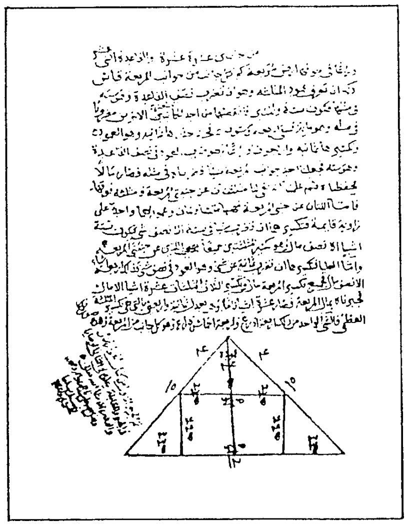
N° 95 – Avril 2005

Feuille de Vigne

Irem de Dijon

- Le positionnement par satellites (gps), à quoi ça sert les maths ?
- La découverte des fonctions elliptiques.
- Un carré dans un triangle ; de l'utilisation de textes anciens pour résoudre un problème.



- Somme de diviseurs.

Revue Trimestrielle

Issn 0246-5752

Sommaire

Articles

FEUILLE DE VIGNE
Université de Bourgogne – UFR Sciences et Techniques
IREM
9 Avenue Alain Savary – BP 47870 – 21078 Dijon cedex
☎ 03 80 39 52 30 – Fax 03 80 39 52 39
@ : iremsecr@u-bourgogne.fr....
http://www.u-bourgogne.fr/irem

MISE EN PAGE :
Françoise BESSE

COMITÉ DE RÉDACTION ET DE LECTURE :
Daniel BEAU
Frédéric METIN
Marie-Noëlle RACINE
Robert FERACHOGLOU

RÉDACTEUR EN CHEF :
Daniel BEAU

DIRECTEUR DE LA PUBLICATION :
Daniel BEAU, Directeur de l'IREM

N° D'ENREGISTREMENT :
1 496 ADEP

DÉPÔT LÉGAL :
n° 170 – 1er semestre 2005

IMPRESSION :
Service Reprographie
Département de Mathématiques

B loc-notes

Cette rubrique vous informe des manifestations qui se dérouleront durant le prochain trimestre.

Le 9 juin 20005 se tiendra à l'IUT de Chalon-sur-Saône un colloque en hommage à Charles MÉRAY, mathématicien et pédagogue de la "grande époque" (fin 19e, début 20e), auteur trop méconnu de la première construction des réels et d'une nouvelle conception de l'enseignement de la géométrie qui inspira les réformateurs de1902.
Le colloque est organisé par Vincent Cossard, Hélène Gispert, Jean-Paul Dufour et l'IREM de Dijon ; il sera placé sous le double signe de la science (IUT de Chalon) et de la viticulture (commune de Mercurey), ce qui ne gâche rien…
Inscription et renseignements s'obtiennent par courrier électronique auprès de l'IREM de Dijon (iremsecr@u-bourgogne.fr) ; le programme prévisionnel se trouve ci-dessous.

HOMMAGE SOLENNEL A Charles MERAY,
Mathématicien et vigneron chalonnais (1835-1911)

le 9 juin 2005 - IUT de Chalon sur Saône

9h-9h30 : accueil officiel (Président de l'Université de Bourgogne, Grand Chalon, CNRS, SMF et directeur Institut de Math de Bourgogne)

9h30-10h 20 (questions comprises) :
"La rigueur en analyse à l'époque de MERAY et POINCARE" conférence par le Pr AROCA (Valladolid)

10h30-11h20 : "MERAY et la géométrie" conférence du Pr Bkouche (Lille).

11h45-13h : tables rondes la rigueur en mathématiques depuis MERAY et POINCARE, animée par AROCA, MOUSSU, QUADRAT et sur l'enseignement des mathématiques de MERAY à nos jours animée par BKOUCHE, METIN, et GISPERT.

14h30-15h30 : "Pédagogie et philosophie des mathématiques: état des lieux à la fin du 19e siècle" par le Pr CHAZAL, conférence suivie d'une discussion.

15h30-16h30: "MERAY le Bourguignon" par le Pr PAUTY de l'Académie des Sciences Arts et Belles Lettres de Dijon

Transfert à Mercurey à 16h30, à partir de l'IUT, par car.

17 heures, Inauguration d'une plaque sur la maison de la famille Méray a Mercurey.

LE COIN DE L'APMEP

Après Orléans

Cette année, les Journées nationales de l'APMEP se sont déroulées à Orléans au début des vacances de Toussaint, sur le thème « MATHEMATIQUES ET ENVIRONNEMENT ».
Un certain nombre de collègues bourguignons s'y sont retrouvés, soit comme simples participants, soit, comme animateurs d'ateliers.

Comme toujours, ces journées ont été riches en occasions :

Occasions de voir ou d'entrevoir la manière dont les mathématiques interviennent dans des domaines où a priori on ne s'attendrait pas forcément à les trouver : conférence inaugurale consacrée à la modélisation des crues de la Loire, conférences diverses évoquant d'autres domaines où la modélisation rend de multiples services (climatologie, risques naturels…). Un prochain « Bulletin Vert » rendra compte de ces conférences.

Occasions d'approfondir toutes sortes de questions, de prendre connaissance d'activités menées en classe, présentées par des collègues dans les multiples ateliers proposés.

Occasion de faire le point sur l'état de l'enseignement de notre discipline, sur les perspectives d'avenir, sur les positions, revendications, actions de l'Association, lors des ateliers-débats et de l'« Assemblée Générale ».

Enfin, les « interstices » entre ces multiples activités ont donné l'occasion de multiples rencontres informelles et conviviales dans ce creuset où se retrouvent des collègues venus de tout l'hexagone et d'au-delà (outre-mer, étranger).

Rendez-vous à CAEN du 21 au 24 octobre pour les « Journées 2005 » sur un thème très vaste : « Mathématiques à la mode de… » . Au mois de mai, un BGV (« Bulletin à Grande Vitesse ») spécial détaillera le contenu de ces Journées.

Le positionnement par satellites (gps)

A quoi ça sert les maths ?

Michel LAFOND – Lycée Le Castel à Dijon

Comment le réseau américain GPS (Système de positionnement par satellites), ou le futur réseau européen Galiléo procèdent t-ils pour garantir à 10 mètres près les 3 coordonnées (altitude, longitude, latitude) d'un sujet terrestre M muni d'un récepteur adéquat ?

Il y a 3 inconnues. Ca paraît simple : si on connaît les distances de M à 3 satellites S1, S2, S3 du réseau, le système des 3 équations associées devrait suffire.

Comme le réseau GPS comprend 24 satellites, s'ils sont bien répartis, de tout point de la surface de la terre on en voit facilement 5 voire 6. De ce côté, pas de souci.

Mais pour calculer les distances $d_i = MS_i$ il faut bien passer par le temps t_i que met un signal (électromagnétique) envoyé de S_i vers M et utiliser la vitesse de la lumière c avec la formule $d_i = c\ t_i$.

- *C'est ici que tout se complique :*

Prenons pour unités le mètre et la seconde. On a donc $c = 300\ 000\ 000$ m/s.

Les horloges des satellites sont des horloges atomiques dont la précision est presque parfaite. En admettant que la précision de 10 m exigée sur la position de M implique une précision de 10 m sur les d_i alors, comme $d_i = c\ t_i$ il faut une précision de $\frac{10}{c} = 3.10^{-8}$ secondes (30 nanosecondes) sur t_i.

t_i sera calculé comme différence entre la date de réception du signal par M soit r_i et la date d'émission du signal par le satellite soit e_i. Hélas la banale formule $t_i = r_i - e_i$ pose un problème épineux, car si la précision sur e_i est largement inférieure à 10^{-8} secondes, ce n'est pas le cas de la précision de l'horloge de M dont l'avance ou le retard peut nettement dépasser les 30 nanosecondes. Avec un appareil qui coûte dans les 150 euros, il ne faut quand même pas rêver.

Or une simple petite microseconde (10^{-6} seconde) à la vitesse de la lumière, cela fait déjà 300 m !

Il va bien falloir prendre en compte la quatrième inconnue ε égale à l'avance (algébrique) du récepteur exprimée en seconde.

Mais alors, il nous faut un quatrième satellite S4 pour avoir la quatrième équation ! Nous verrons dans les calculs à la fin de l'article, que cette équation supplémentaire va permettre en fait de calculer ε, donc de mettre le récepteur à l'heure !

Dans la pratique il est possible de prendre plus de 4 satellites pour obtenir plus de précision, ou dans le cas des géologues ou des militaires qui ont parfois besoin d'une précision centimétrique, d'utiliser des balises terrestres fixes dont la position est évidemment parfaitement connue.

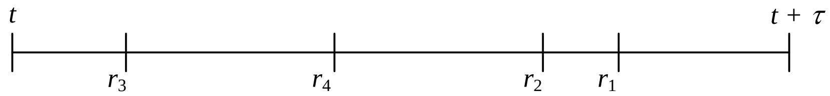
- *Voyons les détails :*

Les satellites émettent toutes les τ secondes (disons $\tau = 1$ pour fixer les idées) un signal dans toutes les directions. Ce signal n'est pas un simple bip-bip, mais contient la date d'émission : e et la position du satellite (3 coordonnées).

Tous les satellites sont synchronisés. On ne peut pas le faire au moment du lancement, car ils peuvent être lancés (ou renouvelés) à des dates parfois éloignées, mais la synchronisation est possible à distance ! Exactement de la même manière que l'horloge de M parviendra à se mettre à l'heure.

On peut donc considérer que les émissions des satellites se font simultanément toutes les τ secondes. A l'instant t où M demande sa position, le récepteur va donc rechercher dans la plage de temps $[\, t\,;\ t+\tau\,[$ les 4 signaux correspondant à 4 satellites visibles de M à savoir : S1, S2, S3, S4.

