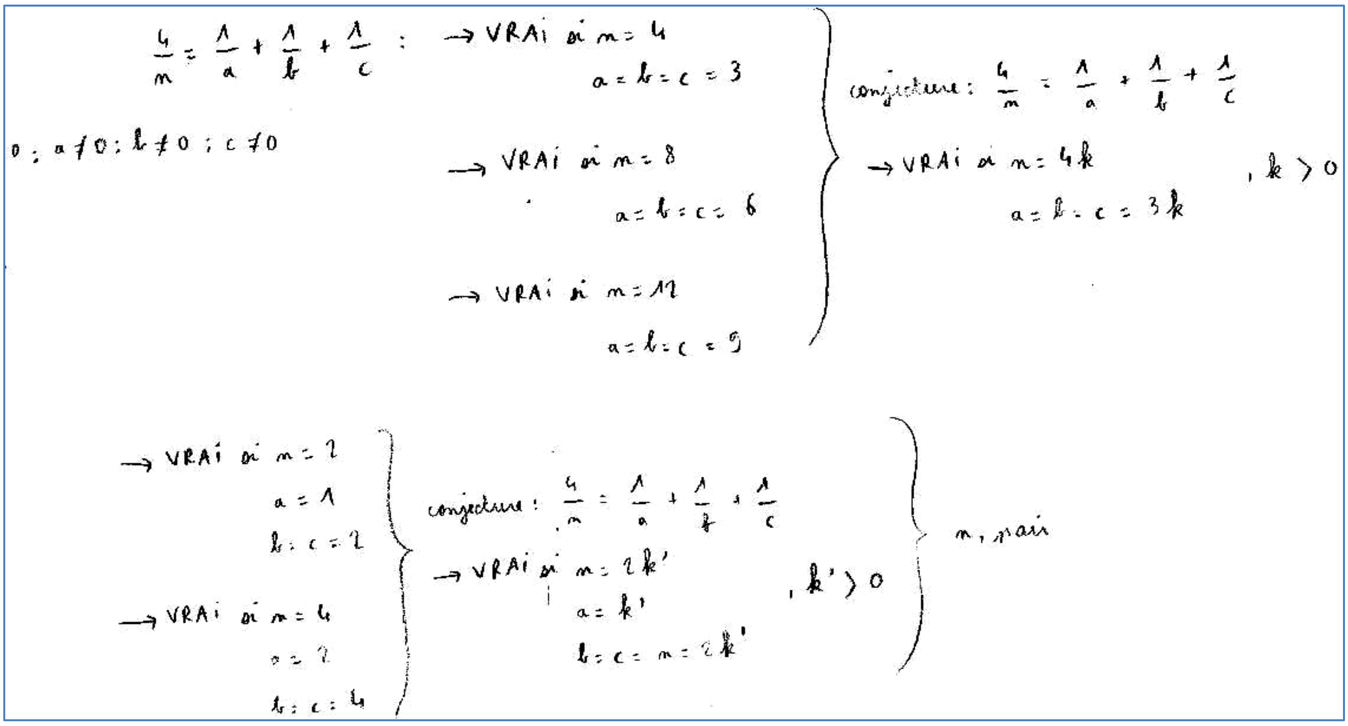
1. La séance de recherche individuelle *(mardi 13 mars 2012)*

Pour la première séance de travail sur la conjecture, nous avons proposé aux élèves trois consignes : s'engager individuellement dans la résolution du problème pendant 45 minutes, préparer une synthèse de leur recherche (environ 15 minutes) et enfin mettre en commun, au sein du groupe, les différentes synthèses individuelles pendant 30 minutes. L'objectif d'une recherche individuelle est l'appropriation du problème par chaque élève. Il peut ainsi réfléchir à ses propres idées et pistes de recherche pour la résolution du problème. Cela facilite ensuite l'intégration eu groupe mais surtout cela augmente la richesse des échanges, des idées et des pistes de recherche au sein du groupe.

Les premières actions des élèves sur la recherche de cette conjecture sont de deux natures : soit exploratoire, ils cherchent des solutions à l'équation pour des petites valeurs de n ; soit opératoire, ils effectuent des manipulations algébriques sur l'équation initiale de type réduction au même dénominateur, produit en croix ou isolement de l'inconnue.

Nous avons repéré trois types de travail dans les recherches individuelles des élèves.

Type 1 : Les recherches exploratoires. Les élèves cherchent des solutions à l'équation pour des petites valeurs de n et essaient de trouver des régularités.


$\frac{4}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$: → VRAI si $m = 4$, $a = b = c = 3$

0 ; $a \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$

→ VRAI si $m = 8$, $a = b = c = 6$

→ VRAI si $m = 12$, $a = b = c = 9$

conjecture : $\frac{4}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ → VRAI si $n = 4k$, $a = b = c = 3k$, $k > 0$

→ VRAI si $m = 2$, $a = 1$, $b = c = 2$

→ VRAI si $m = 4$, $a = 2$, $b = c = 4$

conjecture : $\frac{4}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ → VRAI si $m = 2k'$, $a = k'$, $b = c = m = 2k'$, $k' > 0$ — n, pair

Exemple 1 : Cet élève fait des essais pour n = 4, 8 et 12 et conjecture que l'équation a des solutions pour les nombres pairs (la conjecture sera vérifiée et démontrée en groupe).

Type 2 : Les recherches opératoires. Les élèves manipulent algébriquement l'équation initiale pour essayer de la résoudre.

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \iff \frac{4}{n} = \frac{bc+ac+ab}{abc} \iff 4 = \frac{n(bc+ac+ab)}{abc}$$

1er Cas particulier : $a = b = c = x$

$$4 = \frac{n(3x^2)}{x} \iff 4 = n \times 3x$$

or $n \geq 2$ d'après la conjecture. et $x \in \mathbb{N}$

Solution → Minimum : $n \times 3x = 2 \times 3 = 6 > 4$. Donc ne marche pas dans ce cas.

Alors a ; b et c ne peuvent pas être égaux par 3.

2nd Cas particulier : Parmis a, b et c deux sont égaux → $a = b = x \neq c$

$$4 = \frac{n(xc + xc + 2x)}{cx^2} \iff 4 = n \times 2x \frac{(c+1)}{cx^2}$$

Essais : $n = 2k \Rightarrow 4 / n \times 2x$

$$4 = 4kx \frac{(c+1)}{cx^2} \iff 1 = kx \frac{(c+1)}{cx^2}$$

pas de solution car $kx \frac{(c+1)}{cx^2} > 1$ avec c et $x \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$

- $4 \not| n \times 2x \Rightarrow n = 2k+1$

$$4 = 4kx + 2x \frac{(c+1)}{cx^2} \iff 1 = kx + \frac{x(c+1)}{2cx^2}$$

pas de solution car $kx + \frac{x(c+1)}{2cx^2} > 1$ avec c, x et $k \in \mathbb{N}$.

car la somme de deux nombres entiers naturels non nul et supérieur à 0.

Donc a, b et c ne peuvent être égaux deux à deux.

Conclusion : a, b et c sont des entiers naturels distincts non nul

Exemple 2 : Cet élève transforme l'écriture de l'équation initiale sous deux formes différentes puis étudie des cas particuliers où certaines variables sont égales. Il en tire une conclusion qui sera infirmée en groupe par un contre-exemple : pour n = 4, a = b = c = 3.

Type 3 : Les recherches exploratoires et opératoires. Certaines élèves utilisent alternativement l'une ou l'autre des méthodes.

Conjecture : pour $n \geqslant 2$, $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ avec a, b et c $\in \mathbb{N}^*$

→ pour $n = 2$ $\quad \frac{4}{n} = 2 \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = 2. \rightarrow 4+2+2=8$

pour $n = 3$ $\quad \frac{4}{n} = \frac{4}{3} \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$? $\quad 4+6+6=16$

pour $n = 4$ $\quad \frac{4}{n} = 1 \rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1 \rightarrow 4\times4 + 4\times2 + 4\times2 = 32$

pour $n = 5$ $\quad \frac{4}{n} = \frac{4}{5} = \cancel{\frac{12}{15}} \rightarrow \frac{3\times5}{1\times3\times5} > 12 \rightarrow$ non. $\quad$ 64.

