

Jeu 81

Cas général (solution inspirée de <http://mathafou.free.fr/themes/parabole2.html>).

1. On place trois points A, B et C sur la parabole et on trace la droite (AB).

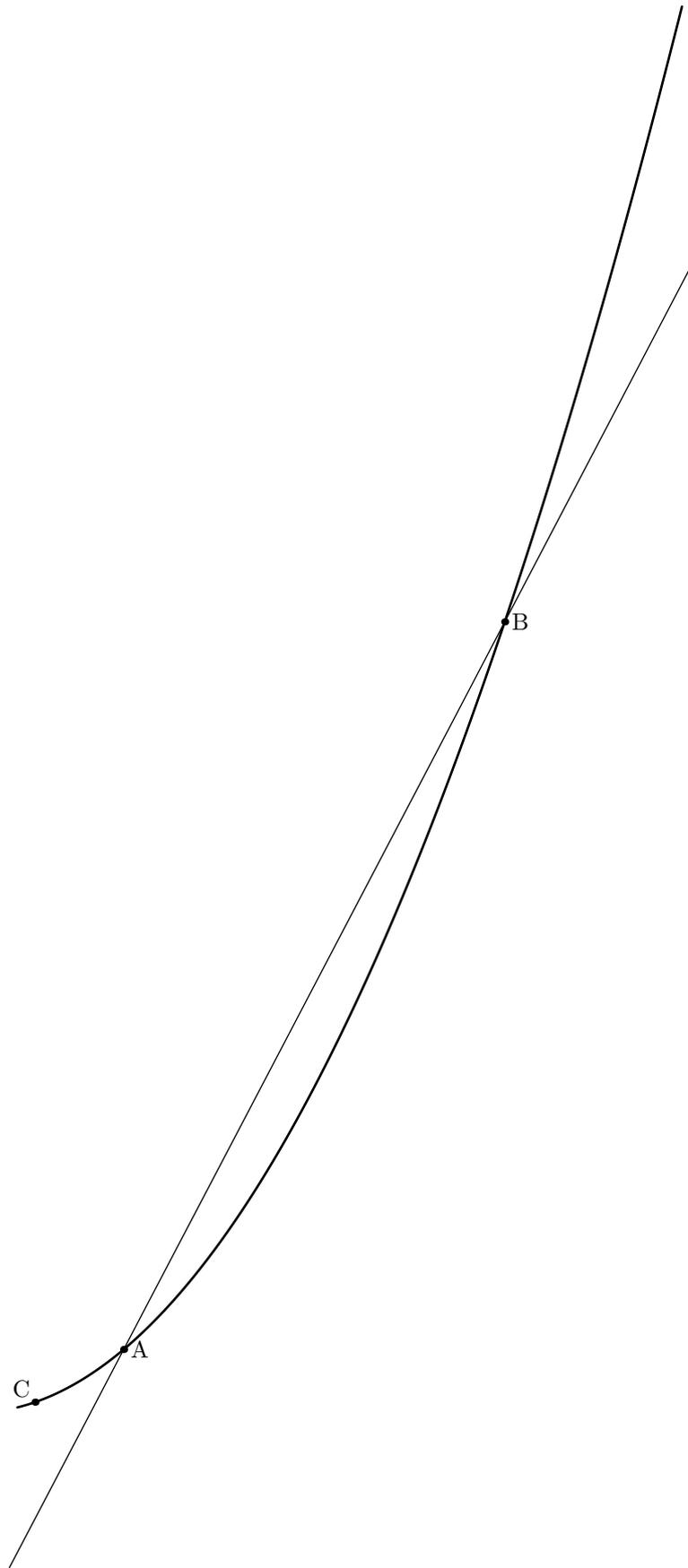


FIGURE 1 – *Étape 1*

2. On construit la parallèle à (AB) passant par C qui coupe la parabole en D .

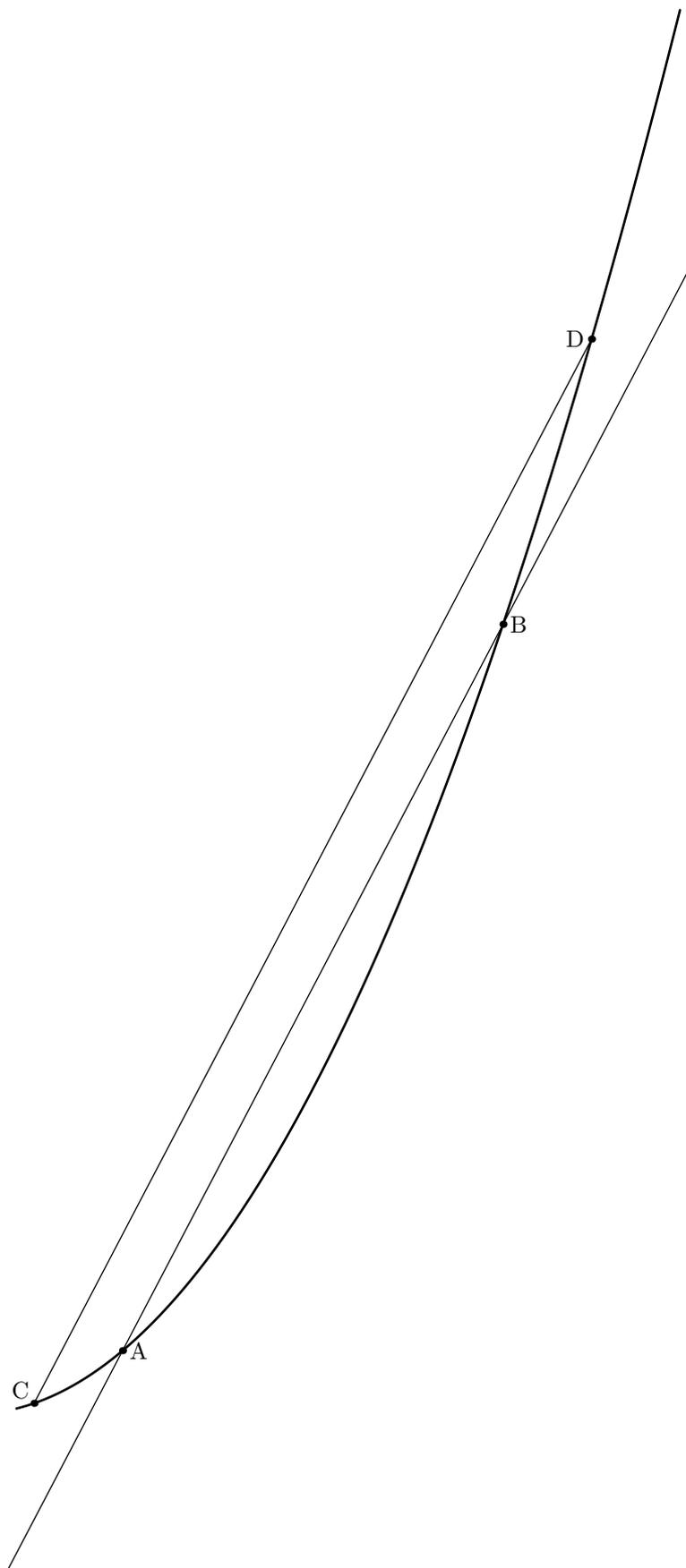


FIGURE 2 – Étape 2

3. On construit le milieu I de $[AB]$ et le milieu J de $[CD]$ et on trace la droite (IJ) ; cette droite est parallèle à l'axe de la parabole.