Ces signaux sont uniques et on se retrouve avec un schéma tel que celui-ci :

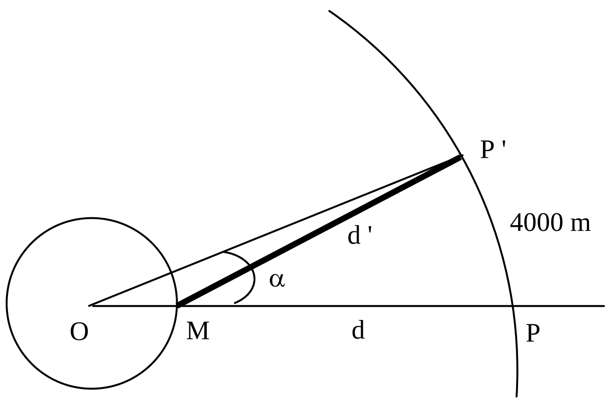


où $r_1\,;\, r_2\,;\, r_3\,;\, r_4$ sont les dates de réception des 4 signaux, dates mesurés par l'horloge du récepteur, en avance de ε rappelons-le.

On a donc le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} e_1 + t_1 + \varepsilon = r_1 \\ e_2 + t_2 + \varepsilon = r_2 \\ e_3 + t_3 + \varepsilon = r_3 \\ e_4 + t_4 + \varepsilon = r_4 \end{cases}$$

On peut sans problème poser $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = t$ (date où le récepteur demande sa position) car pendant la durée $\tau = 1$ les satellites parcourent environ 4 000 m à 20 000 km $= 2.\ 10^7$ m d'altitude sur une orbite à peu près circulaire. Le rayon de la terre étant d'environ $6.\ 10^6$ m, on a le schéma ci-dessous où, si P est la position d'un satellite, MP $= 2.\ 10^7$ donc OP $= 26.\ 10^6$.



Un satellite pendant la durée $\tau = 1$, va donc aller de P à P' . L'angle α mesure à peu près

$$\alpha = \frac{4000}{26.10^6} \approx 0{,}000154$$ radians, et un peu de calcul montre que :

M ($6.\ 10^6$; 0) P ' (25 999 999,7 ; 4000) soit MP ' $\approx$ 20 000 000,1

L'écart entre d = MP et d' = MP ' est d'environ 1 décimètre. Poser $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = t$ revient donc à faire une erreur de $\tau = 1$ seconde sur les temps de parcours, soit une erreur négligeable sur les distances.

Puisque $t_i = \dfrac{d_i}{c}$ le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} e_1 + \dfrac{d_1}{c} + \varepsilon = t \\ e_2 + \dfrac{d_2}{c} + \varepsilon = t \\ e_3 + \dfrac{d_3}{c} + \varepsilon = t \\ e_4 + \dfrac{d_4}{c} + \varepsilon = t \end{cases}$$

Le calculateur du récepteur connaît seulement c ; t ; les e_i ; et les 12 coordonnées des 4 satellites que ceux-ci lui ont transmises. Il ne peut pas calculer les d_i autrement qu'en résolvant le système d'inconnues (x, y, z, ε) si on nomme (x, y, z) les coordonnées de M dans un repère.

Il en déduira bien sa position et en prime son avance ε !

On voit au passage comment effectuer une synchronisation à distance.

- Passons sous silence les innombrables petits détails qui compliquent le calcul, comme par exemple le retard de 7 microsecondes dû à la correction relativiste (plus on va vite, plus le temps est court, ce n'est pas une légende !) et l'avance de 46 microsecondes due à la gravité qui n'est pas la même à 20 000 km d'altitude qu'au sol (autre bizarrerie de la relativité). Il paraît d'ailleurs que les ingénieurs militaires américains qui ont conçu le GPS vers 1970 ont eu des humeurs devant la nécessité de faire ces corrections et on les comprend.

- *Voyons un exemple plus terre à terre*, et même tellement à terre qu'il va se passer entièrement au sol, ce qui va nous permettre de gagner une dimension donc une inconnue dans nos calculs. Cet exemple peut être traité en terminale.

On a l'énoncé suivant où les unités sont le mètre et la seconde :

Un sujet M est dans le plan et veut déterminer sa position. Il est équipé d'un récepteur dont l'horloge peut avancer ou retarder de quelques secondes.
Aux trois points du plan :

A (0 ; 4000) B (-3000 ; 0) C (2000 ; 0)

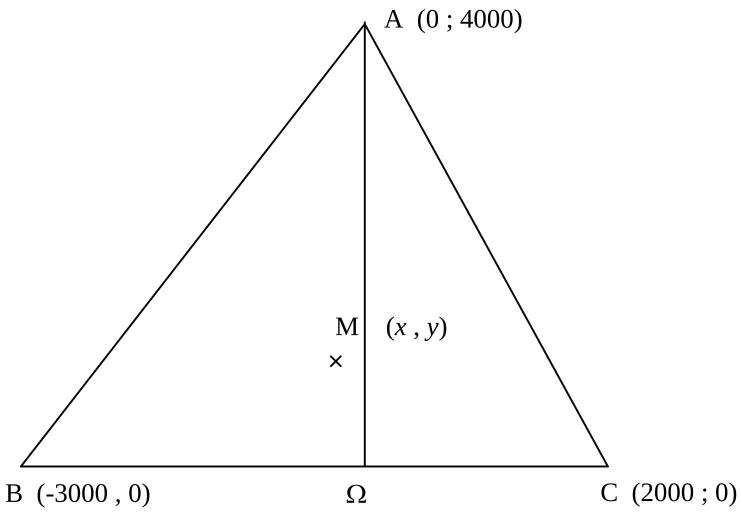
se trouvent des balises émettant en continu des signaux sonores se déplaçant à la vitesse de 330 m/s. Ces signaux contiennent la date d'émission (supposée exacte) et la position de la balise. Le récepteur du sujet M connaît donc à tout instant les dates d'émission des signaux en plus des coordonnée des balises.

le signal que A émet à 0h 0' 30'' ;

le signal que B émet à 0h 0' 30'' et 42 dixièmes ;
le signal que C émet à 0h 0' 31'' et 54 dixièmes,
sont reçus simultanément par M alors que son horloge indique 0h 0' 40''.

1) Calculer la position exacte de M.
2) De combien l'horloge de M avance t-elle au moment de la réception ?

Voici la situation :



En appelant x , y les coordonnées de M, ε l'avance algébrique de son horloge, d_A, d_B, d_C, les distances respectives MA, MB, MC, on a les 3 équations suivantes :

$$30 + \frac{d_A}{330} + \varepsilon \; = \; 30{,}42 + \frac{d_B}{330} + \varepsilon \; = \; 31{,}54 + \frac{d_C}{330} + \varepsilon \; = \; 40.$$

Par des soustractions membre à membre on élimine provisoirement le problème de l'horloge.

On obtient :

$$\frac{d_A}{330} - \frac{d_B}{330} = 0{,}42 \qquad \frac{d_A}{330} - \frac{d_C}{330} = 1{,}54 \qquad \text{ou} \qquad d_A - d_B = 138{,}6 \qquad d_A - d_C = 508{,}2$$

On a donc le système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} (1)\;\; (x)^2 + (y-4000)^2 \; = \; d_A^2 \\ (2)\;\; d_B^2 \; = \; (x+3000)^2 + y^2 \; = \; (d_A - 138{,}6)^2 \\ (3)\;\; d_C^2 \; = \; (x-2000)^2 + y^2 \; = \; (d_A - 508{,}2)^2 \end{cases}$$

Les calculs qui suivent sont faits avec une calculette ordinaire.

(2) – (3) donne $\quad 10\,000\,x + 5\,000\,000 = 739{,}2\; d_A - 239\,057{,}28 \qquad (4)$

soit $\quad d_A = 13{,}52813853\,x + 7087{,}469264 \qquad (5)$

(2) – (1) donne $\quad 6\,000\;x + 8\,000\;y = -277{,}2\;d_A + 7\,019\,209{,}96 \qquad (6)$

En éliminant d_A entre (4) et (6) on trouve :

$$7207200\;x + 5913600\;y = 3736333324$$

soit $\quad y = -1{,}21875\;x + 631{,}8204349 \qquad (7)$

On remplace y tiré de (7) et d_A tiré de (5) dans (1) : cela donne l'équation de degré 2 en x :

$$x^2 + (-1{,}21875\ x + 631{,}8204349 - 4000)^2 = (13{,}52813853\,x + 7087{,}469264)^2$$

qui sous forme standard est :

$$180{,}5251805\ x^2 + 183550{,}5944\ x + 38887586{,}99 = 0$$

Elle a 2 solutions dont l'une (-715,8 est à rejeter d'après (5) qui donnerait d_A négatif.)

Il reste : $x = -300{,}9281583$ d'où d'après (7) : $y = 998{,}5766278$.

De (5) on tire $d_A = 3016{,}471451$
Et pour l'avance, les équations de départ donnent toutes les trois $\varepsilon \approx 0{,}859$.

M se trouve donc à peu près à (-301 ; 999) et son horloge avance d'environ 0,86 secondes.

(La figure est à peu près exacte)

- *Il est indispensable* de faire un calcul d'erreur pour avoir une idée de la pertinence de tout cela.

Or ces mêmes calculs faits avec 20 chiffres significatifs (Maple) donnent la même chose à l'arrivée, les écarts ne se constatant qu'aux décimales lointaines :

$$x = -300.92815834346104024$$
$$y = 998.57662798109314279$$
$$\varepsilon = .85917742126873607 16$$

- ***Bibliographie :*** le numéro 326 de "POUR LA SCIENCE", décembre 2004, pages 40 à 48.

La découverte des fonctions elliptiques

Emmanuel MOREAU, Lycée Louis Davier à JOIGNY

1995, Andrew Wiles

Les retentissants résultats d'Andrew Wiles ont cette année là porté les courbes elliptiques sur le devant de la scène scientifique, ces curieux objets étant jusque là considérés uniquement par quelques spécialistes. Mais si ces courbes aux propriétés étonnantes n'ont plus grand-chose de commun avec les ellipses d'Apollonius, le chemin qui mène aux intégrales puis aux fonctions et aux courbes elliptiques nous fait parcourir un chapitre passionnant de l'histoire des mathématiques, où l'on aura l'occasion de suivre l'évolution d'un problème et les démarches, les réussites et les surprises rencontrées par les plus grands esprits.