$\frac{4}{n} = \frac{bc+ac+ab}{abc}$ $\quad \frac{16}{20} \rightarrow \frac{10+10+4}{2\times2\times5}$ Non.

$\rightarrow \frac{6+10+15}{3\times2\times5}$ Non.

$\frac{3\times25}{5\times5\times5} = \frac{75}{125} = \frac{3}{5}$ Non

$4abc = n(bc+ac+ab)$

$n(bc+ac+ab) - 4abc = 0$

Exemple 3 : cette élève commence par chercher des solutions à l'équation pour certaines valeurs de n puis essaie de faire un lien (symboliser par les flèches) avec l'équation initiale qu'elle réécrit sous deux formes différentes.

2. Les séances de recherche collective *(mardi 20 et 27 mars, mardi 10 avril)*

Il y a eu trois séances de recherche en groupe où les élèves avaient pour consigne, de reprendre la recherche du problème en groupe pendant une heure et demie puis de rédiger une synthèse de leurs recherches dans le cahier de bord du groupe (environ 30 minutes).

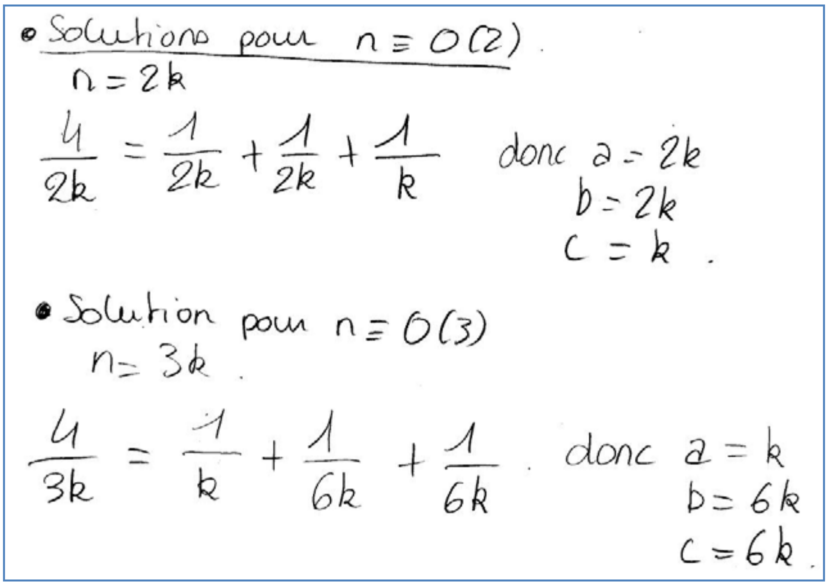
L'objectif des séances de recherche collective est la confrontation des idées de chacun afin de faire avancer plus rapidement la recherche d'une part et d'encourager la communication et le débat d'autre part. La rédaction d'une synthèse leur permet de faire le point sur leurs avancées et d'amorcer le travail de la séance suivante.

A noter que l'enseignant a fait une petite régulation lors de la séance du 27 mars en insérant un temps de mise en commun des travaux entre les trois groupes. Ce moment n'avait pas été prévu initialement mais l'enseignant a jugé qu'il était nécessaire afin de relancer la recherche de certains groupes en confrontant les différentes méthodes de recherche employées au sein des trois groupes.

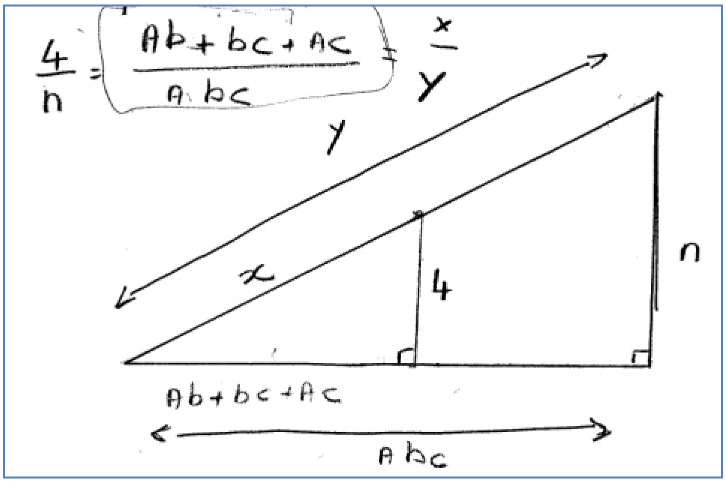
Nous présentons ci-dessous une première analyse des travaux de recherche collective des élèves sur la conjecture en décrivant leur démarche de recherche et les résultats produits. Nous nous basons uniquement sur leurs écrits consignés dans les cahiers de bord[8].

Groupe 1 : Composé de trois élèves, ce groupe a mené une recherche tant empirique que théorique. Les différentes phases de leur recherche sont les suivantes :

- Essais pour des petites valeurs de *n*.
- Solutions pour $n \equiv 0\ [2]$ et pour $n \equiv 0\ [3]$.



- Conjecture pour $n \equiv 0\ [5]$.
- Tentative de résolution géométrique avec Thalès et Pythagore.



- Réduction aux nombres premiers grâce au résultat sur les multiples.

[8] Une étude approfondie des travaux des élèves sera effectuée pour la thèse en cours.

si on a trouvé pour un nb ~~...~~ n, on a trouvé pour tous ces multiples

$$\longrightarrow \frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$\frac{4}{kn} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{4}{kn} = \frac{1}{ka} + \frac{1}{kb} + \frac{1}{kc}$$

=> il faut montrer qu'il y a une solution pour tout nb 1er

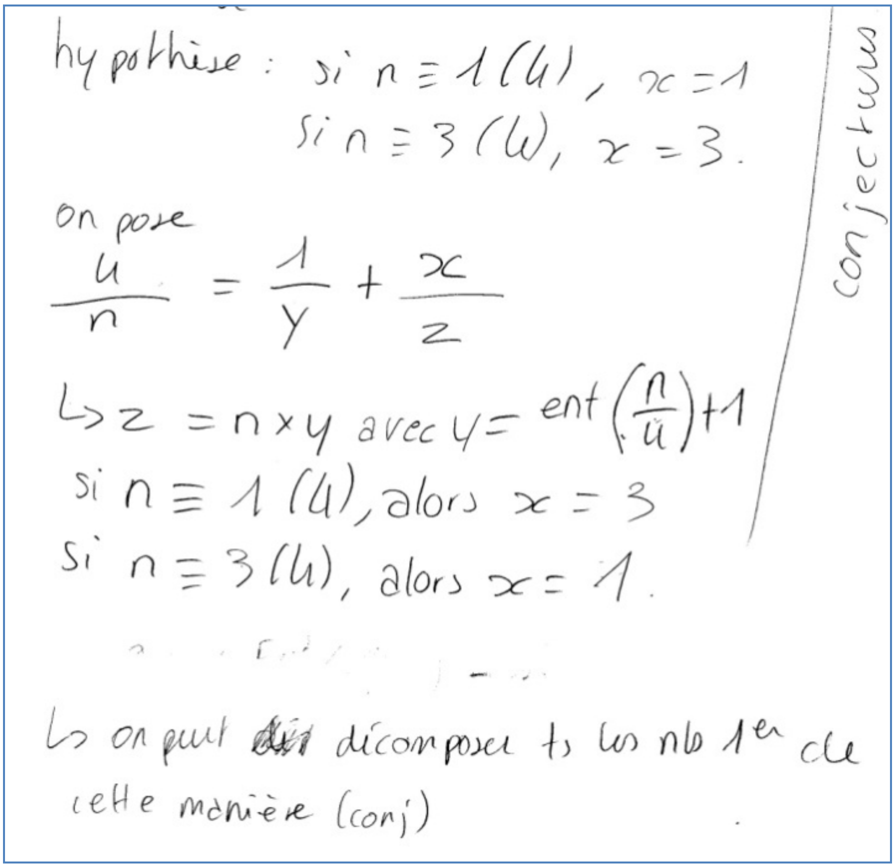
- Appropriation du travail d'un autre groupe (ici le groupe 3) lors de la mise en commun.

A partir de ce qu'a fait le gr. 3

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{ent\left(\frac{n}{4}\right)+1} + \left(\frac{4}{n} - \frac{1}{ent\left(\frac{n}{4}\right)+1}\right)$$

essai pour n = 461.