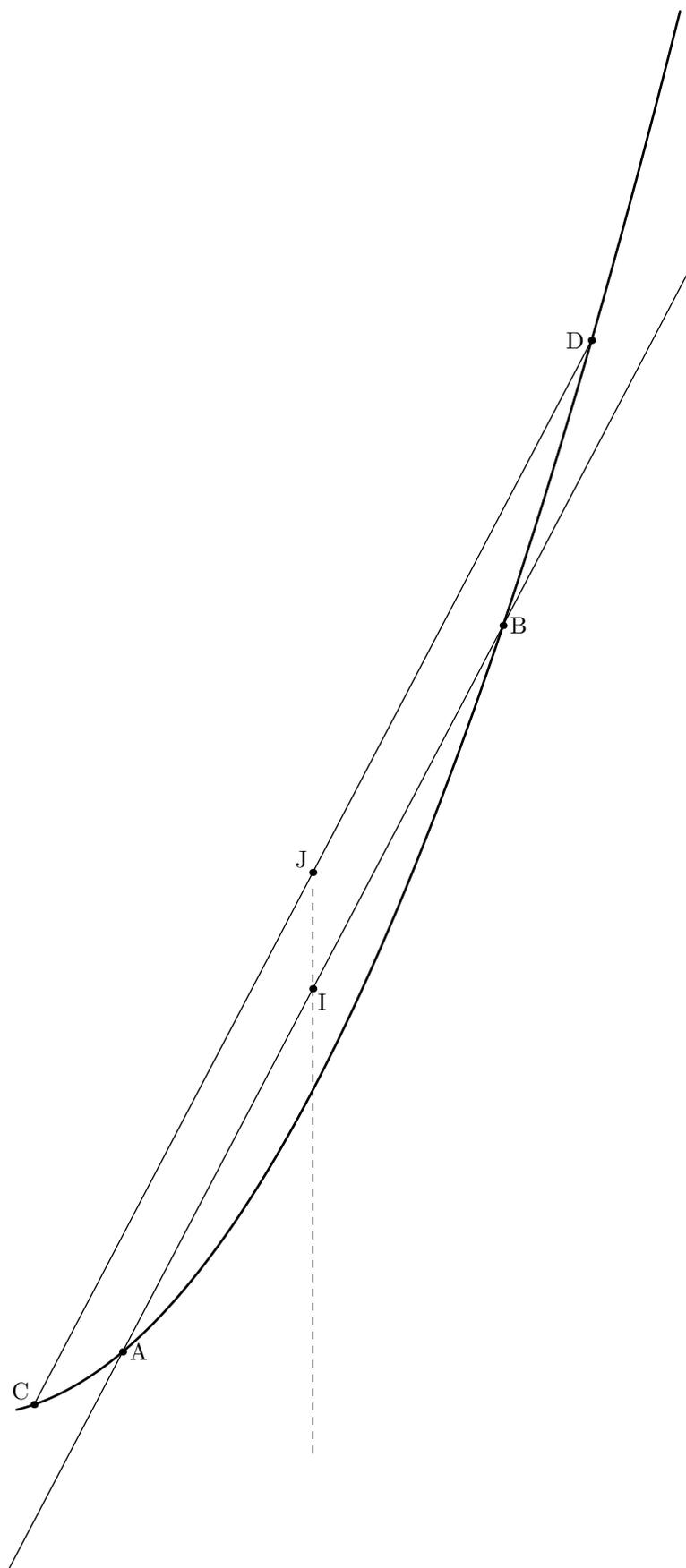


FIGURE 3 – Étape 3

4. On trace la droite parallèle à (IJ) passant par D qui coupe la droite (AB) en V.

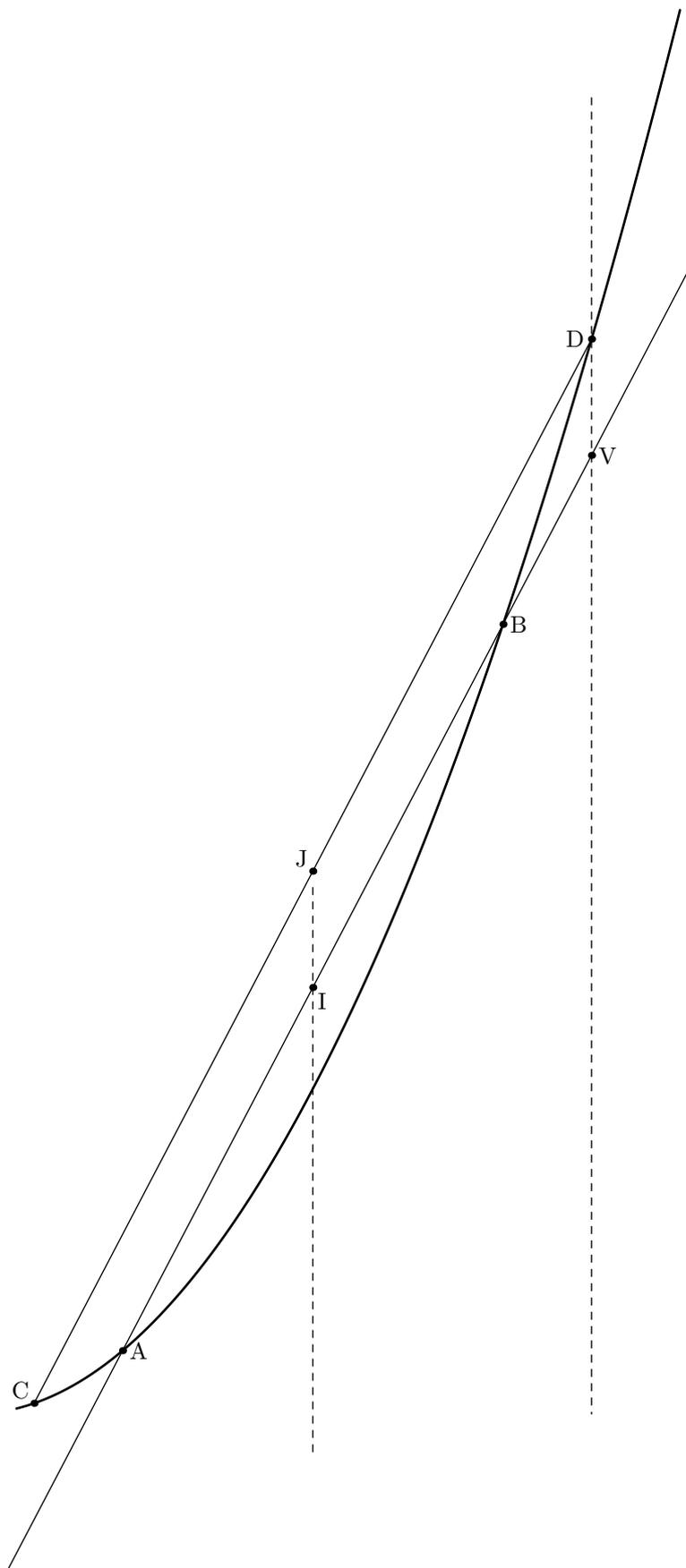


FIGURE 4 – Étape 4

10. On construit la parallèle à (IJ) passant par F : on obtient ainsi \mathcal{F} qui est l'axe de la parabole.