Je laisse à de plus savants que moi les considérations actuelles sur le sujet, qui me dépassent. Je ne souhaite dans ce qui suit qu'évoquer les premières rencontres, les premières difficultés des mathématiciens se heurtant à des calculs impossibles d'intégrales, et les premières solutions…
Un article consacré à ce sujet ne peut qu'immanquablement conduire à dépasser parfois le niveau de l'enseignement secondaire, mais je crois qu'il est intéressant pour nous, professeurs, même si nous enseignons les intégrales à un niveau élémentaire, de connaître les problèmes auxquels ces notions ont parfois conduit et de pouvoir distinguer les intégrales que l'on peut calculer de celles que l'on ne peut pas.
Et puis les ellipses sont des objets qui nous sont trop familiers pour qu'on puisse ignorer la formidable aventure qu'elles ont suscitée.

J'ai adopté dans ce qui suit une démarche sensiblement chronologique, mais j'ai pris la liberté de moderniser les raisonnements et les notations des savants.

1655, Wallis, puis Newton

Au $XVII^{ème}$ siècle, les mathématiques sont encore largement inspirées des Anciens, et c'est dans ce contexte que Wallis, qui a 26 ans de plus que Newton, consacre un traité aux coniques. Depuis quelque temps pourtant, un souffle nouveau anime la science occidentale : les progrès effectués par Cavalieri, Roberval et Fermat en analyse vont permettre le développement du calcul utilisant les séries. C'est en contribuant à faire naître ces nouvelles théories que Wallis puis Newton parviendront à exprimer la longueur d'une ellipse.
Wallis commence à s'intéresser à ce problème en 1655.
En utilisant l'équation paramétrique usuelle de l'ellipse, la longueur est exprimée par :

$$L = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t}\, dt \qquad \text{où} \qquad e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

Ni Wallis ni Newton ne parviendront à exprimer cette intégrale à l'aide des fonctions usuelles. Newton parviendra par contre, poursuivant le travail de Wallis, à exprimer cette longueur à l'aide d'une série entière, contribuant ainsi d'une manière fondamentale au développement de ces nouveaux objets mathématiques. Ecrit en 1669, son travail sur les séries ne sera réellement édité qu'à partir de 1711.
Wallis avait introduit la notion d'exposants fractionnaires, qui était manipulée à l'époque avec quelques difficultés. Newton généralisera la notion de binôme aux exposants fractionnaires.

Si l'on écrit $\sqrt{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-u)^n$, pour $0 \le u < 1$, on obtient :

$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-1)^n e^{2n} \cos^{2n} t \, dt = 4a \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-1)^n e^{2n} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t \, dt .$$

On rencontre ici les intégrales de… Wallis (définies par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$) qui se calculent aisément (aujourd'hui) par récurrence : à l'aide d'une intégration par partie on obtient

$$I_n = \frac{n}{n-1} I_{n-2} \text{ d'où : } \qquad I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)...1}{2n(2n-2)...2} \frac{\pi}{2} .$$

Si l'on remarque que pour $n > 1$ on a :

$$\binom{1/2}{n} = \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)...((3-2n)/2)}{n(n-1)............2.1} = (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)(2n-5)...1}{2n(2n-2)...2} .$$

Ainsi, en remarquant que $(-1)^{n-1}(-1)^n = -1$, on obtient la superbe formule :

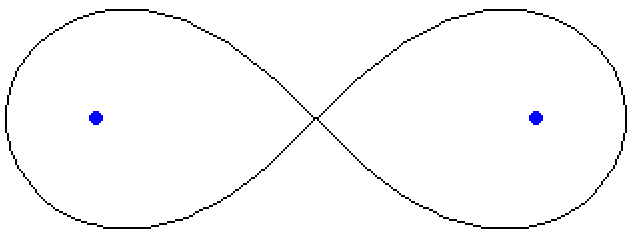
$$\boxed{L = 2\pi a \left(1 - \frac{1}{2.2} e^2 - \frac{3}{4.4.2.2} e^4 - \frac{5.3.3}{6.6.4.4.2.2} e^6 - \frac{7.5.5.3.3}{8.8.6.6.4.4.2.2} e^8 - .... \right)}$$

La permutation des symboles $\int$ et $\sum$ est ici garantie par le théorème de convergence dominée, mais ni Wallis ni Newton ne prenaient de grandes précautions.
On peut remarquer que si $e = 0$ on retrouve, comme il se doit, le périmètre d'un cercle.

L'expression est surprenante mais les calculs auxquels elle conduit sont peu pratiques. Le problème est posé d'obtenir une expression plus simple.

Cette même année 1655, dans son traité sur les coniques, Wallis introduit le symbole ∞ qui n'est pas sans évoquer la lemniscate de Bernoulli.

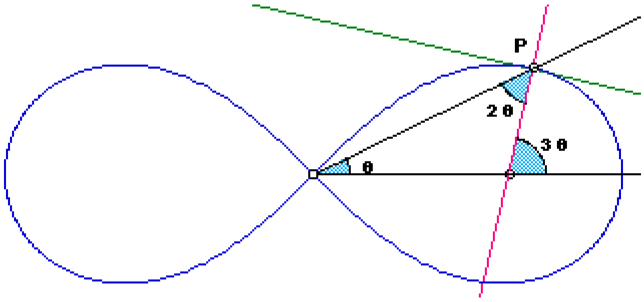
1694, Bernoulli



Jacob Bernoulli, qui fut l'un des premiers à comprendre l'extraordinaire efficacité du calcul infinitésimal, s'intéresse cette année là à la courbe définie de la manière suivante :

On considère deux points A et B que l'on nomme foyers, avec AB=2d
La lemniscate de Bernoulli est l'ensemble des points P vérifiant PA.PB=d²

L'équation cartésienne de cet ensemble est donc $((x-d)^2 + y^2)((x+d)^2 + y^2) = d^4$, mais il est plus commode d'utiliser l'équation polaire. Bernoulli fut en cela encore un précurseur, indépendamment de Newton.



Si l'on nomme A et B les foyers (B d'abscisse positive), O le milieu de [AB] et θ l'angle BÔP, la relation d'Al Kashi permet d'écrire

$$\mathrm{PB}^2 = d^2 + r^2 - 2dr\cos\theta \qquad \text{et} \qquad \mathrm{PA}^2 = d^2 + r^2 + 2dr\cos\theta$$

d'où : $$\mathrm{PA}^2.\mathrm{PB}^2 = d^4 \Leftrightarrow r^2 = 2d^2(2\cos^2\theta - 1) = 2d^2\cos(2\theta)$$

Une équation polaire de la lemniscate de Bernoulli est donc $r(\theta) = d\sqrt{2}\sqrt{\cos(2\theta)}$ pour $-\pi/4 \le \theta \le \pi/4$, l'autre arc de la lemniscate s'obtenant par symétrie.

On simplifie cette équation en prenant $d = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, on obtient alors :

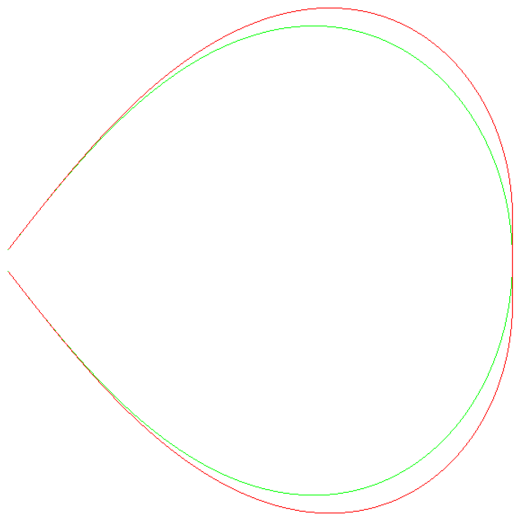
$$\boxed{r(\theta) = \sqrt{\cos(2\theta)}}$$

Le schéma ci-dessus indique des propriétés supplémentaires, relativement à l'angle polaire, dont nous ne parlerons pas.

Les ovales de Cassini, étudiés en 1680, sont une famille de courbes comprenant la lemniscate puisque ce sont les courbes définies par une relation du type : $PA.PB$ = constante. Il semble que Bernoulli n'en ait pas eu conscience.

Lemniscates et languettes élastiques

Il m'est arrivé de lire dans un ouvrage d'histoire des sciences que « Bernoulli découvrit cette courbe en cherchant la forme prise par un fin ruban élastique dont on joint les extrémités » et qu'il pensait avoir montré que la lemniscate est une solution.



Mais si l'on se penche sur un ouvrage moderne de physique théorique digne de foi comme le fameux Landau et Lifchitz, on constate que la solution proposée diffère légèrement de celle de Bernoulli, comme l'indique le graphique ci-contre, où la lemniscate est à l'extérieur.

Il semble plutôt que Bernoulli, évoquant son travail dans *Acta Eruditorum*, ait mentionné une courbe « en forme de 8, ou de nœud, ou d'arc de ruban ». Le mot « lemniscate » qu'il choisit pour nommer cette courbe, issu d'un terme grec signifiant « ruban », semble donc avoir été choisi simplement parce qu'il évoquait une forme commune[1].

[1] Je ne suis pas parvenu à obtenir des informations précises à ce sujet. Bernoulli s'est-il réellement intéressé à la forme prise par un ruban élastique ? Je serais très reconnaissant à la personne pouvant m'en dire plus à ce sujet.

La lemniscate de Bernoulli va être l'un des outils principaux dans la découverte des fonctions elliptiques.

1750, Fagnano[2]

Issu d'une famille aristocratique italienne, Fagnano pratique les mathématiques en amateur éclairé. Très éclairé si l'on en juge par ses résultats.
Considérant la lemniscate de Bernoulli, il parvient à partager un arc de cette courbe en n arcs à l'aide de la règle et du compas pour $n = 2\times 2^m, 3\times 2^m$ et 5×2^m.
Il parvient également à calculer l'aire définie par cette courbe.
Mais le calcul de la longueur pose problème :

En coordonnées polaires la longueur de la lemniscate se calcule par

$$L = 4\int_0^{\pi/4}\sqrt{r^2+r'^2}d\theta = 4\int_0^{\pi/4}\sqrt{\cos(2\theta)+\frac{\sin^2(2\theta)}{\cos(2\theta)}}d\theta = 4\int_0^{\pi/4}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos(2\theta)}}.$$

En posant $t = \tan\theta$ cette intégrale s'écrit $L = 4\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$.