- Recherche de décomposition avec la méthode de la partie entière (c'est-à-dire poser $x = E\left(\frac{n}{4}\right)+1$) pour n modulo 4). Reste à étudier les cas où $n \equiv 1$ [4].


hypothèse : si $n \equiv 1 (4)$, $x = 1$
si $n \equiv 3 (4)$, $x = 3$.
on pose
$\frac{4}{n} = \frac{1}{y} + \frac{x}{z}$
↳ $z = n \times y$ avec $y = \text{ent}\left(\frac{n}{4}\right)+1$
si $n \equiv 1 (4)$, alors $x = 3$
si $n \equiv 3 (4)$, alors $x = 1$.
↳ on peut ~~dé~~ décomposer ts les nb 1er de cette manière (conj)
conjectures

- Nouveau problème : décomposer tout rationnel en deux fractions unitaires.
- Recherche de décomposition pour n modulo 3. Reste à étudier les cas où $n \equiv 1$ [3].
- Recherche de décomposition pour n modulo 6. Reste à étudier les cas où $n \equiv 1$ [6] et $n \equiv 5$ [6].
- Recherche d'une autre méthode pour les nombres restants[9].

La phase de mise en commun après deux séances de travail a été motrice dans leur recherche. Ce groupe s'est approprié les résultats présentés par le groupe 3 et a ensuite axé sa recherche dans cette direction. Cela donne des résultats différents du groupe 3 mais l'idée est la même, trouver une décomposition de $\frac{4}{n}$ pour n un nombre premier et en déterminer des formules génératrices. Le problème qui en découle est également le même, à savoir, l'étude des nombres restants (pour ce groupe les cas où $n \equiv 1$ [6] et $n \equiv 5$ [6]). Ce groupe a aussi travaillé sur les démonstrations de leurs résultats[10]. Ils étaient conscients de ce qui était démontré et de ce qui restait à l'état de conjecture. Ils ont effectué de nombreux allers et retours entre une recherche empirique et une recherche théorique.

<u>Groupe 2</u> : Ce groupe, composé de 4 élèves, a ancré sa recherche dans une dimension plus formelle. Leurs différentes pistes ont été les suivantes :

---

[9] Ces dernières étapes sont illustrées dans leur synthèse, en annexe 1.
[10] Voir ces démonstrations en annexe 1.

- Transformation de l'équation initiale (par exemple isoler n). Essais pour des petites valeurs de n (un seul élève suit cette piste).
- Solutions (démontrées) pour $n \equiv 0$ [2], $n \equiv 0$ [3] et $n \equiv 0$ [5].

- pour $n \equiv 0 (3)$: $\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{n}{3}} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$

$\frac{4}{n} = \frac{3}{n} + \frac{1}{n} \longrightarrow$ VRAi

Il reste à démontrer pour $n \equiv 1 (6)$ et $n \equiv 5 (6)$

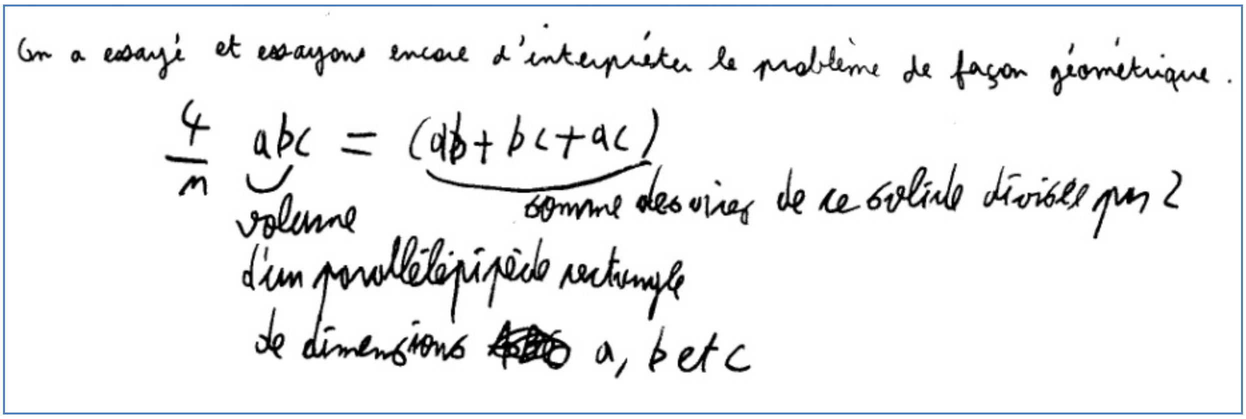
- pour $n = 5$: $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$

- pour $n = 25 = 5^2$: $\frac{4}{25} = \frac{1}{10} + \frac{1}{25} + \frac{1}{100}$

$\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{2}{5}n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n}$

1 7 11 13 17 19 23 29 modulo 30

- Réduction aux nombres premiers.
- Essai d'un raisonnement par l'absurde.
- Essai d'un raisonnement par disjonction de cas, modulo 30.
- Utilisation du logiciel dérive pour trouver des cas particuliers.
- Tentative d'exprimer n en un courbe en 3D en fonction de a, b et c.
- Interprétation du problème géométriquement, avec un parallélépipède rectangle :

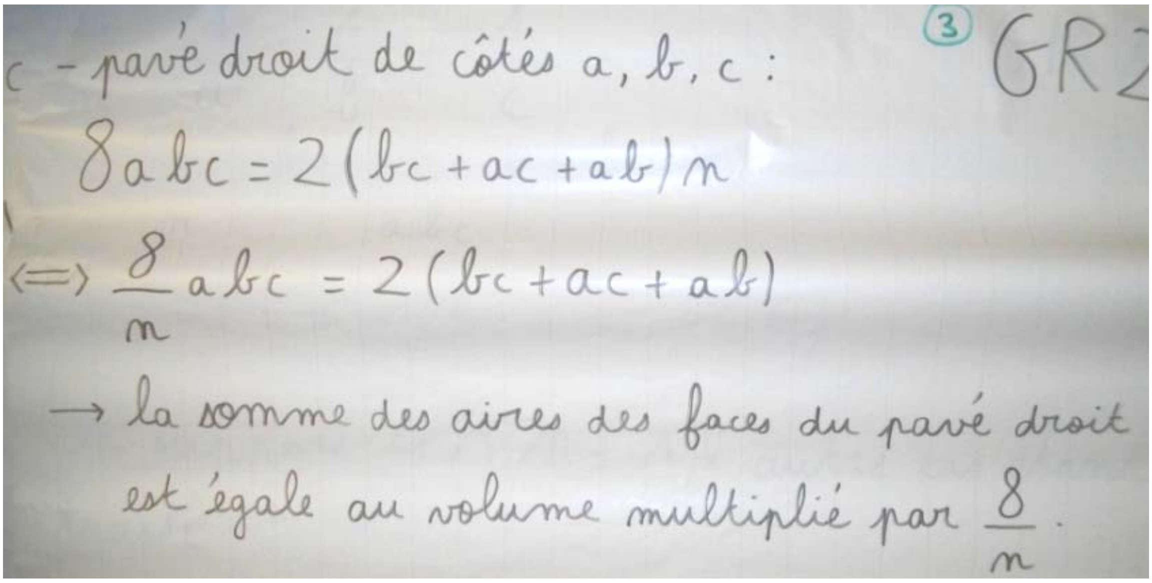


On a essayé et essayons encore d'interpréter le problème de façon géométrique.

$\frac{4}{n} abc = (ab+bc+ac)$

volume d'un parallélépipède rectangle de dimensions a, b et c

somme des aires de ce solide divisée par 2



- Résultat établi[11] : l'équation est possible pour $abc \equiv 0$ [4] et $ab + ac + bc \equiv 0$ [16]. De plus abc n'est pas une puissance de 4 et abc est un multiple de n.

Les différents points de vue et les différentes pistes de recherche qui en découlent ont été très riches dans ce groupe. Après avoir réduit le problème aux nombres premiers, ils se sont tournés vers une piste de recherche davantage formelle qui leur permettrait d'émettre une formule générale liant n, a, b et c d'un point de vue géométrique ou d'un point de vue arithmétique. De nombreuses discussions sur des aspects logiques ont étayé leurs recherches (équivalence, implication, condition nécessaire, quantificateurs). Leur résultat final, exprimé sous forme d'une condition nécessaire et suffisante a été démontré. La mise en commun n'a pas modifié leur manière de chercher.