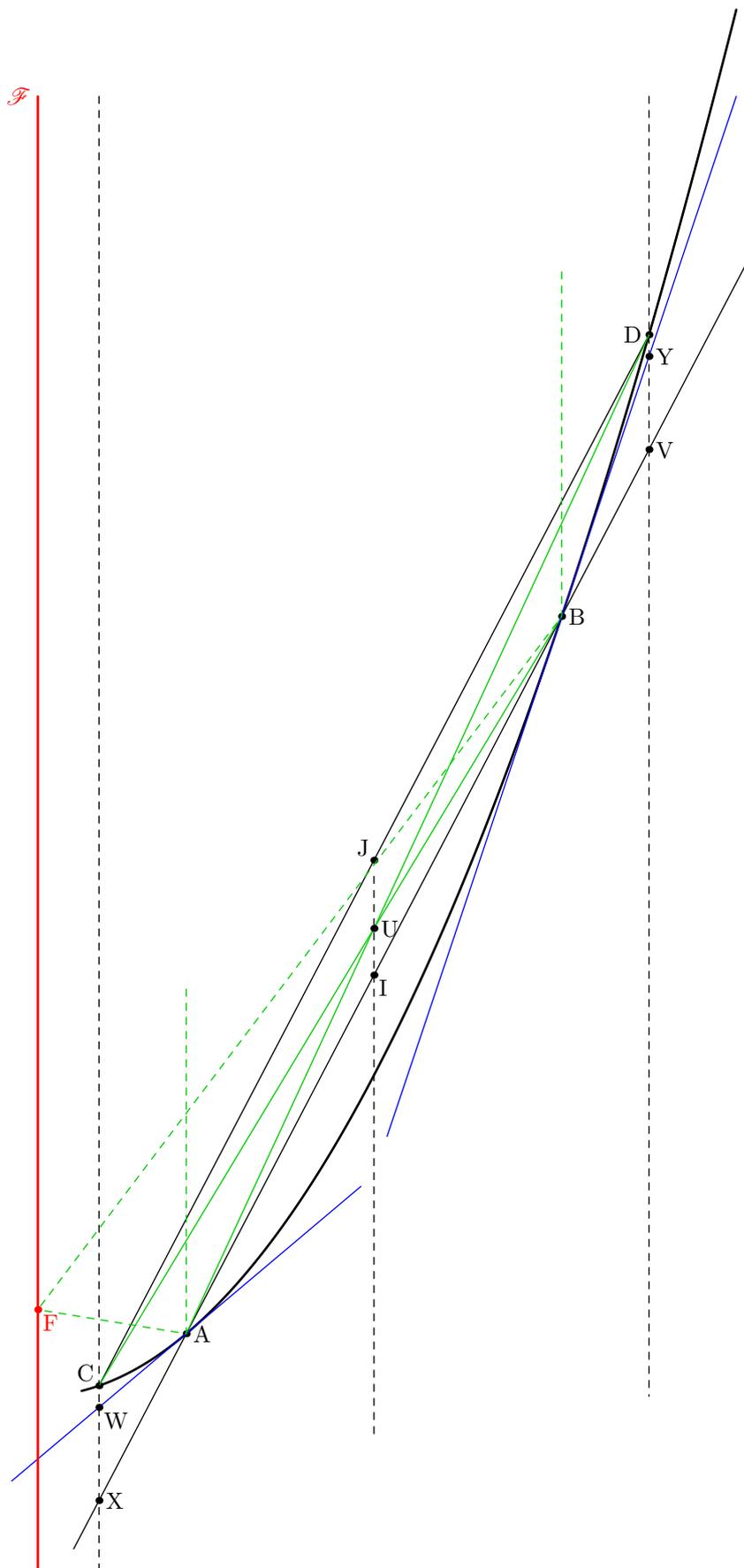


FIGURE 10 – Étape 10

12. On construit H sur \mathcal{F} tel que S soit le milieu de [FH] puis la droite orthogonale à \mathcal{F} passant par H; cette droite \mathcal{D} est la directrice de la parabole.