On peut également exprimer cette intégrale de la manière suivante :

$$L = 4\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1+t^2}} = 4\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1+\sin^2\theta}} = 4\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1+\cos^2\theta}} = 4\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{2-\sin^2\theta}}.$$

On a utilisé successivement les changements de variables $t = \sin\theta$ puis $v = \pi/2-\theta$.

Finalement : $$L = \frac{4}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-(1/2)\sin^2\theta}}.$$

Malgré plusieurs résultats remarquables, Fagnano butte sur le calcul de ces intégrales.

1751, Euler

Quelques mathématiciens attirent l'attention d'Euler sur l'ouvrage de Fagnano. Le maître reconnaît la qualité de l'ouvrage et parvient même à aller plus loin que son prédécesseur, mais n'obtient toujours pas de formule explicite pour l'intégrale.
Néanmoins, le problème est désormais clairement posé à la communauté des mathématiciens.

1784, Lagrange

Nous avons déjà rencontré deux problèmes conduisant à des intégrales qu'on ne parvient pas à exprimer à l'aide des fonctions élémentaires :

1. Le calcul de la longueur d'une ellipse
$$\mathrm{L} = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\cos^2 t}\,dt = 4a\int_0^1\sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}}\,dx \qquad (x=\cos t)\ ;$$
2. La rectification de la lemniscate de Bernoulli $$L = 4\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

[2] Fagnano a également laissé son nom au problème suivant : inscrire dans un triangle acutangle un triangle de périmètre minimal. Il prouvera que la solution est donnée par le triangle orthique.

3. On pourrait ajouter un problème fameux : le calcul de la période des oscillations d'un pendule simple théorique.

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_{\max}}} = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad \text{où} \quad k = \sin\frac{\theta_{\max}}{2}$$

Pour établir cette dernière égalité on utilise d'abord $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$, puis on pose $\sin\varphi = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_{\max}/2)}$. En posant $x = \sin\varphi$ on peut obtenir cette autre expression :

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

En 1784 Lagrange, qui à l'époque est le plus grand mathématicien d'Europe (Euler et Gauss laissant un peu de place pour des raisons chronologiques), définit les intégrales elliptiques :

On appelle intégrale elliptique une intégrale de la forme $\int R(x,y)dx$ *où R est une fraction rationnelle en x et y et où* $y = \sqrt{P(x)}$ *où P est un polynôme de degré 3 ou 4 sans racine multiple.*

pour le premier exemple on peut écrire $\sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}} = \frac{\sqrt{(1-e^2x^2)(1-x^2)}}{1-x^2}$

on a donc $R = \frac{y}{1-x^2}$ et $P(x) = (1-e^2x^2)(1-x^2)$.

1793, Legendre parvient à montrer que les intégrales elliptiques peuvent se ramener à l'une des 3 formes canoniques suivantes :

- intégrale elliptique de première espèce

$$F(u) = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \;;$$

- intégrale elliptique de seconde espèce

$$E(u) = \int_0^u \sqrt{1-k^2\sin^2 u}\, du = \int \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\, dx.$$

- intégrale elliptique de troisième espèce

$$\Pi(u) = \int_0^u \frac{du}{(1+n\sin^2 u)\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} = \int \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

1791, Gauss

Deux ans avant ce résultat de Legendre, un adolescent de 14 ans réfléchit au calcul de la longueur de la lemniscate de Bernoulli.

En parallèle, il s'intéresse au problème suivant : on sait que si l'on prend 2 nombres positifs a et b et que l'on calcule les moyennes arithmétique et harmonique de ces 2 nombres, puis que l'on itère le procédé, on forme deux suites adjacentes qui convergent très rapidement vers $\sqrt{ab}$.
Gauss choisit 2 nombres positifs a et b et calcule les moyennes arithmétiques et géométriques successives. Il note une convergence extrêmement rapide vers un nombre $M(a,b)$ que l'on appellera moyenne arithmético-géométrique de a et b.
Détaillons les calculs qui peuvent donner lieu à un problème en classe de terminale :

On pose $\begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = b \end{cases}$ et $\begin{cases} a_{n+1} = (a_n + b_n)/2 \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases}$

Il est facile de prouver que $a_n \geq b_n$ pour $n \geq 1$, que (a_n) est décroissante et que (b_n) est croissante, toutes deux à partir du rang 1.

On a d'autre part $a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{a_n - b_n - 2\sqrt{a_n b_n}}{2} = \dfrac{\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2}{2}$.

Or le théorème des accroissements finis[3] permet d'établir l'inégalité suivante :

$$\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n} \leq \frac{1}{2\sqrt{b_n}}(a_n - b_n) \leq \frac{1}{2\sqrt{b_0}}(a_n - b_n)$$

D'où par transitivité :

$a_{n+1} - b_{n+1} \leq \dfrac{(a_n - b_n)^2}{8b_0}$, et on peut alors prouver par récurrence que : $a_n - b_n \leq 8b_0 \left(\dfrac{a_0 - b_0}{8b_0}\right)^{2^n}$.

Prenons $a_0 = 1$ et $b_0 = \sqrt{2}$.

Si l'on veut connaître la limite, c'est-à-dire $M(1, \sqrt{2})$ avec une précision inférieure à 10^{-10}, on doit avoir : $8\left(\dfrac{\sqrt{2} - 1}{8}\right)^{2^n} \leq 10^{-10}$ d'où $2^n \geq \dfrac{\ln(10^{-10}/8)}{\ln((\sqrt{2} - 1)/8)}$ d'où n = 4 seulement !

Avec n = 5 on obtient 40 décimales exactes[4], la convergence est foudroyante !

a_1	1.2071067811865475244008443621048490392850
b_1	1.189207115002721066717499970560475915293
a_2	1.198156948094634295559172166332662477289
b_2	1.198123521493120122606585571820152450692
a_3	1.198140234793877209082878869076407463990
b_3	1.198140234677307205798383788189800708732
a_4	1.198140234735592207440631328633104086361
b_4	1.198140234735592207439213655927543670093
a_5	1.198140234735592207439922492280323878227
b_5	1.198140234735592207439922492280323878227

[3] Pour éviter le recours à ce théorème qui n'est plus au programme, on peut poser $f_b(x) = \sqrt{x} - \sqrt{b}$ pour $x \geq b > 0$ puis faire démontrer aux élèves en question préliminaire que $f_b(x) \leq \dfrac{x - b}{2\sqrt{b}}$

[4] Si bien sûr on peut faire les calculs intermédiaires, qui comportent des racines, avec une précision suffisante. Ce problème disparaît dans le cas des itérés des moyennes arithmétiques et harmoniques où l'on ne manipule que des rationnels (si les termes initiaux sont rationnels) et où la convergence est de même type.

Une remarque encore concernant ce problème, intéressant à mener avec une classe de terminale : la majoration de l'amplitude que nous avons obtenue n'est utile que si $\frac{a_0 - b_0}{8b_0} < 1$

Néanmoins un autre calcul prouve que $a_{n+1} - b_{n+1} \leq \frac{1}{2}(a_n - b_n)$. La condition $\frac{a_p - b_p}{8b_p} < 1$ est donc toujours réalisée pour un p assez grand (pas très grand dans la pratique).

A 19 ans, alors que Gauss prouve à dix jours d'intervalle la constructibilité du polygone régulier à 17 côtés et la loi de réciprocité quadratique, il se décide à tenir un journal. Avant cette date nous sommes beaucoup moins bien renseignés sur son travail. Aussi nous ne savons pas comment il a deviné cette égalité exprimant la longueur de la lemniscate : $L \frac{2\pi}{M(1, \sqrt{2})}$.

Surprenante égalité[5] ! Mais qui n'exprime toujours pas le résultat à l'aide des fonctions usuelles. Nous en savons tout de même assez sur la suite des travaux de Gauss pour faire de lui le précurseur des fonctions elliptiques.

Concernant les équations polynomiales, Gauss note au paragraphe 359 de ses *Recherches arithmétiques :*

> *On sait que tous les travaux des grands géomètres ont échoué contre la résolution générale des équations qui passent le premier degré [...] et il est à peine douteux si ce problème ne renferme pas quelque chose d'impossible, plutôt qu'il ne surpasse les forces actuelles de l'analyse.*

Il me semble assez probable que Gauss devait porter un jugement semblable sur les intégrales elliptiques. Il écrit au paragraphe 335 :

> *Au reste, les principes de la théorie que nous entreprenons d'exposer s'étendent bien plus loin que nous ne le faisons voir ici; ils peuvent en effet s'appliquer non seulement aux fonctions circulaires, mais aussi avec autant de succès à beaucoup d'autres fonctions transcendantes, par exemple, à celles qui dépendent de l'intégrale* $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ […] *mais comme nous préparons un ouvrage assez étendu sur les fonctions transcendantes…*

Cet ouvrage ne verra jamais le jour. Il écrit à ce propos en 1828 (Gauss n'était jamais pressé de publier ses résultats) :

> *Les démonstrations d'Abel sont si brillantes et limpides que je crois qu'il est inutile que je publie mes propres résultats.*

Examinons néanmoins le travail de Gauss. On sait que Jacobi et Abel ont été très influencés par les *Recherches* et la remarque citée plus haut n'est certainement pas passée inaperçue de leur part. Les grands géomètres que sont Euler, Lagrange et Legendre ayant buté sur le calcul des intégrales elliptiques, Gauss va choisir d'aborder le problème différemment.
Nous avons vu que le calcul de la longueur de la lemniscate de Bernoulli conduit à l'expression :

---

[5] Pour une démonstration de cette égalité :www.mathworld.wolfram/EllipticIntegral.html (relations (45) à (74))

$$L = 4\int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}\ .$$

On est donc assez naturellement amené à considérer la fonction G définie par : $G(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$.

Si, par une analogie formelle, on remplace l'exposant 4 par un exposant 2 on obtient $\arcsin x = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Gauss va donc définir un sinus lemniscatique *sl(x)* par :

$$sl(x) = G^{-1}(x) \qquad \text{où} \qquad G(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}\ .$$

Comme de la même manière on a $\arccos x = \displaystyle\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, il pose donc :

$$cl(x) = \tilde{G}^{-1}(x) \qquad \text{où} \qquad \tilde{G}(x) = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}\ .$$

Il est le premier à définir une fonction en utilisant la réciproque d'une fonction définie par une intégrale. Les fonctions elliptiques auront une définition semblable.