Groupe 3 : Ce groupe, composé de 3 élèves, a mené une recherche davantage empirique. Les différentes phases de leur recherche ont été les suivantes :

- Conjecture pour les nombres pairs.
- Essai de démontrer que $ab + bc + ac$ est un multiple de $4abc$.

[11] Ce résultat ainsi que la démonstration est en annexe 2, dans la synthèse écrite par le groupe.

- Hypothèse admise : « *si tous les nombres premiers marchent alors tous les nombres marchent* ».
- Décomposition recherchée pour n = 2, 5, 7, 9, 11. Difficulté pour n = 13.

Pair

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{n}{2}}$$

Impair

* multiple de 3

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{\frac{n}{3}} \qquad \frac{4}{n} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{3k} + \frac{1}{6k}$$

* multiple de 5

$$\frac{4}{5k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{5k} + \frac{1}{10k}$$

$a \times b = c$

* multiple de 7 $\frac{a}{k}$ $\frac{b}{k}$ $\frac{c}{k}$

$$\frac{4}{7k} = \frac{1}{4k} + \frac{1}{4k} + \frac{1}{14k} \qquad \frac{4}{7} = \frac{5}{7} - \frac{1}{7}$$

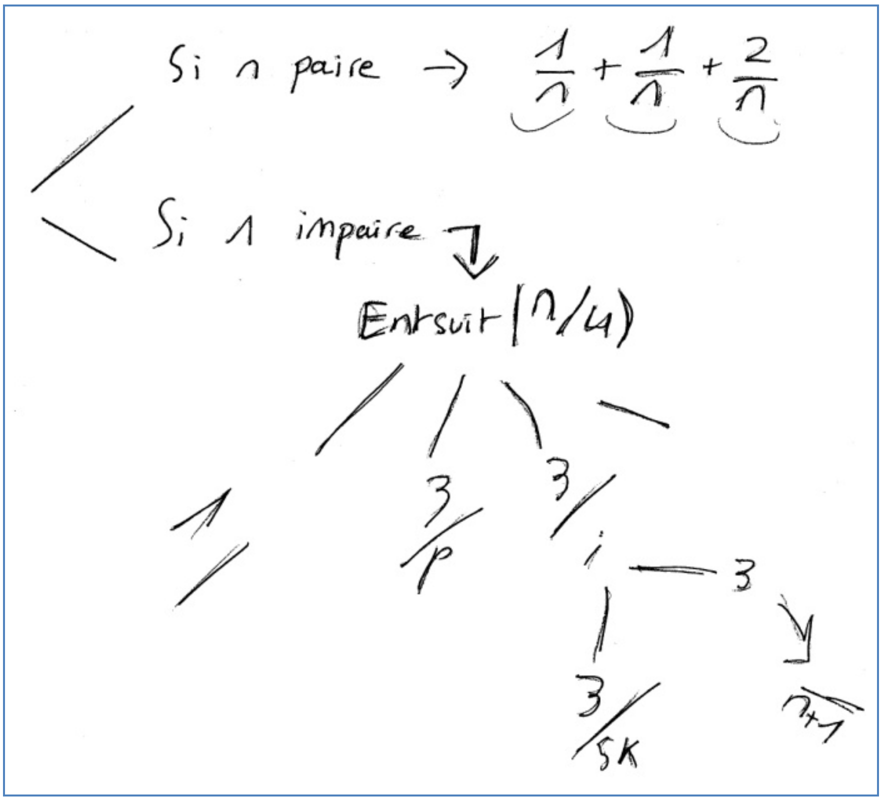
- Décomposition de tous les nombres premiers jusqu’à 100 avec la méthode de la partie entière (c'est-à-dire poser $x = E\left(\frac{n}{4}\right) + 1$).

$$
1/p\left(\begin{aligned}
\frac{4}{23} &= \frac{1}{6} + \frac{1}{138} = \frac{1}{6} + \frac{1}{276} + \frac{1}{276}\\
\frac{4}{29} &= \frac{1}{8} + \frac{3}{232} = \frac{1}{8} + \frac{1}{232} + \frac{2}{232} = \frac{1}{116}\\
\frac{4}{31} &= \frac{1}{8} + \frac{1}{248} = \frac{1}{8} + \frac{1}{496} + \frac{1}{496}
\end{aligned}\right.
$$

$$
3/p\left(\frac{4}{37} = \frac{1}{10} + \frac{3}{370} = \frac{1}{10}\right.
$$

$$
3/i\left(\frac{4}{457} = \frac{1}{115} + \frac{3}{52555} \qquad \frac{6}{105110}\right.
$$

- Détermination de formules pour certaines classes de nombres premiers qu'ils présentent sous forme d'un arbre.



- Essais de décomposition des nombres premiers entre 100 et 300.
- Précision de leurs formules et de leurs méthodes de décomposition[12].

12 Voir leur synthèse en annexe 3.

- Difficulté pour trouver une décomposition de $n = 241$ avec leurs méthodes.

Ce groupe est toujours resté sur la même piste de recherche, à savoir décomposer de plus en plus de nombres, en espérant pouvoir tous les décomposer ! La mise en commun en classe entière n'a pas modifié leur piste de réflexion. Ils ont produit un arbre qui leur permet de spécifier leurs résultats et de mettre en évidence les nombres qu'ils n'arrivent pas à décomposer. Cependant, ils n'ont fait aucune démonstration de leurs formules (sauf celle pour les nombres pairs).

Cette première analyse, uniquement à partir de leurs écrits, met déjà en évidence les différents processus de recherche des trois groupes. Le groupe 2 a centré sa recherche du problème dans une dimension très théorique en essayant d'utiliser plusieurs raisonnements d'arithmétique ou en changeant de cadre (interprétation géométrique). Leur principal résultat est à l'image de leur recherche, c'est une condition nécessaire et suffisante d'existence de solutions. Le groupe 1 a davantage articulé sa recherche entre l'empirique et le théorique. Ainsi ils ont cherché à décomposer le plus grand nombre de classes de solutions tout en essayant de démontrer leurs résultats successifs. Enfin, le groupe 3 a mené une recherche très empirique en cherchant à décomposer tous les nombres premiers jusqu'à 100 puis 300 avec pour but de déterminer des formules génératrices pour tous les nombres premiers. Cependant ils n'ont pas cherché à démontrer leurs différents résultats. Nous pouvons également observer que la méthode expérimentale, que l'on peut définir par l'étude de cas particuliers pour étudier ensuite le cas général, tient une place importante dans les processus de recherche des élèves. Si tous les groupes semblent l'avoir pratiquée, la mise en œuvre d'une dimension expérimentale, caractérisée par des va-et-vient entre la théorie et l'expérience semble ne pas avoir la même importance selon les groupes. En effet le groupe 2, après avoir étudié quelques cas particuliers n'a étudié que le cas général, sans revenir et faire de liens avec leurs exemples. A contrario les groupes 1 et 3 ont axé leurs recherches sur l'étude de cas particuliers pour le général. Le groupe 1 a davantage articulé l'étude des cas particuliers et la recherche d'une démonstration générale. Une analyse plus fine et détaillée de leurs recherches permettra de préciser l'influence de la mise en œuvre d'une dimension expérimentale dans les processus de recherche d'un tel problème.

Combien vaut la moitié du tout ? Réponse 3 mètres. [*Le tout est de s'y mettre*]

Qu'est-ce qu'un dortoir ? Réponse Un groupe de Lie.

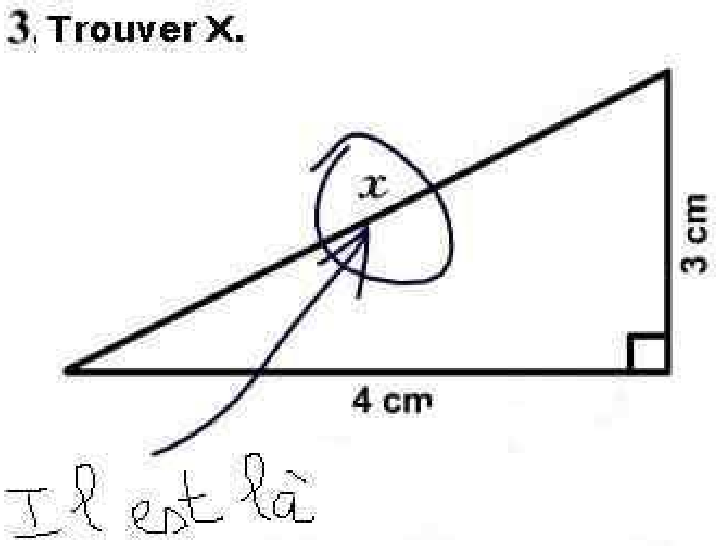
Combien vaut un Gauss ? Réponse : pi / 2 parce que pivot de Gauss.