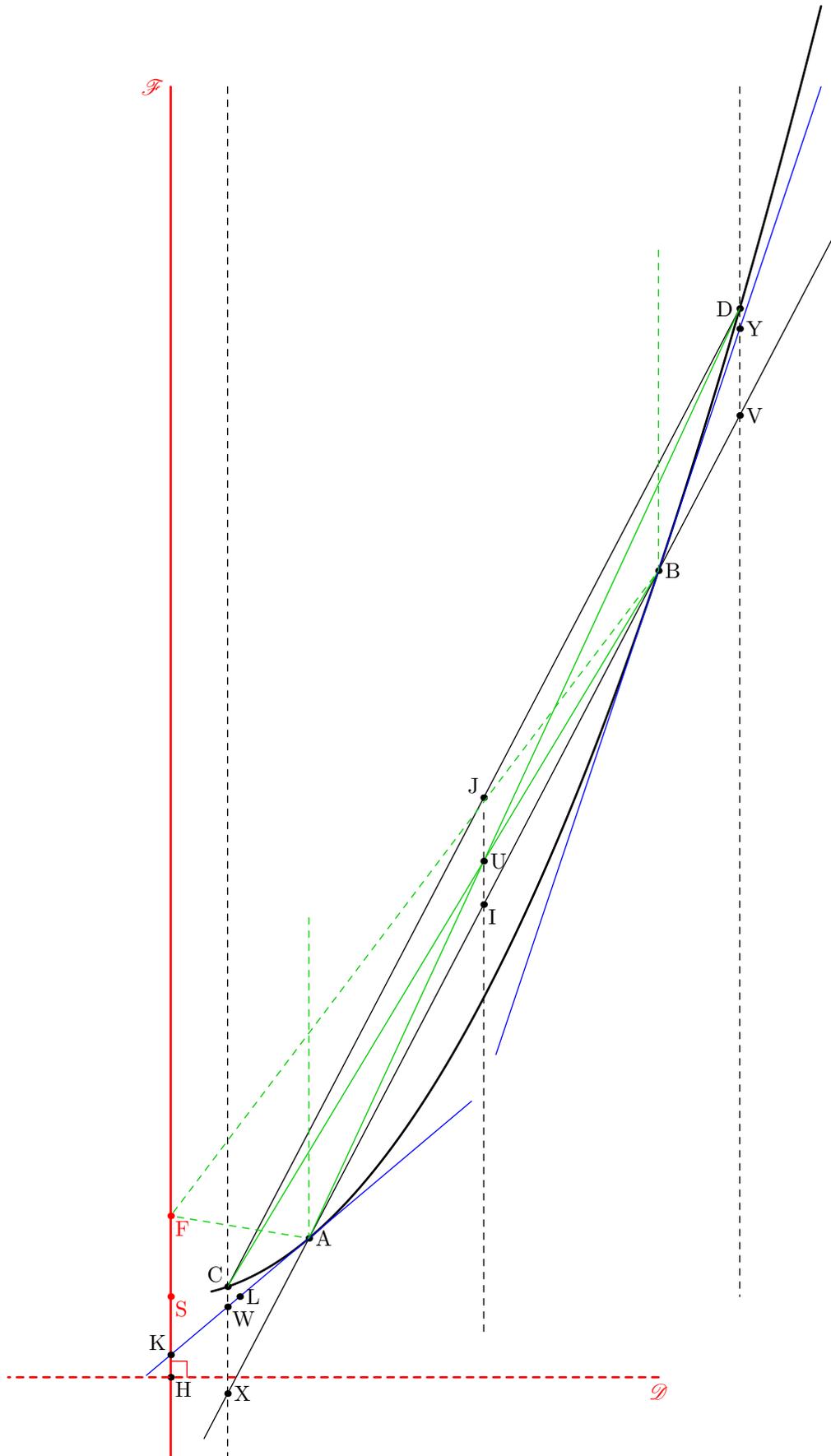


FIGURE 12 – Étape 12

Cas particulier : l'arc de parabole contient le sommet de la parabole

1. Étape 1 : placer deux points A et C sur l'arc de parabole, du même côté par rapport au sommet ; placer un point B sur l'arc de parabole de l'autre côté du sommet de la parabole ; tracer $[AB]$:

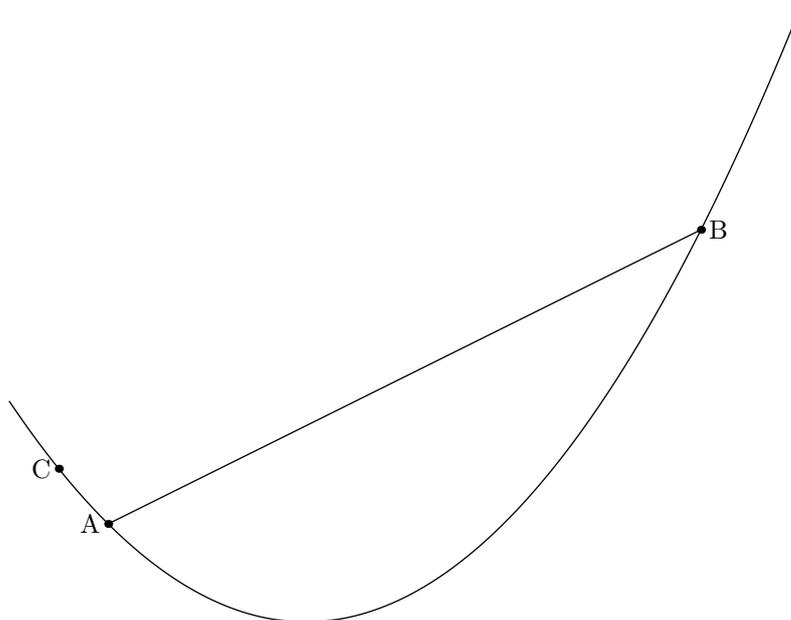


FIGURE 13 – Étape 1

2. Étape 2 : construire la parallèle à (AB) passant par C qui recoupe l'arc de parabole en un point D :