On observe que $\tilde{G}(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} - G(x)$.

Si l'on pose $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{\varpi}{2}$ on obtient $\tilde{G}(x) = \dfrac{\varpi}{2} - G(x)$.

D'où : $cl(\frac{\varpi}{2} - G(x)) = cl(\tilde{G}(x)) = \tilde{G}^{-1}(G(x)) = x$.

Si l'on pose *u=G(x),* on a : $x = G^{-1}(u) = sl(u)$. On obtient donc : $cl(\frac{\varpi}{2} - u) = sl(u)$.

Cette formule est analogue à celle de la trigonométrie classique : $\cos(\frac{\pi}{2} - u) = \sin u$.

Outre cette analogie, Gauss parviendra à établir pour l'addition et la multiplication des formules analogues à celle que l'on connaît pour les fonctions trigonométriques usuelles.
Il s'intéressera ensuite aux fonctions elliptiques mais, comme nous l'avons dit, son travail ne sera jamais publié.

La nouveauté dans la démarche de Gauss est qu'elle interrompt la recherche désespérée d'une formule explicite qui définirait les intégrales elliptiques, pour introduire une nouvelle classe de fonctions. La prescience des théorèmes d'impossibilité, ici pour le calcul des intégrales elliptiques, ailleurs pour la résolution des équations polynomiales ou pour la démonstration du 5ème postulat d'Euclide, est certainement un trait caractéristique du génie de Gauss.

1827, Abel et Jacobi

Abel et Jacobi sont parvenus en même temps et indépendamment à des résultats semblables.

A la manière de Gauss, Jacobi pose : $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$.

Puis il définit ensuite : $am(x) = F^{-1}(x)$ (*am* pour amplitude),
puis : $sn(x) = \sin(am(x))$ et $cn(x) = \cos(am(x))$.
Avec cette définition il est clair que $sn^2(x) + cn^2(x) = 1$.
Lorsqu'une ambiguïté est possible pour la valeur de *k* on note $F(x,k); sn(x,k)$...

On peut constater certaines analogies entre les définitions de Gauss et celles de Jacobi.
Nous avons vu dans la partie consacrée à Fagnano que :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-(1/\sqrt{2})^2 \sin^2\theta}} .$$

On montre de la même manière que :

$$\tilde{G}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\arccos x} \frac{d\theta}{\sqrt{1-(1/\sqrt{2})^2 \sin^2\theta}} .$$

On a ainsi : $\sqrt{2}\tilde{G}(\cos x) = F(x)$, où $F(x) = F(x, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

On en déduit que : $F^{-1}(x) = \arccos(\tilde{G}^{-1}(\frac{x}{\sqrt{2}}))$,

donc $cn(x, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \cos(F^{-1}(x)) = \cos(\arccos(\tilde{G}^{-1}(\frac{x}{\sqrt{2}}))) = \tilde{G}^{-1}(\frac{x}{\sqrt{2}}) = cl(\frac{x}{\sqrt{2}})$.

Par contre $sn(x, \frac{1}{\sqrt{2}}) \neq sl(\frac{x}{\sqrt{2}})$ en général. L'analogie s'arrête donc ici, on observe des différences telles que :

- $sn^2(x) + cn^2(x) = 1$ mais en général $sl^2(x) + cl^2(x) \neq 1$;
- $cl(\frac{\varpi}{2} - x) = sl(x)$ mais en général $cn(\frac{\varpi}{2} - x) \neq sn(x)$.

Les fonctions définies par Jacobi feront désormais partie du corpus mathématique universel. Il réalisera un travail semblable avec les intégrales elliptiques de première et de troisième espèce, ce qui le conduira à définir les fonctions thêta…de Jacobi.

1833, Liouville parvient à montrer que les intégrales elliptiques ne peuvent pas s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles.

1858, Hermite prouve que les solutions d'une équation polynomiale de degré 5 peuvent toujours s'exprimer à l'aide des foncions thêta de Jacobi.

Références :

[1] Simon Gindikin : Histoire de physiciens et de mathématiciens.
Formidable livre qui m'a inspiré cet article. Ed. Cassini.
[2] Abrégé d'histoire des mathématiques, Jean Dieudonné et al.
Chapitre 7 : Fonctions elliptiques et intégrales abéliennes par Ch.Houzel, Ed. Hermann, Paris-1992.

Des sites Internet :
www.mathworld.wolfram.com formidable site où je puise abondamment.
www.chronomath.com très bon site francophone consacré aux mathématiques et à leur histoire.
www-history.mcs.st-and.ac.uk/history Mac Tutor history of mathematics: une référence en histoire des sciences.
xahlee.org Visual Dictionary of Famous Plane Curves.

Me contacter: www.zim.moreau.mann@wanadoo.fr

Un carré dans un triangle[1]

De l'utilisation de textes anciens pour résoudre un problème

Patrick GUYOT, L.P. Dumaine à MACON

Résumé : *Il s'agit ici de conter une expérience réalisée en cours de mathématiques avec une classe de seconde professionnelle.*
Inscrire un carré dans un triangle, tel est le prétexte à cette activité, mais, après une phase d'appropriation de l'énoncé du problème, on propose aux élèves deux modes de résolution à partir de textes anciens, l'un, géométrique, de Marolois, l'autre, algébrique, d'Al Khwarizmi, et on recherche la justification de ces méthodes.
A partir de cette description, on essaiera de montrer les enjeux et les avantages de ce type de démarche.

Première étape : sensibilisation au problème.

La classe concernée par l'expérience décrite ici est une seconde professionnelle, première année de BEP MMIC (Métiers de la Mode et des Industries Connexes), constituée de vingt filles ayant pour la plupart quelques difficultés en français écrit et oral, mais montrant toujours de la bonne volonté.

Le point de départ était de tester la compréhension d'un énoncé simple sous forme d'une question, afin de préparer le travail qui devait suivre. Je souhaitais en effet éviter que les élèves ne puissent résoudre le problème à cause d'une incompréhension du sens de l'énoncé.

La question a été posée oralement à dix minutes de la fin d'un cours, et répétée trois fois : "**Inscrire un carré dans un triangle**.". La seule consigne qui ait été donnée est : "Vous choisissez le triangle que vous voulez, vous avez jusqu'à la sonnerie pour répondre à la question."

A l'heure dite, j'ai ramassé les feuilles, les ai photocopiées avant de les redonner la séance suivante pour poursuivre le travail. Le dépouillement des résultats a permis d'affiner ce que nous évoquions plus haut, et de mettre en évidence une difficulté fréquemment rencontrée : l'(in)exécution des consignes, ou plutôt l'(in)adéquation entre les objectifs du professeur et la réalisation des élèves.

Le problème le plus important est venu du mot "inscrire". La simple lecture du Petit Larousse Illustré nous permet de ne pas en être étonnés :

Inscrire*…. Math. Tracer une figure à l'intérieur d'une autre, inscrire un triangle dans un cercle.*

Pour le professeur, la phrase de l'énoncé du problème est précise, pour l'élève elle prête à réflexion, à hésitation, voire à confusion : une figure tracée "*à l'intérieur d'une autre*", ainsi que l'écrit le Petit Larousse, doit-elle être en contact avec cette autre ? La définition du mot inscrit dans le même dictionnaire est beaucoup moins ambiguë sur ce sujet :

Inscrit*. Se dit d'un polygone dont tous les sommets sont sur une courbe donnée, ou d'une courbe tangente à tous les côtés d'un polygone donné.*

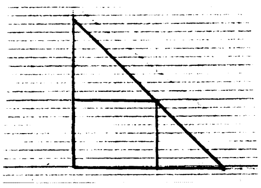
La vue des résultats des élèves nous permettra de mettre en évidence les obstacles rencontrés, et de revenir sur l'interprétation du mot inscrire.

---

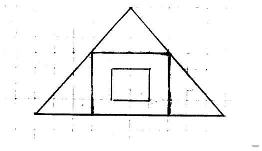
[1] Reproduction avec l'autorisation de l'éditeur de l'article : "Un carré dans un triangle". Cet article a été publié dans le Repère n° 51, d'avril 2003, pages 41 à 58 ; Editeur : Topiques éditions à Metz ; ISSN 1157-285X.

Les productions ont été classées en trois "familles" présentées ci-dessous :

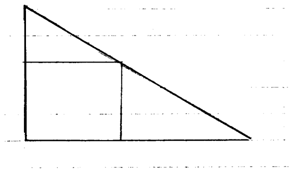
<u>*Première "famille"*</u> : constructions exactes, ou tout au moins acceptables (figures 1 à 11).



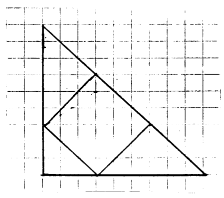
1



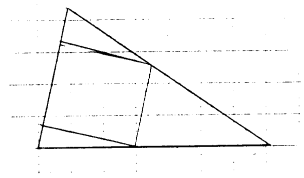
2



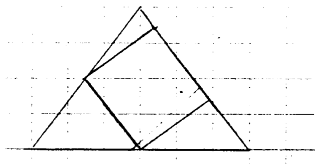
3



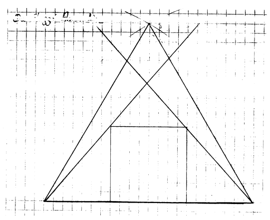
4



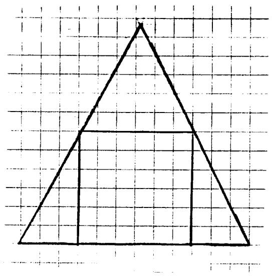
5



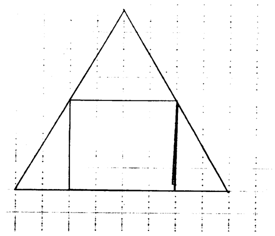
6



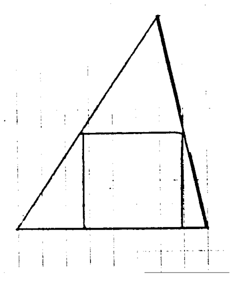
7



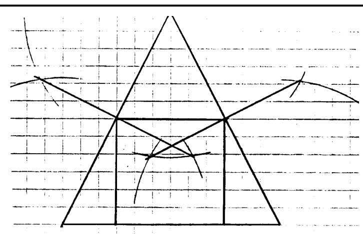
8



9



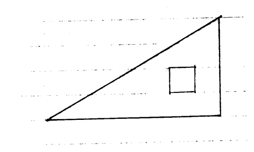
10

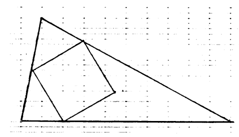


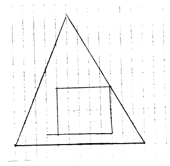
11

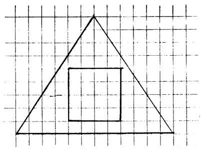
Les onze élèves concernées ont présenté un travail qui répondait à la question posée, même si quelques traits de construction subsistants laissent planer un doute quant à la justesse de la méthode utilisée pour les figures 7 et 11. La figure 2 comporte deux carrés, l'élève a expliqué par la suite avoir tracé le petit carré en premier, puis le second après quelques temps de réflexion.