Quelle est la différence entre un diamètre et un rayon ? Réponse : un rayon.

Qu'est-ce qu'une permutation ? Réponse : E'stc aç.

Quel est le comble pour un mathématicien ? Réponse : Passer la nuit sur une inconnue sans pouvoir lui appliquer son système.

Un classique des perles d'élèves :



Humour, Littérature et Mathématiques.

Michel LAFOND
mlafond001@yahoo.fr

Résumé : Survol d'un certain nombre de points communs entre humour, littérature et mathématiques.

Mots clés : humour, littérature, mathématiques, contraintes, poésie, OULIPO.

L'association humour et littérature est chose courante et ce lien ne sera pas développé ici. Vouloir associer humour et mathématiques peut paraître saugrenu, voire impossible à certains.
Et pourtant…
Vouloir associer littérature et mathématiques est le but de l'OULIPO qui est un groupe d'individus dont nous parlerons au chapitre II.
Si on arrive à construire une HLM en associant Humour, Littérature et Mathématiques, ce sera bien.

I) Humour et mathématiques.

Dans l'édito figure ce qu'on appelle une "blague de matheux".
Elles ne font rire qu'eux, et encore, seulement le sous-ensemble de ceux qui les comprennent.
Avec la blague de l'édito, vous pourrez déclencher quelques rires si, dans le public, il y a quelques personnes qui ont des souvenirs de Terminale.
Avec la "blague" $8 \times i = \infty$ il y aura beaucoup moins de gens à s'esclaffer.[1]
Un livre de 230 pages, préfacé par Cédric Villani est consacré à ce sujet :
Blagues mathématiques et autres curiosités de Bruno Winckler chez ellipses 2011.
C'est dire si ce genre d'activités est sérieux !

Voici quelques blagues de matheux :

* Quel est le volume d'une pizza de rayon z et d'épaisseur a ?
  Réponse : $pi\,.\,z\,.\,z\,.\,a$

* $\dfrac{2\,a\,b\,o\,q\,p\,a\,\pi\,c}{2\,\pi\,r^2} = 2\,q\,b\,c$ [Prononcer les symboles un par un]

* $\dfrac{cheval}{oiseau} = \dfrac{l.vache}{oiseau} = \dfrac{l\ \beta\ \pi}{\beta\ l} = \pi$

* Un chat a 9 queues.
Preuve :
Aucun chat n'a huit queues.
Un chat a une queue de plus qu'aucun chat.
Donc un chat a neuf queues.

* Log et Exp vont au restaurant. Qui paie ?
Exp car Log ne paie rien. [Là aussi, il faut un bon public]

* Théorème d'Einstein-Pythagore : $E = m \cdot c^2 = m \cdot (a^2 + b^2)$

* Constante, surnommée C, et $x \longmapsto e^x$ marchent dans la rue.
Soudain C aperçoit un opérateur différentiel qui approche.
C se sauve, mais $x \longmapsto e^x$ la rattrape et lui demande ce qui lui prend.
- Si l'opérateur différentiel me rencontre, il me dérive et il ne reste plus rien de moi !
- Ah ! dit $x \longmapsto e^x$, moi ça ne m'inquiète pas, il peut me dériver tant qu'il veut.
- $x \longmapsto e^x$ reprend sa route et croise l'opérateur différentiel. Il lui lance :
- Salut, je suis $x \longmapsto e^x$. Et l'opérateur différentiel répond :
- Salut, je suis $\dfrac{d}{dt}$. [Normalement, là on rit]

* Qu'est-ce qu'un ours polaire ? Réponse : Un ours cartésien après changement de coordonnées.

* Qu'est-ce qui est jaune, borné et complet ? Réponse : un espace de Bananach.

* Le prof de maths : développer $(a + b)^3$.
L'élève : $(a + b)^3 = (\quad a \quad + \quad b \quad)\quad^3$.

* Madame et Monsieur Haume ont une fille. Comment s'appelle-t-elle ? Réponse : Pauline.

* N'oublions pas Devos…
"… car rien… ce n'est pas rien ! La preuve, c'est qu'on peut le soustraire. Exemple : Rien moins rien = moins que rien ! Si l'on peut trouver moins que rien, c'est que rien vaut déjà quelque chose ! On peut acheter quelque chose avec rien ! En le multipliant ! Une fois rien… c'est rien ! Deux fois rien… ce n'est pas beaucoup ! Mais trois fois rien… "

Et pour terminer ce paragraphe, mentionnons dans les contrepèteries, les mots-croisés, etc. la présence de la sulfureuse addition humour + mathématiques.

- Voici un jeu : Chercher l'intruse [2] :

  La femme de l'archéologue aime les fouilles sérieuses.
  Le pape rit des frasques de la petite Ginette.

Il n'y a pas que dans les postes qu'on voit de beaux bottins.
Les élèves apprennent à calculer en 100 leçons.
Atterré par la tempête, le marin a baissé son foc.

- Mots-croisés :

Définition	Réponse
Peut donner un goût amer au café	addition
Née sous X Des chiffres et des lettres	algèbre
Ne se consomme pas dans le bar	arête
Arrière-pensée	calcul mental
Carré rond	100
De cinq à sept	2
Droite englobant le centre	diamètre
Galette de son	disque
Jadis classé X	10
Nul en sport	égalité
A beaucoup compté en Suisse	EULER
Vis de forme	hélicoïdal
Coupe du monde	hémisphère
Grande figure française	hexagone
Comme neuf	impair
Peuvent s'accrocher aux trapèzes	isocèles
Elle garde ses distances	isométrie
Neuf mais vieux	IX
51 avant J.C.	LI
L'homme aux logs	NEPER
Fait largement plus d'une minute	obtus
Entre 3 et 4 Des chiffres et une lettre	Pi
Signe de croix	plus
Configuration générale des cadres	quadrilatère
Zéro y vaut 10	Scrabble
Très étroit dans un pavillon	16
Cardinal à la tête de mercenaires	7
Paraît neuf en le retournant	6
Lu et à prouver	théorème
Encore un et on sera beau	30
Cinq sur cinq Se voit nu dans la glace	1
Chiffre rond Nul en calcul	0

II) Littérature et mathématiques.

1) OULIPO et ses contraintes.

Que l'on fasse de la poésie, ou qu'on écrive des romans, il y a inévitablement des contraintes. Ces contraintes sont généralement littéraires (style, rimes etc.).
Un exemple type est le sonnet dont les contraintes sont assez draconiennes [3]
Pour l'écriture en général, les contraintes peuvent être alphabétiques, numériques, géométriques, algébriques etc. Le classement est difficile car les domaines ci-dessus se recouvrent souvent.
De toute façon, l'écriture étant un assemblage de lettres disposées sur un support, la combinatoire et la géométrie sont présentes naturellement.
Depuis 1960, les spécialistes en ce domaine sont les oulipiens (ce mot est dans le dictionnaire), c'est-à-dire les membres de l'OULIPO, groupe qui s'est donné pour but d'explorer toutes les potentialités de la littérature lorsqu'on se fixe des contraintes de toute sorte [4]

2) Contraintes géométriques.

- La symétrie est une source inépuisable d'inspiration. Un exemple, les palindromes :

C'EST SEC !
ENGAGE LE JEU QUE JE LE GAGNE.
ETEL, UN PORT TROP NU L'ÉTE.
EH ! CA VA LA VACHE ?
ET LA MARINE VA VENIR À MALTE
ÉLU PAR CETTE CRAPULE.
ÉSOPE RESTE ICI ET SE REPOSE.
KARINE ALLA EN IRAK
L'AME D'EVE REVE DE MAL.
LA MARINE EN IRA MAL - Victor Hugo
LA MÈRE GIDE DIGÈRE MAL - Scutenaire
LÉON A TROP PAR RAPPORT À NOÉL
TU L'AS TROP ÉCRASÉ CÉSAR CE PORT SALUT
UN ROC LAMINA L'ANIMAL CORNU

Peut-être avez-vous vu un jour la "boule de neige" de Georges Perec, célèbre oulipien : la boule de neige est une contrainte qui porte sur la longueur des mots.
Évoquons une contrainte proche : "Les lignes isocèles" ou "écriture isocèle". Elle impose à chaque ligne du texte d'avoir exactement le même nombre de caractères.