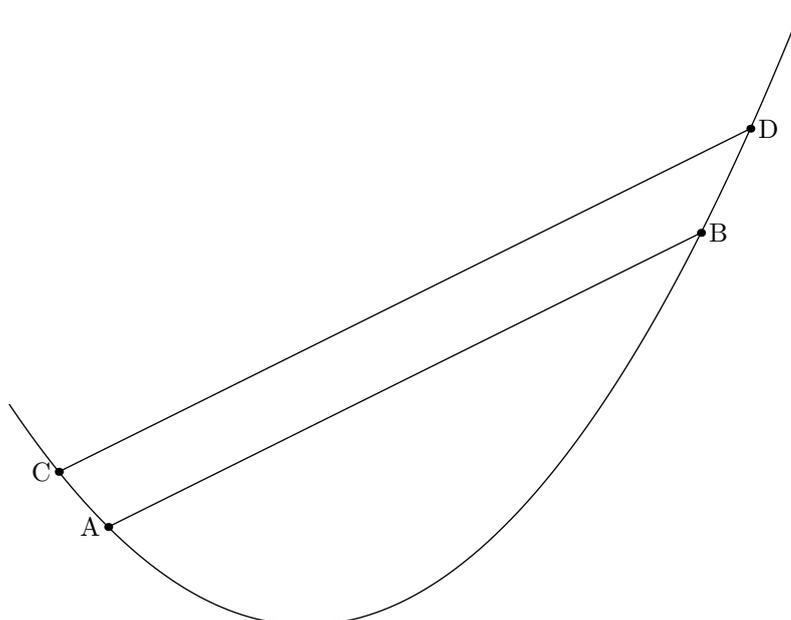


FIGURE 14 – Étape 2

3. Étape 3 : construire le milieu I de [AB] et le milieu J de [CD] et tracer la droite (IJ) :

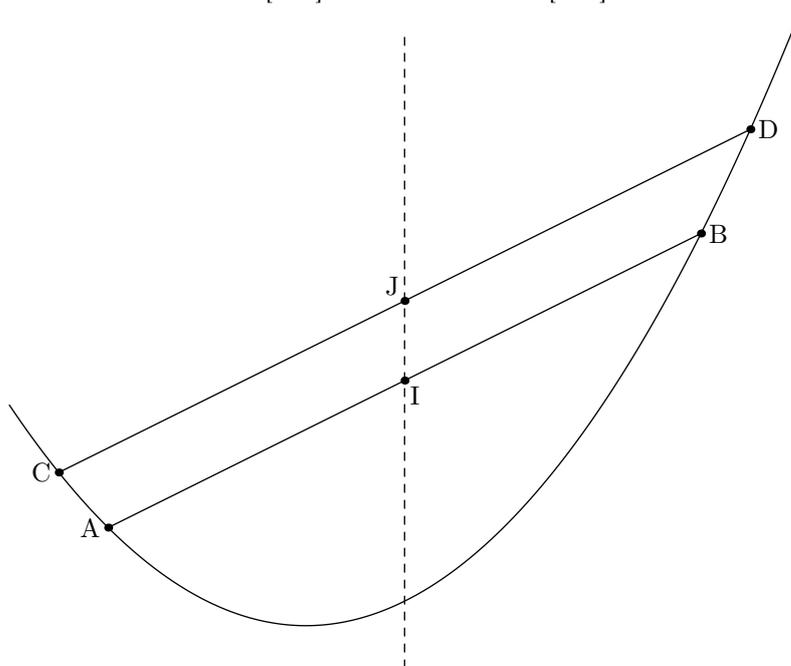


FIGURE 15 – Étape 3

Cette droite (IJ) est parallèle à l'axe de la parabole.