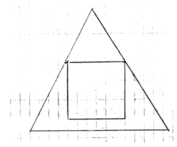
Deuxième "famille" : Inscriptions du carré inexactes (figures 12 à 17).

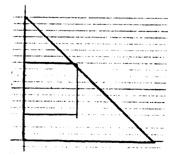

12


13


14


15

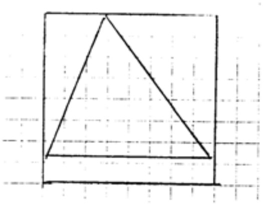

16

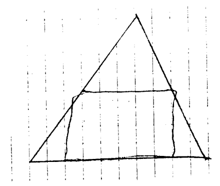

17

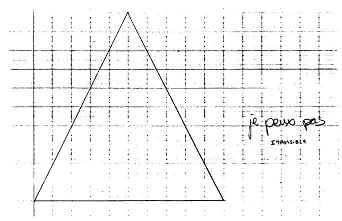
Les carrés 14, 16, 13 et 17 ont respectivement un, deux, trois et trois sommets en contact avec le triangle. Les carrés 12 et 15, intérieurs au triangle, ne "touchent" pas celui-ci.

Chaque carré tracé est bien à l'intérieur du triangle. La définition du mot *inscrire* donnée par le Petit Larousse englobe-t-elle ces cas ? Il faudrait plutôt penser à la définition par le même dictionnaire du mot *inscrit*, plus précise, et qui impose aux sommets de la figure inscrite d'être en contact avec le triangle. La discussion qui suivra conduira la classe à rejeter ces figures comme ne répondant pas à la question posée.

Troisième "famille" : Réponses incorrectes ou absence de réponse (figures 18 à 20).


18


19



20

La figure 18 montre une inscription de triangle dans un carré. Dans la phrase de l'énoncé oral, le mot *carré* était prononcé en effet avant le mot *triangle*, il a peut-être été logique pour cette élève de commencer par tracer le carré puis d'y inscrire un triangle. Elle n'aurait retenu que les mots qui lui semblaient importants: *inscrire*, *carré* et *triangle*, et elle aurait donc construit une figure utilisant les trois mots. La figure 19 présente un quadrilatère qui n'est manifestement pas un carré, et qui a été dessiné à main levée, comme pour se débarrasser. Enfin la dernière image montre le cas d'une élève qui a écrit qu'elle ne peut pas réaliser ce qu'on lui demande ("*je peux pas*" ; "*impossible*"), pressentant une construction irréalisable : en mathématiques, il arrive qu'on ait à faire des travaux qui s'avèrent infaisables après réflexion, et cela ne perturbe pas les élèves de proposer ce type de réponse.

Lors de la séance suivante, après avoir rendu leur production aux élèves, j'ai engagé un débat sur la construction, sa faisabilité, et les valeurs respectives des dessins qu'elles avaient proposés, qui a bien mis en évidence les difficultés constatées lors de l'observation des tracés.

Une élève l'exprime en disant: "On ne peut pas mettre les quatre sommets du carré car le triangle n'a que trois côtés." et une autre enchaîne en ajoutant fort justement : "Donc il faut deux sommets sur un même côté du triangle parce que pour inscrire comme il faut, les coins du carré doivent toucher les bords du triangle." Cette dernière affirmation a dû être assez longuement discutée car elle ne faisait pas a priori l'unanimité, les élèves ayant à cœur de soutenir leur propre construction. Ce n'est qu'à l'issue de ces échanges qu'elles n'ont pas validé les constructions 12 à 17.

Construire un carré dans un triangle **préalablement** tracé : là semble être la plus grande difficulté. Deux élèves ont alors avoué avoir construit d'abord le carré, puis le triangle "autour", la première ayant agi en toute bonne foi, alors que la deuxième a déclaré l'avoir fait avec la sensation d'avoir triché, car elle avait perçu qu'elle ne respectait pas l'ordre préconisé par l'énoncé.

Deux autres élèves, en fin de discussion, et qui n'avaient pas pris part au débat qui s'était engagé, se sont déclarées étonnées que leurs camarades aient ressenti des difficultés devant la réalisation de cet exercice, mais la suite a montré que toutes deux, sans se concerter (elles n'étaient pas voisines), avaient tracé un triangle rectangle (figures 1 et 3), ce qui rend effectivement la construction plus évidente. Nous pouvons d'ailleurs remarquer la forme particulière (isocèles, rectangles ou équilatéraux) de la plupart des triangles, le triangle scalène n'étant manifestement pas la norme chez nos élèves. Plusieurs idées peuvent expliquer ces faits : lors d'une construction, n'a-t-on pas généralement tendance à tracer un triangle presque isocèle, ou presque équilatéral, sans même y prendre garde ? ou bien, les élèves veulent-elles simplifier le problème, comme on vient de l'évoquer ? On peut aussi rappeler à leur décharge que la consigne de départ était de tracer le triangle de leur choix.

Afin de clore ce débat de vingt minutes environ, j'ai demandé aux élèves de proposer une technique, une recette de construction pour ce problème ; il est apparu comme une évidence pour elles que seule une succession d'essais peut permettre d'arriver à une solution "satisfaisante". Entendons par satisfaisante celle qui donne de bons résultats, vérifiables par des mesures (une élève a ainsi pu dire : "j'ai un vrai carré avec 4 côtés égaux"). Mais toutes furent d'accord pour reconnaître qu'une méthode par approximations successives n'était pas acceptable pour l'esprit, habituées qu'elles sont depuis le collège à devoir justifier leur travail en mathématiques. Résultat mitigé donc : bonne figure si on s'applique, mais pas de preuve de l'exactitude du tracé.

J'ai alors suggéré que j'avais en ma possession deux méthodes, connues depuis très longtemps, pour arriver "du premier coup" à tracer la "bonne" figure, celle qui satisferait aux conditions de l'énoncé ; la première est une méthode purement géométrique, la seconde s'appuie sur l'algèbre.

Cette première partie a été riche en informations sur le mode de fonctionnement des élèves, mais a également "mis le moteur en marche" : en effet, après la discussion sur la difficulté de la construction, les élèves étaient concernées par ce problème et le simple fait de leur proposer une solution (et même deux) a entraîné chez elles une volonté de poursuivre.

Premier intermède : retour vers … l'énoncé.

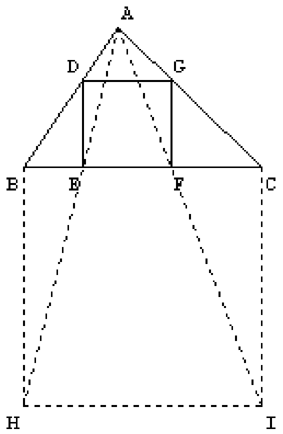
Avant de continuer la description du travail réalisé, tournons-nous vers le sujet lui-même, et vers son traitement mathématique.

L'inscription de figures est un sujet régulièrement rencontré par celui qui parcourt les ouvrages de mathématiques à travers les siècles. Pour l'inscription particulière d'un carré dans un triangle qui concerne notre propos, nous pouvons citer Chuquet, Piero della Francesca, Fibonacci ou Luca Pacioli, pour ne pas aller au-delà du XVIème siècle. La plupart ont étudié un triangle particulier, isocèle ou équilatéral.

Si nous observons par exemple *La Géométrie* du premier cité, Nicolas Chuquet, écrite en 1484 ([Chu1484]), nous avons deux traitements différents du problème, mais dans les deux cas avec un triangle équilatéral. La première méthode qu'il présente consiste à calculer le côté du triangle équilatéral connaissant le côté du carré 4 (ce qui lui donne le résultat suivant, en modernisant la transcription, $\sqrt{37\frac{1}{3}+\sqrt{1365\frac{1}{3}}}$) ; la deuxième méthode permet de calculer le côté du carré inscrit dans un triangle équilatéral de côté 8 (on obtient pour le côté du carré $\sqrt{768}-24$).

Pour mieux mettre en perspective ce qui a été réalisé avec mes élèves, et pour ne pas multiplier les exemples rencontrés dans l'histoire, on peut extraire deux traitements particuliers du problème.

Le premier est issu d'un ouvrage de 1901 de Monsieur Dauzat, inspecteur d'Académie ([Dau1901]), qui a été écrit à destination des professeurs de mathématiques. Voici ce qu'il en dit :



Inscrire un carré dans un triangle donné.

Fig. 44

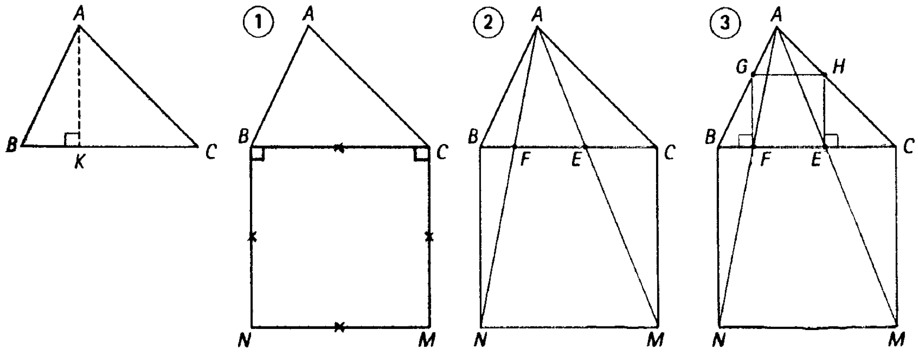
Soit ABC (fig.44) le triangle donné et DEFG le carré à inscrire. Considérons que les deux droites AB et AC issues du point A passent par les sommets D et G du carré à inscrire, et menons par le même point A les droites AE et AF qui passent par les deux autres sommets E et F du carré. En prenant alors le point A comme centre de similitude directe et la droite BC comme homologue de DG, si l'on mène par les points B et C des parallèles aux droites DE et GH jusqu'à leurs rencontres en H et I avec les droites AE et AF, en joignant H et I par une droite, on forme une figure BHIC semblable au carré inscrit, car cette figure est homothétique du carré DEFG.