Ci-dessous trois exemples dans lesquels la police utilisée est *Courier New* qui accorde à tous les caractères exactement la même largeur, ce qui permet aisément de vérifier les contraintes géométriques.

Boule de neige	Lignes isocèles

```
J’
AI
CRU
VOIR
PARMI
TOUTES
BEAUTÉS
INSIGNES
ROSEMONDE
RESPLENDIR
FLAMBOYANTE
PANTELANTE
ÉCARTELÉE
ÉVOQUANT
QUELQUE
CHARME
TORDU
SCIÉ
SUR
UN
X
```

```
Les lignes isocèles
sont par définition
des phrases qui ont
chacune même nombre
de symboles écrits.
Il faut choisir une
police telle que la
place prise par les
lettres, caractères
utilisés soit égale
pour chaque phrase.
Bien sûr, on compte
les blancs et aussi
les apostrophes les
virgules et tirets.
Ceci n’est vraiment
pas une difficulté.
Essayez par exemple
d’écrire avec trois
lignes isocèles les
voeux du nouvel an.
```

```
Un corbeau
perché sur
un tilleul
gardait un
fromage en
son bec. 1
renard qui
sentit les
odeurs lui
dit : vous
êtes beau,
sans rire,
si ramages
et plumage
sont aussi
agréables,
alors vous
êtes parmi
nous tous,
supérieur.
A ces mots
le corbeau
s’ imagina
très fort.
Et,afin de
montrer sa
```

```
belle voix
il élargit
son bec et
le fromage
tomba. Mon
ami dit le
renard, un
flatteur a
l’habitude
de vivoter
aux dépens
des zigues
qui l’ ont
écouté. Un
sermon qui
égale bien
un fromage
Le corbeau
jura hélas
en retard,
que passée
cette date
il ne sera
plus comme
il était !
```

Si cela vous tente, vous pouvez écrire "Le corbeau et le renard" en lignes isocèles bien plus courtes que dans l’exemple ci-dessus.

- Une contrainte géométrique rigolote, dite "Contrainte du prisonnier" pour une raison que je vous laisse deviner, est l’écriture de textes sans jambages. Ces textes présentent à l’œil un aspect tassé du plus bel effet, où comme à l’armée, aucune tête ne dépasse du rang.

Autrement dit, les lettres encombrantes "b, d, f, g, h, j, k, l, p, q, y" sont interdites. Voici des vœux pour le nouvel an, (par Chantal Robillard) dans lesquels les majuscules ont été remplacées par des minuscules en gras.
Cerise sur gâteau, cet extrait n’a aucun "w" et aucun "z" ! D’ailleurs le "z = ʒ" a t-il un jambage ?

"**u**n an nouveau ? **u**ne vie nacrée ! **a**mis sincères, amours sereines, ni avanies ni avarice, envies vaseuses en mer écumeuse, navire-mémoire en vous, au cœur, créer

encore sans amnésie !
aux ans évanouis, aux ans à venir rêvons : vous, moi, nous, unis !"

• Enfin, une contrainte géométrico-littéraire étonnante, car elle cumule les difficultés du sonnet et la difficulté du paradoxe de Deland [5] est la contrainte SOLVA (sonnet à longueur variable) due à Claude Berge [6] qui a eu l'idée de composer "La princesse Aztèque" en découvrant ce paradoxe.

Admirons le prodige : Ce qu'on voit ci-dessous est un poème à 15 pieds.
Alors que le sonnet est traditionnellement à 14 pieds, soit 4 + 4 + 3 + 3 vers, de rimes respectives A B A B - A C A C - D D E - F F E.

Tandis qu'en frissonnant, elle	déblatérait,	
L'	ami présomptueux plus fou qu'il ne paraît,	
Serrait sa souveraine, une blonde	farouche	
D'un lien	à la fois oppresseur et charmant.	
Dans l'Ouest enfoui dit-elle à son amant		
C'est là que l'art	fuit et détruit sa souche	Y
Et que la pyramide abolit l'univers		
Nul n'entend le muet qui	égrenait des vers,	
	Aztèque imperturbable à la touque imprécise	
Comme l'infatigable apion	aux yeux verts	
Jeune	libidineux que la froidure attise.	
N'offre pas de pactole à ton gardien	pervers,	
Si le verbe,	jaillit, que l'Inca prosaïse	
D'un tel triomphateur ne trouble le diamant	!	
Même Xipe Totec	tout doucement s'enlise…	X

Qu'à cela ne tienne, il suffit de permuter les deux blocs **X** et **Y** de droite et là, surprise ! On a bien (ci-dessous) un sonnet à 14 pieds.
Quelqu'un a pris son pied, c'est certain. Où est donc passé le 15ième pied ?

Tandis qu'en frissonnant, elle	égrenait des vers,	
L'	Aztèque imperturbable à la touque imprécise	
Serrait sa souveraine, une blonde	aux yeux verts	
D'un lien	libidineux que la froidure attise.	
Dans l'Ouest enfoui dit-elle à son amant	pervers,	
C'est là que l'art	jaillit, que l'Inca prosaïse	
Et que la pyramide abolit l'univers	!	
Nul n'entend le muet qui	tout doucement s'enlise…	X
Comme l'infatigable apion	déblatérait,	
Jeune	ami présomptueux plus fou qu'il ne paraît,	
N'offre pas de pactole à ton gardien	farouche	
Si le verbe,	à la fois oppresseur et charmant.	
D'un tel triomphateur ne trouble le diamant		
Même Xipe Totec	fuit et détruit sa souche	Y

C’est d’autant plus remarquable que dans les deux cas on a des alexandrins ! Pour cela, Claude Berge joue sur les diérèses (et son contraire synérèses) pour prononcer différemment certains mots :
Ainsi, le mot "lien" du quatrième vers peut se prononcer "li–en" en 2 pieds ou "lien" en 1 pied.
C’est la même chose pour "ouest" = "ou–est" et "en–foui" = "en–fou–i" du quatrième vers. Voir pour plus de précisions la contrainte "ALVA" sur le site oulipo.net

3) Contraintes numériques.

- Un auteur (inconnu) n’a pas attendu l’OULIPO pour fabriquer ce texte mnémotechnique dont voici le début :

	$\pi =$
Que j’aime à faire apprendre un nombre utile aux sages,	3,1415926535
Glorieux Archimède, artiste ingénieur,	8979
Toi de qui Syracuse aime encore la gloire,	32384626
Soit ton nom conservé par de savants grimoires !	43383279---

Il existe des textes analogues pour d’autres constantes. Mais que faire lorsqu’apparaît le chiffre 0 ?

- Voici, parmi des milliers, deux exemples de cryptarythmes :

$$\begin{array}{cccccc} & F & E & M & M & E \\ + & H & O & M & M & E \\ \hline = & A & M & O & U & R \end{array}$$

dans lesquels il faut remplacer chaque lettre par un chiffre pour rendre valide l’addition.

ZERO + UN + TROIS + ONZE + QUINZE = TRENTE
La partie littéraire de la contrainte consiste à trouver des mots qui forment un ensemble harmonieux.

- D’une manière générale, tout ce qui est numérique intéresse les oulipiens, même le calcul matriciel :

$$\begin{pmatrix} \text{le} & \text{a} & \text{le} \\ \text{un} & \text{a} & \text{un} \\ \text{le} & \text{avait} & \text{un} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{chat} & \text{rat} & \text{lion} \\ \text{mangé} & \text{dévoré} & \text{dégusté} \\ \text{poisson} & \text{fromage} & \text{touriste} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \text{le chat a mangé le poisson} & \text{le rat a dévoré le fromage} & \text{le lion a dégusté le touriste} \\ \text{un chat a mangé un poisson} & \text{un rat a dévoré un fromage} & \text{un lion a dégusté un touriste} \\ \text{le chat avait mangé un poisson} & \text{le rat avait dévoré un fromage} & \text{le lion avait dégusté un touriste} \end{pmatrix}$$

4) Contraintes alphabétiques.