4. Étape 4 : construire la droite orthogonale à (IJ) passant par A ; cette droite recoupe la parabole en un point E :

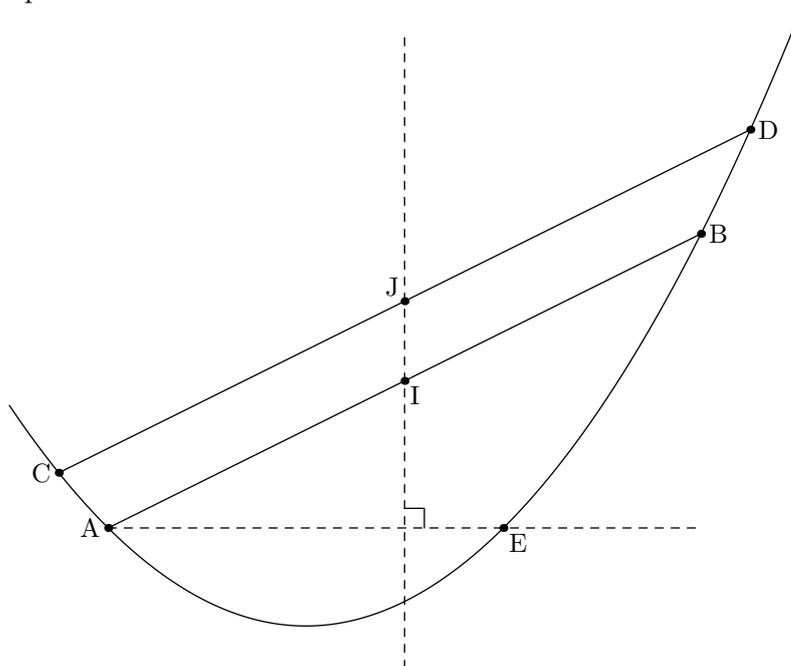


FIGURE 16 – Étape 4

5. Étape 5 : construire la médiatrice de $[AE]$: cette médiatrice est l'axe de la parabole.