On peut d'ailleurs, sans faire appel à la théorie des figures homothétiques, démontrer très facilement que le quadrilatère BHIC est un carré. Le problème se résout donc ainsi : construire, sur BC pris pour côté, un carré BHIC ; joindre par des droites les sommets H et I de ce carré au sommet A du triangle ; mener par les points de rencontre E et F de ces droites avec BC, des parallèles ED et FG à la direction HB ; joindre enfin les deux points D et G.

M. Dauzat suppose le problème résolu et l'analyse ; le petit carré inscrit DEFG étant tracé, on va démontrer que le grand quadrilatère BHIC est lui aussi un carré. Le dernier paragraphe donne pour terminer la méthode générale de construction.

Un manuel récent de seconde générale de lycée propose un traitement différent lors d'un exercice. Le chapitre contenant cet exercice est consacré à l'homothétie, et l'énoncé privilégie bien entendu son utilisation. L'homothétie utilisée pour la démonstration n'est actuellement (en 2002) plus au programme de cette classe, mais le mode de raisonnement en jeu est significatif d'une évolution par rapport à ce qu'on pouvait proposer en 1901 ; il ne s'agit plus ici de démarrer du problème résolu, mais de suivre pas à pas la construction en justifiant chaque étape nécessaire pour atteindre l'objectif final :

Comprendre une construction.



Soit un triangle ABC. On désire construire un carré EFGH dont le côté [EF] est inclus dans le segment [BC], et les sommets G et H sont respectivement des points de [AB) et de [AC].

1° Reproduire la construction ci-dessous en trois étapes, avec un triangle ABC tel que BC = 6cm et de hauteur AK = 4 cm.

a) Justifier que h(M) = E et h(N) = F.

b) Quelle est l'image de la droite (MC) par h ? de la droite (AC) ? En déduire l'image du point C par l'homothétie h.

c) Déterminer l'image de B par h.

d) Démontrer que le quadrilatère EFGH est un carré.

2° Rédiger chaque étape de cette construction (sans justifier).

Quel semble être le rapport de l'homothétie qui transforme le carré BCMN en GHEF ?

3° Le point A se projette orthogonalement en K sur [BC] et en K' sur [NM].

Soit h l'homothétie de centre A qui transforme K' en K.

([Déc1998])

(Chapitre 16 : Homothéties, (page 349 : travaux pratiques, 3, module)

Il apparaîtra dans la suite de cet exposé que les pratiques utilisées avec mes élèves de BEP se distinguent nettement à la fois des propositions méthodologiques du livre à destination des professeurs de Monsieur Dauzat, et des questions du manuel de seconde générale. Les élèves de BEP se voient en effet le plus souvent proposer une méthode expérimentale, qui privilégie le visuel et les constructions à tous les niveaux, et même lors de la réflexion et de la justification, comme nous allons le voir en poursuivant notre description.

Deuxième étape : la résolution "géométrique".

Il s'agissait ici de faire connaître aux élèves un mode de construction simple à mettre en œuvre, mais aussi de les aider à valider leur travail à l'aide de leurs connaissances mathématiques.

Le texte qui leur a été présenté est issu de la Géométrie de Samuel Marolois ([Mar1616]). Né vers 1572 et mort avant 1627, celui-ci vécut dans les Pays-Bas, a enseigné les mathématiques et a exercé plusieurs fonctions techniques. Il a écrit en particulier une Géométrie, que nous avons évoquée, et un ouvrage sur les fortifications[2].

[2] Le groupe "Mathématiques en Bourgogne" issu de l'IREM de Dijon étudie les œuvres de Marolois depuis quelques années, et a déjà publié deux brochures consacrées à sa Géométrie.

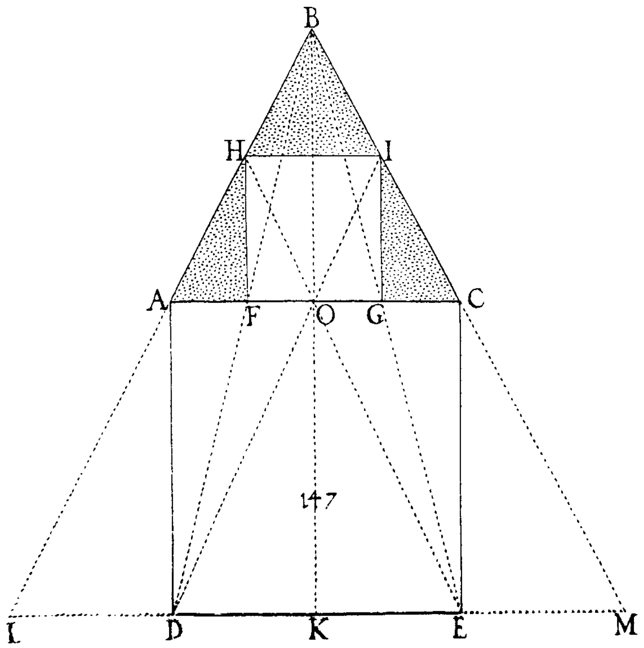
Nous donnerons tout d'abord l'intégralité du texte concernant notre sujet, puis nous verrons que les élèves ne l'ont pas étudié en totalité.

Prop. 48.

Dans un triangle inscrire un quaré.

Construction.

147.



Soit le triangle ABC. auquel on veult inscrire un quaré, soit de la base AC. faict le quare ACDE. puis soyent menees le lignes BE. & BD. qui couperont le triangle en la base AC. aux points FG. je di que FG. est le coste du quaré pour inscrire au triangle susdit, qu'il soit ainsi il aparoistra ayant prolongé les costez AB. BC. jusqu'à ce qu'ils rencontrent la base du quaré DL. aux points L, & M, car il est evident que EK. a proportion contre KB. cõme G, O. a OB. par la 4. du 6. d'Eucl. Mais EK. est la moitie du coste du quare inscript au triangle BLM. le coste GO. sera donc aussi le coste de la moitie du quare inscript au triangle A, B, C. car les dicts triangles sont proportionaux, ce qui estoit requis de faire.

La propriété évoquée, *la 4. du 6. d'Eucl.*, est la quatrième proposition du sixième livre des Éléments d'Euclide. Elle dit que dans les triangles équiangles, les côtés autour des angles égaux sont proportionnels. C'est un théorème plus général que notre actuel théorème de Thalès qui ne concerne que des triangles à côtés parallèles, et pas la totalité des triangles semblables.

Les élèves de BEP n'ont pas étudié cette proposition 4 du sixième livre d'Euclide mais elles connaissent le théorème de Thalès et il s'agissait donc de faire fonctionner une justification utilisant ce théorème.

Mon choix a donc été de leur fournir la figure accompagnée du texte, mais uniquement jusqu'à "*au triangle susdit*", et de leur demander dans un premier temps de réaliser elles-mêmes la figure comme Marolois l'indique. Les élèves ont travaillé consciencieusement, mais deux critiques de leur part doivent être relevées : le fait que Marolois nomme le quadrilatère ACDE au lieu de ACED, ce qui constitue pour elles une erreur manifeste, et, faute aussi importante à leurs yeux, que des points non utilisés (O, I, M) apparaissent, ce que j'ai pu faire accepter en disant que je n'avais pas fourni le texte complet et qu'elles constateront, lors de la justification qu'elles auront à faire, que ces points pourront intervenir.

Il est nécessaire également de signaler au lecteur que si les élèves n'ont pas eu de réaction notable devant la formulation et l'orthographe du texte c'est parce qu'elles avaient déjà eu l'occasion de travailler sur un énoncé de Marolois. Mais il est évident que l'attitude lors de la première rencontre est un mélange d'amusement et d'étonnement : des mathématiciens qui ne savaient pas s'exprimer et écrire correctement ! Le fait qu'une langue évolue, même sur une courte période (moins de quatre siècles entre Marolois et nous) est loin d'aller de soi, et il est nécessaire lors de ce premier contact avec un texte ancien, de prendre un moment pour montrer des exemples d'évolution de mots usuels.

Nous sommes ensuite passés à la validation de la méthode utilisée, en procédant par paliers successifs. Nous devons prouver que FGIH est un carré. Or que savons-nous de ce quadrilatère ? Une discussion collective a permis de mettre en évidence le fait que FGIH possède deux angles consécutifs droits. Que manque-t-il donc pour que FGIH soit un carré ? Plusieurs opinions s'affrontent, et nous nous sommes mis d'accord sur le procédé à utiliser pour accepter ou rejeter une affirmation : c'est de construire ce qui a été proposé en essayant de le mettre en défaut. Les solutions avancées ont été successivement : rajouter un angle droit (rejeté car on peut obtenir un rectangle), rajouter deux angles droits (rejeté car on peut encore obtenir un rectangle), avoir quatre côtés égaux (accepté car on aura toujours un carré, c'est d'ailleurs sa définition).