Elles sont innombrables.

- Voici un exemple dû à Nicolas Graner (Voir sitographie) à propos de l'élection de Sarkozy en 2007.

Contrainte : Tous les mots de plus d'une lettre doivent contenir un Y.

"Ayant balayé l'incroyable polyphonie (bye-bye Voynet, trotskystes, paysans...), déblayé Bayrou, fayoté l'hydre tyrannique, renvoyé Royal, Sarkozy s'octroya l'Elysée. Johnny, l'impayable dépaysé, aboyait joyeusement ; Gynéco, bégayant pitoyablement, côtoyait Steevy, playboy blondoyant. Neuilly rayonnait, Clichy flamboyait. L'hyperactif Magyar, festoyant royalement, s'égayait d'analyser l'idylle, s'y voyait, s'y croyait : voyages payés, paysages chatoyants, yacht mystérieux, nymphettes sexy... Oyez l'hymne dithyrambique : pays dynamisé, citoyens systématiquement employés, employeurs défrayés, syndicats noyautés, Passy choyé, Aulnay nettoyé, voyous effrayés, youpi !"

- Les permutations, en général, sont une source inépuisable de contraintes.

Ainsi :

La contrainte **OKAPI** impose le cycle (A, E, I, O, U) pour toutes les voyelles du texte :

A D**E**M**I** M**O**T **U**N **A**RT CH**E**T**I**F N**OU**S P**A**RL**E** ---
A E I O U A E I OU A E

Mais à mon avis, le fin du fin en ce domaine alphabétique est le <u>lipogramme</u> : texte où l'on s'interdit une lettre (ou même plusieurs) avec bien sûr une prédilection pour l'interdiction du "e".
On trouve sur Internet des centaines de lipogrammes. Un exercice amusant (pour les matheux) est la rédaction de la démonstration d'un théorème connu sans utiliser la lettre "e".
L'exemple ci-dessous est dû à Nicolas Graner qui arrive à démontrer sans "e" et sans faute qu'il y a une infinité de nombres premiers :

<u>L'infini du primitif</u>

- Soit un cardinal A.

On dit qu'il a pour « divisant » un cardinal B, si la division d'A par B n'a aucun rompu, c.-à-d. si A vaut B plus B plus B ... (*n* fois).
Nommons « primitif » (on aurait pu choisir « primal ») un cardinal A qui n'a aucun divisant plus grand qu'un. Montrons qu'il y a toujours un primitif plus grand qu'un cardinal pris au hasard, donc qu'ils s'accroîtront jusqu'à l'infini.
Tout d'abord, nous connaissons la *proposition* 1 (qu'on pourrait garantir sans aucun mal si on voulait) :
si A a pour divisant B (pour tout B plus grand qu'un), alors A plus un n'a jamais pour divisant B.

On sait aussi (*proposition* 2) qu'un cardinal ayant au moins un divisant, a toujours au moins un divisant primitif (car s'il a un divisant non primitif, son divisant a aussi un divisant ; or tout divisant d'un divisant d'un cardinal produira aussi un divisant du cardinal).
Supposons donc (*supposition* 1) qu'il y ait N primitifs au total (pour un N fini), ni plus ni moins, soit p_1, p_2 ... p_N. On a alors un cardinal X produit par la multiplication p_1 fois p_2 fois ... fois p_N.
On voit qu'X a pour divisants p_1, p_2 ... p_N.
Soit alors Y qui vaut X plus un, voyons par quoi nous divisons Y. Suivant la proposition 1, Y n'a pour divisant ni p_1, ni p_2, ... ni p_N . Il n'a donc pour divisant aucun primitif (car nous supposons ici qu'il n'y a aucun primitif à part p_1, p_2 ... p_N).
Or, suivant la proposition 2 (par contraposition), s'il n'a aucun divisant primitif, il n'a aucun divisant du tout.
On voit donc qu'il y a un cardinal Y qui n'a aucun divisant, c.-à-d. un primitif, qui n'apparaît pas dans p_1, p_2 ... p_N. D'où la contradiction qu'on voulait par rapport à la supposition 1.
Conclusion : on pourra toujours bâtir un primitif plus grand qu'un cardinal fourni, ad infinitum. CQFD.

Pour terminer ce paragraphe voici Pythagore lipogrammé :

- Nommons TRIPOINT tout trio ayant trois points du plan.

Un tripoint a donc :

trois TRAITS (Un trait joint 2 points) plus

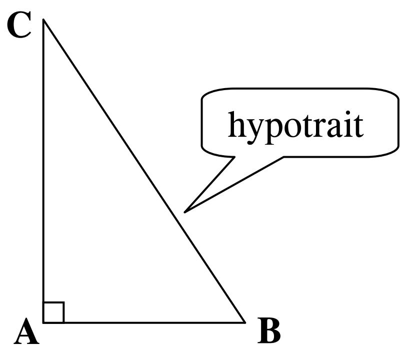
trois COINS (D'un coin on a 2 traits aux bords ; un coin droit fait pi/2 radians, un coin aigu fait moins, un coin obtus fait plus)

Pour finir, nommons AUTOPRODUIT tout produit $a \times a$
[Ainsi l'autoproduit 25 = 5 × 5]

Passons à la formulation du grand Pythagoras (Samos, 500 av. J-C) :

TH. Soit ABC un tripoint ayant un coin droit (disons A).
Alors, l'autoproduit du grand trait (on dit aussi hypotrait) vaut l'addition pour l'autoproduit aux traits du coin A.

Soit $BC^2 = AB^2 + AC^2$.



Il faut alors un justificatif pour l'affirmation du haut.

Voilà un bon travail pour tout individu lisant la F.d.V.

III) Une construction de HLM (Humour + Littérature + Mathématiques).

La cimaise et la fraction [7] d'Hervé Le Tellier

Une cimaise, seule, du haut de sa corniche,
s'ennuyait à crever comme un chien dans sa niche.
Pour occuper son temps, elle fait des divisions
et se trouve soudain devant une fraction.
“ Quel curieux animal... ” S'étonne la cimaise,
contemplant le quotient : trois divisé par treize.
La cimaise n'est pas matheuse,
c'est là son moindre défaut.
“ Moi j'ai pas mon bachot ”
fait-elle d'une voix boudeuse.
“ Un chiffre sur un autre, que sépare une barre,
c'est plus que compliqué, c'est carrément bizarre...
– Compliqué ? Pas du tout, s'indigne la fraction,
je ne suis, à vrai dire, qu'une représentation.
C'est tout simple, voyez : Trois est numérateur,
et le treize, au-dessous, est dénominateur.
D'ailleurs, sans me vanter, je suis irréductible.
– Si vous me l'affirmez... Je ne dirai pas non.
– Treize et trois sont premiers, insiste la fraction.
– Euh, oui, fait la cimaise, premiers ? C'est bien possible. ”
La fraction, à ces mots, se sent encouragée.
Elle parle théorie, évoque l'addition,
et le pépécéhème, et le pégécédé :
“ De façon générale, on dira p sur q...
– Comment ? Soyez polie.
– C'est un malentendu, voyons, dit la fraction.
C'était une expression... Pour rester dans l'abstrait.
– p sur q me paraît, à moi, assez concret,
j'ai beau n'être, c'est vrai, qu'une décoration,
j'ai du vocabulaire. Mieux, j'ai de l'instruction.
J'entends, de ma corniche, bien des conversations,
personne, au grand jamais, n'y parle de fraction.
Allez, déguerpissez, misérable invention. ”
La fraction, à ces mots, comprend qu'on la renvoie.
Elle ouvre un large bec, et laisse tomber son trois.

La cimaise s'en saisit, et dit : "Cher diviseur,
sachez que tout professeur
est ennuyeux pour celui qui l'écoute.
Cette leçon vaut bien un numérateur, sans doute."
Dépitée, la fraction, valant zéro sur q,
comprit, très en pétard, qu'elle ne diviserait plus.