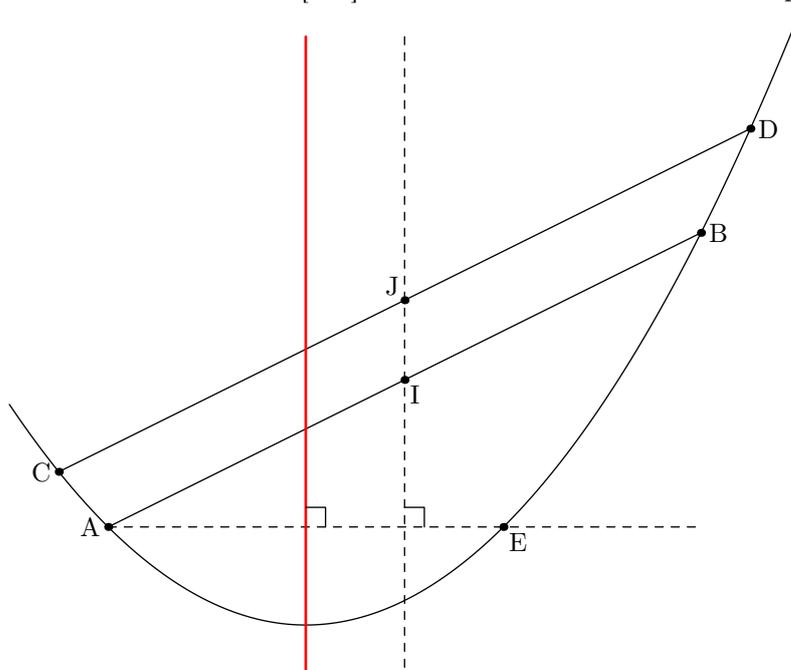


FIGURE 17 – Étape 5

Problème 81

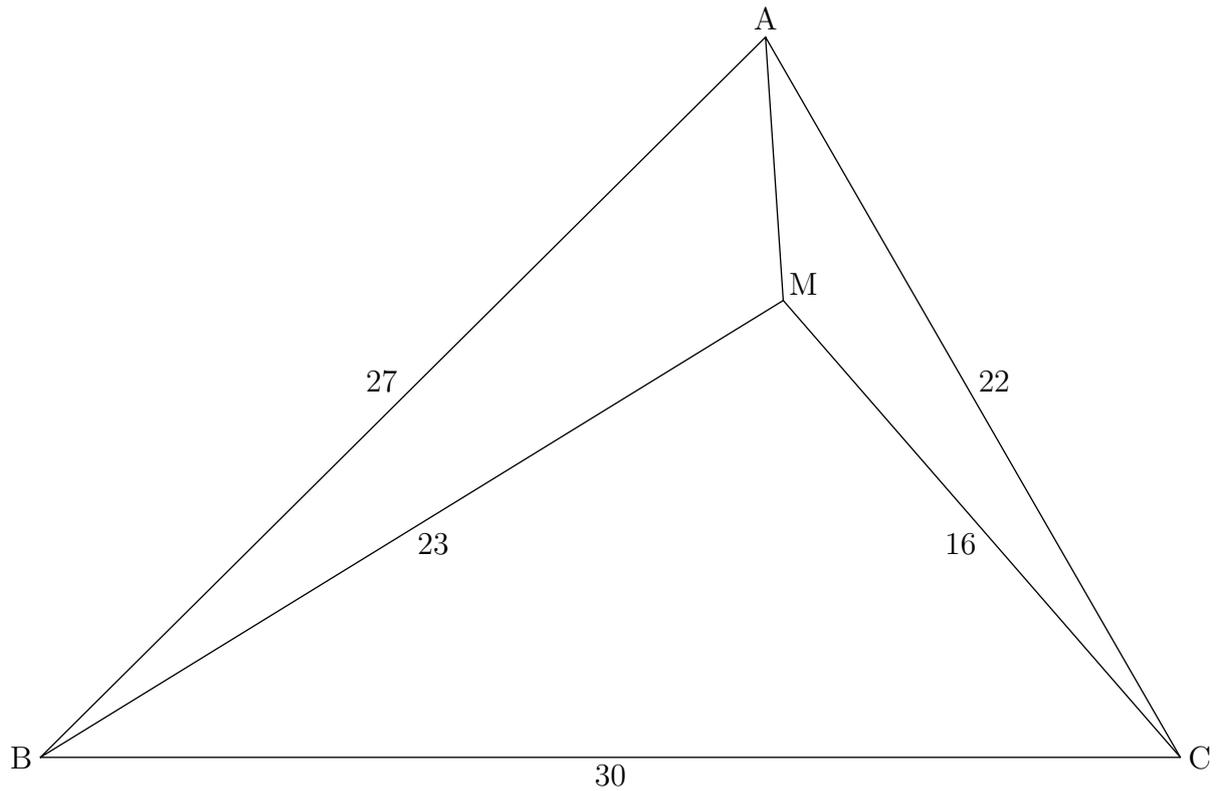


FIGURE 18 – $AM \stackrel{?}{=} 7$

Notons $\alpha = \widehat{AMB}$ et $\beta = \widehat{AMC}$ et supposons que la distance AM soit égale à 7. Alors, le théorème d'Al-Kashi dans le triangle AMB donne :

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2.AM.BM. \cos(\alpha)$$

c'est-à-dire :

$$27^2 = 23^2 + 7^2 - 2 \times 23 \times 7 \cos(\alpha)$$

soit :

$$(1) \quad \cos(\alpha) = -\frac{151}{2 \times 23 \times 7}$$

De même, le théorème d'Al-Kashi dans le triangle AMC donne :

$$(2) \quad \cos(\beta) = -\frac{179}{2 \times 16 \times 7}$$

Et le même théorème dans le triangle BMC donne :

$$\cos(2\pi - (\alpha + \beta)) = -\frac{115}{2 \times 23 \times 16}$$

c'est-à-dire :

$$(3) \quad \cos(\alpha + \beta) = -\frac{5}{2 \times 16}$$

La relation (1) nous donne :

$$\begin{aligned}
 \sin^2(\alpha) &= 1 - \frac{151^2}{(2 \times 23 \times 7)^2} \\
 &= \frac{103\,684 - 22\,801}{(2 \times 23 \times 7)^2} \\
 &= \frac{80\,883}{(2 \times 23 \times 7)^2} \\
 (4) \quad \text{donc : } \mathbf{\sin(\alpha)} &= \frac{\mathbf{\sqrt{80\,883}}}{\mathbf{2 \times 23 \times 7}}
 \end{aligned}$$

De même, la relation (2) donne :

$$\begin{aligned}
 \sin^2(\beta) &= 1 - \frac{179^2}{(2 \times 16 \times 7)^2} \\
 &= \frac{50\,176 - 32\,041}{(2 \times 16 \times 7)^2} \\
 &= \frac{18\,135}{(2 \times 16 \times 7)^2} \\
 (5) \quad \text{donc : } \mathbf{\sin(\beta)} &= \frac{\mathbf{\sqrt{18\,135}}}{\mathbf{2 \times 16 \times 7}}
 \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
 -\frac{5}{2 \times 16} &= \cos(\alpha + \beta) \quad \text{d'après (3)} \\
 &= \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) \\
 &= -\frac{151}{2 \times 23 \times 7} \times \left(-\frac{179}{2 \times 16 \times 7}\right) - \frac{\sqrt{80\,883}}{2 \times 23 \times 7} \times \frac{\sqrt{18\,135}}{2 \times 16 \times 7} \quad \text{d'après (1), (2), (4) et (5)} \\
 &= \frac{151 \times 179 - \sqrt{80\,883} \times \sqrt{18\,135}}{2^2 \times 23 \times 16 \times 7^2}
 \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 -5 \times 2 \times 23 \times 7^2 &= 151 \times 179 - \sqrt{80\,883} \times \sqrt{18\,135} \\
 \sqrt{80\,883} \times \sqrt{18\,135} &= 151 \times 179 + 5 \times 2 \times 23 \times 7^2 \\
 &= 38\,299 \\
 80\,883 \times 18\,135 &= 38\,299^2 \\
 (6) \quad 1\,466\,813\,205 &= 1\,466\,813\,401
 \end{aligned}$$

et l'égalité (6) est manifestement fausse, donc $\boxed{\text{AM} \neq 7}$.