Bibliographie :

- Arnaud GAZAGNES, **Mathématiques et jeux littéraires** chez ellipses. 2009.
Très complet sur le sujet.
- Bruno WINCKLER, **Blagues mathématiques et autres curiosités** chez ellipses. 2011. Déjà cité dans le chapitre I.
- Pascal KAESER, **Nouveaux exercices de style**, jeux mathématiques et poésie chez Diderot Editeurs, arts et science 1997.
- Dominique MONCOND'HUY **Pratiques oulipiennes**. Anthologie chez La bibliothèque Gallimard 2004.
- OULIPO, **Abrégé de littérature potentielle** chez Mille et une nuits. 2002.
- OULIPO, **OULIPO Pièces détachées** chez Mille et une nuits. 2007.
On y trouve les textes qui composent le spectacle créé par le Théâtre de l'Eveil, intitulé "Oulipo/Pièces détachées" qu'on a pu voir à Dijon récemment au théâtre des Feuillants.

Sitographie :

http://www.oulipo.net
Sur ce site, en cliquant à gauche sur "oulipiens" vous aurez la liste des 36 oulipiens, en cliquant à gauche sur "contraintes" vous aurez la liste des 135 contraintes oulipiennes ! Pour chaque contrainte, il y a la définition et souvent un exemple.
Je vous conseille d'explorer les contraintes "CHICAGO" et "SOLLICITUDE".
Les jeudis de l'Oulipo se tiennent à l'auditorium de la BNF, quai François Mauriac, 75013 Paris, à 19 h. (Un jeudi par mois).
Métro : Quai de la gare (ligne 6) ou Bibliothèque (ligne 14 ou RER C).
Bus : 89, 62, 132.
De nombreux auteurs, non membres de l'OULIPO, font un travail remarquable :

http://graner.net/nicolas
Excellent site de Nicolas Graner. Je vous conseille dans la page d'accueil de cliquer sur "Cothurne étroit" où l'on trouve des dizaines de textes à contraintes.

http://www.gef.free.fr
Excellent site de Gilles Esposito-Farèse, chercheur en physique théorique.

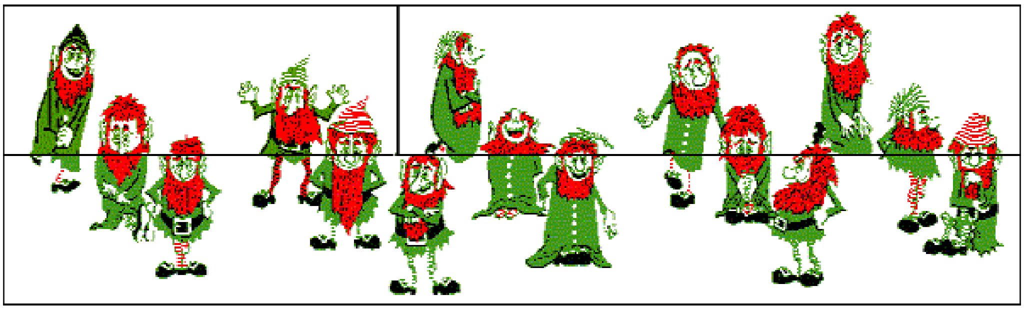
[1] Note de l'éditeur : penser aux complexes et à la rotation !

[2] Une parapèterie ressemble à une contrepèterie mais n'en est pas une. Ici, la seule contrepèterie est :
" Les élèves apprennent à calculer en 100 leçons" dans laquelle il faut permuter "cal" et "100".

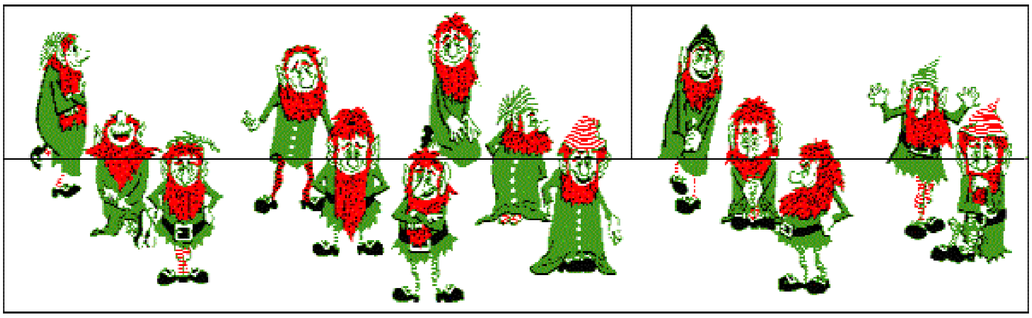
[3] Rappelons les contraintes du sonnet :
Sa définition : 14 vers composés de deux quatrains à rimes embrassées identiques et deux tercets à rimes croisées et embrassées. Le dernier vers (la chute) se distingue par un trait brillant…
Boileau dans son "Art Poétique" (1674) décrit les contraintes qu'il s'impose : en premier, la séparation 4+4+3+3 des 14 vers avec sens séparé pour les quatre parties ; ensuite, l'interdiction de répéter un mot ; et bien sûr la construction irréprochable des vers.

[4] Le groupe OULIPO est ouvert et accueille régulièrement de nouveaux membres pour participer aux séances de travail collectives qui se déroulent une fois par mois à Paris (entrée libre et gratuite).
OULIPO est l'abréviation de **OU**vroir de **LI**ttérature **PO**tentielle.
Voir la sitographie pour les détails.

[5] Le paradoxe de Deland. On voit dans le premier dessin ci-dessous 15 lutins.
Lorsqu'on inverse les deux parties du haut, on n'en a plus que 14 (second dessin).



Si vous examinez bien les 15 lutins du premier dessin, vous constaterez qu'ils sont tous plus ou moins "raccourcis" par rapport à ceux du second. C'est particulièrement clair sur le 7ème (premier du second dessin) et sur le dernier.



[6] Claude Berge a été un des créateurs de la théorie des graphes. Il est également l'auteur d'ouvrages majeurs en topologie et en analyse combinatoire. Il a eu le prix Euler en 1995. Il a été l'un des fondateurs de l'OULIPO en 1960 et il a proposé l'OuLiPoPo (Ouvroir de Littérature Policière Potentielle).
Il était aussi sculpteur et collectionneur d'arts. Enfin, il est l'inventeur de divers jeux de plateau…

[7] Ce titre curieux s'explique ainsi (si j'ai bien compris…) : Partant de "La cigale et la fourmi" de Jean de La Fontaine, Raymond Queneau, un fondateur de l'OULIPO, lui avait appliqué (en 1973) la "méthode SAV+7" qui est à la littérature ce que la translation est à la géométrie. Elle consiste à remplacer dans un texte chaque substantif, adjectif, verbe par son septième successeur dans un dictionnaire de référence. Cela donne :

La cimaise et la fraction.

La cimaise ayant chaperonné tout l'éternueur
Se tuba fort dépurative, quand la bisaxée fut verdie :
Pas un sexué pétrographique morio de moufette ou de verrat.
Elle alla crocher frange
Chez la fraction, sa volcanique ---

Hervé Le Tellier, autre oulipien, a repris l'idée en apportant une touche mathématique.
Cimaise est située à 11 substantifs derrière cigale dans le petit Larousse 2012, et une cimaise c'est la partie supérieure d'une corniche, laquelle corniche joue le rôle de l'arbre sur lequel est perché le corbeau dans "Le corbeau et le renard".

MISE EN PAGE :
Céline PETITJEAN

COMITÉ DE RÉDACTION ET DE LECTURE :
Marie-Line GARDES
Denis GARDES
Michel LAFOND
Marie-Noëlle RACINE
Michel BRIDENNE
Agnès GATEAU
Catherine LABRUERE CHAZAL
Jacky MARECHAL
Alain MASCRET

RÉDACTEUR EN CHEF :
Catherine LABRUERE CHAZAL

DIRECTEUR DE LA PUBLICATION :
Catherine LABRUERE CHAZAL, Directrice de l'IREM

DÉPÔT LÉGAL :
n° 204 – 1er semestre 2013

IMPRESSION :
Service Reprographie

FEUILLE DE VIGNE
Université de Bourgogne – UFR Sciences et Techniques
IREM
9 Avenue Alain Savary – BP 47870 – 21078 Dijon cedex
☎ 03 80 39 52 30 – Fax 03 80 39 52 39
@ : iremsecr@u-bourgogne.fr.
http://math.u-bourgogne.fr/IREM