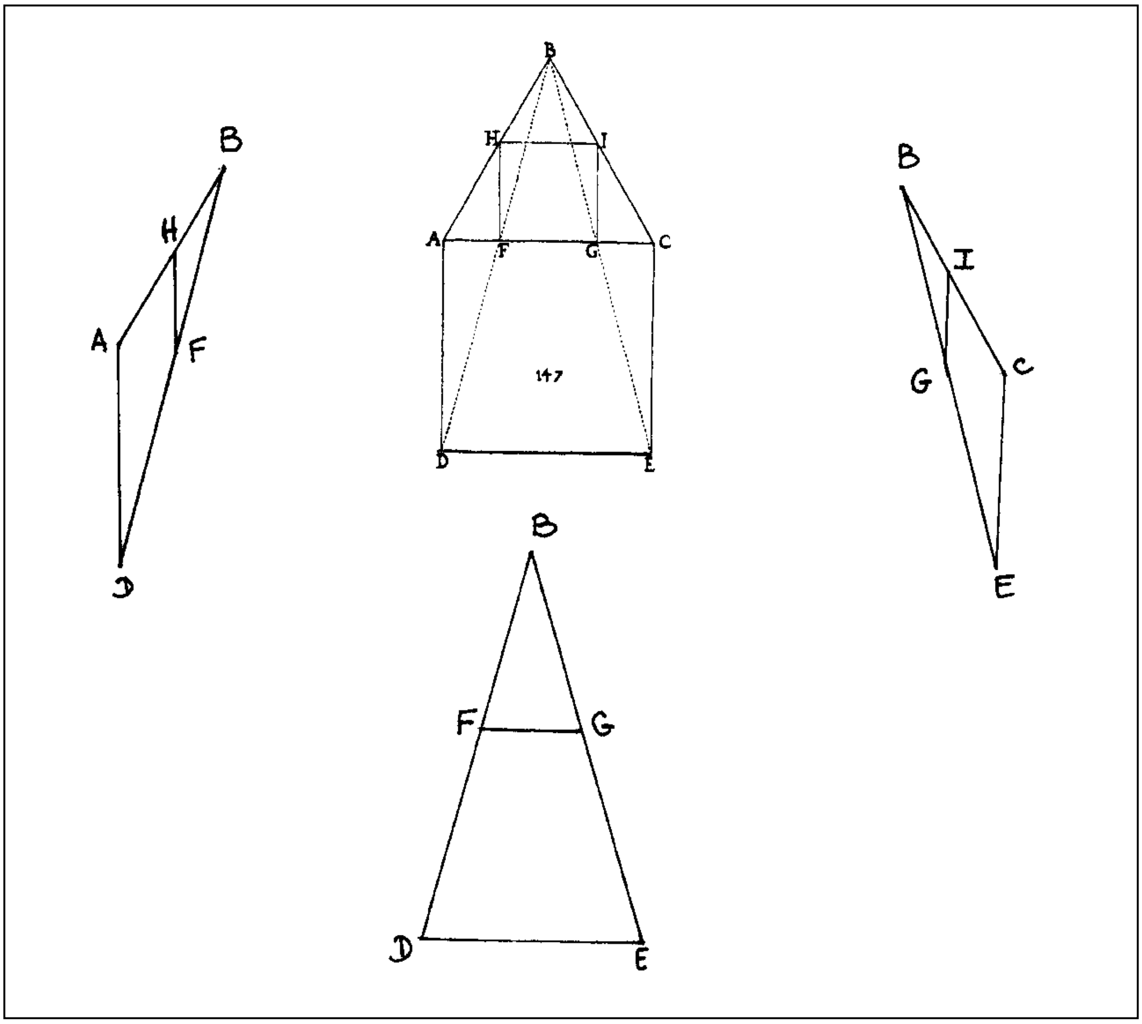
Mon intervention a alors été nécessaire pour suggérer que les quatre côtés égaux n'étaient peut-être pas indispensables. Avec deux côtés seulement on a vu que l'on pouvait obtenir un rectangle, donc ce n'était pas suffisant, mais avec trois côtés égaux, les conditions semblent toujours réunies pour le carré. Il a suffi de montrer que si HF = FG = GI alors (HI) sera parallèle à (FG), et les angles seront tous droits, la figure sera bien le carré souhaité.

Les angles droits sont donnés par l'énoncé, notre travail va donc consister à rechercher l'égalité de trois des côtés de FGIH. Si Marolois nous demande de tracer d'abord le carré ACED, nous devons l'utiliser. C'est à ce moment qu'une élève a vu une situation de Thalès dans la partie centrale de la figure (triangle BDE).

Je me suis appuyé sur cette découverte pour leur demander de trouver deux autres triangles avec des situations analogues et de donner les égalités de rapports obtenus.

La figure ci-dessous, "éclatée" en sous-figures, a permis aux élèves éprouvant le plus de difficultés d'arriver au résultat qui a été formulé de différentes façons mais que nous avons fini par écrire :

$$\frac{AD}{HF}=\frac{BA}{BH}=\frac{BD}{BF}=\frac{CF}{IG}=\frac{BC}{BI}=\frac{BE}{BG}=\frac{DE}{FG}$$



Les premier, quatrième et septième rapports sont égaux et possèdent des dénominateurs égaux (AD = CE = DE comme côtés du carré ACED), leurs numérateurs HF, IG et FG sont donc égaux et on obtient bien le carré FGIH.

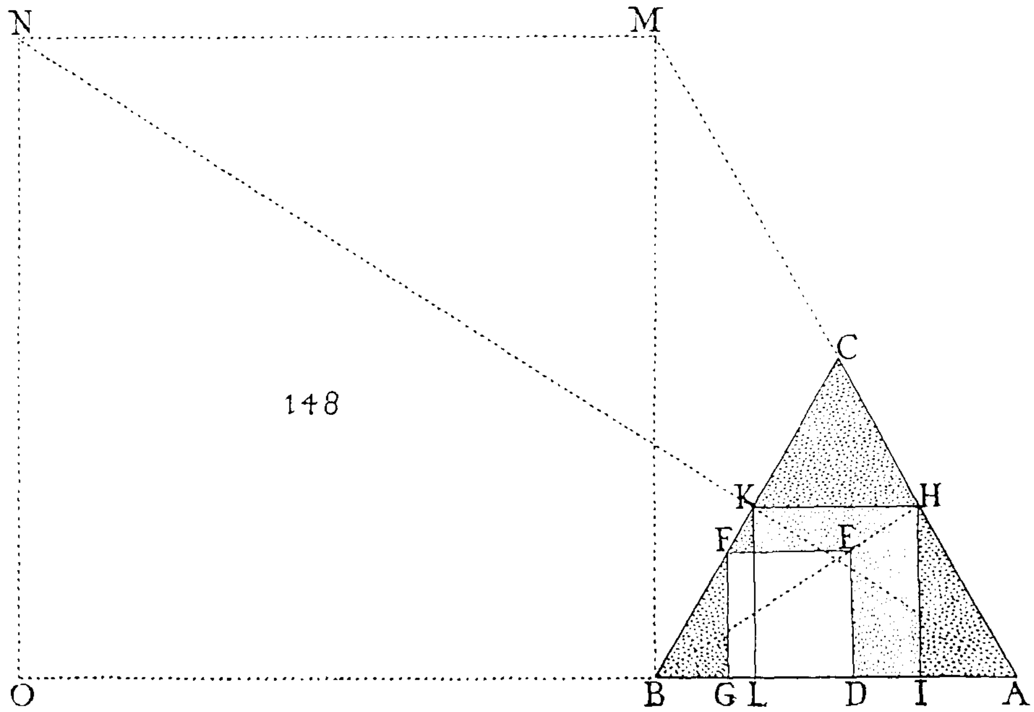
Pour terminer cette partie qui aura duré environ une heure et pour revenir sur une idée évoquée plus haut, j'ai signalé aux élèves que le triangle dessiné dans l'ouvrage de Marolois est équilatéral et leur ai demandé si la méthode reste valable pour tout triangle. Des constructions ont alors été réalisées, qui ont bien mis en évidence la généralité de cette proposition.

Deuxième intermède : Marolois propose d'inscrire …autrement.

La méthode précédente, si elle est simple et rigoureuse, n'est pas la seule présentée par Marolois. Comme à de nombreuses reprises dans son ouvrage pour d'autres propriétés, elle est suivie d'une seconde solution, pour laquelle l'auteur ne récrit pas la proposition, qui est donc toujours la proposition 48, mais il note simplement en début de cette nouvelle méthode, "*Autrement*", comme nous pouvons le lire ci-dessous :

Autrement
148.

Soit eslevé la perpendiculaire G, F. a vostre discretiõ & en soit formé le quaré G, F. E, D. puis soit tiree E. H passante par E. lors du point H. soit menee la perpendiculaire H, I. qui est le costé du quaré, ou ayant prolongé le coste AC. & du point B eslevée la perpendiculaire B, M. jusqu'a ce qu'elle rencontre ladite ligne prolongee A, C. en M. & sur icelle perpendiculaire soit faict le quare B, M. N, O. puis du point N. soit faicte la ligne N, A. & ou qu'icelle coupe le coste C, B. soit faicte la perpendiculaire KL. sur la base A, B. qui sera le coste du quare requis.



Cette démarche est intéressante et mériterait également d'être étudiée en classe, même si cela n'a pas été le cas ici. Elle propose en réalité en un seul paragraphe deux techniques indépendantes. La première, très brève, permet d'obtenir le côté HI du carré ; la deuxième (à partir de : "*ou ayant prolongé...*"), plus longue, demande de tracer un carré extérieur n'ayant avec le triangle que le point B en commun. La proposition de Marolois d'élever la perpendiculaire GF " *a vostre discretiõ*", c'est-à-dire à l'endroit de votre choix, ne peut qu'être un motif d'intérêt supplémentaire pour les élèves, qui souhaiteront vérifier le bon fonctionnement de la méthode dans plusieurs cas sur la même figure. Certaines se contenteront de faire une ou deux constructions, mais la plupart montrent une réelle curiosité et désirent comprendre pourquoi "ça marche".

Troisième étape : la résolution "algébrique".

Ayant épuisé les ressources du procédé géométrique, j'ai présenté aux élèves un texte contenant une approche réellement différente. Écrit par Muhammad Ibn Musa al-Khwarizmi (780-850), astronome et mathématicien ayant vécu à Bagdad, il est extrait d'un ouvrage resté célèbre (*al-Kitab al-Mukhtasar fi hisab al jabr wal l-muqabala*, ou abrégé du calcul par les procédés de la restauration et de la comparaison) car un mot du titre, al jabr, a donné le substantif "algèbre". Dans le même ordre d'idée, on peut évoquer "algorithme", qui dérive directement du nom de notre auteur.

Le problème présenté par al-Khwarizmi apparaît comme un problème géométrique, mais les élèves s'aperçoivent vite que son mode de résolution ne l'est pas. Les termes imagés ont été discutés avec les élèves avant de chercher à comprendre la technique mise en œuvre : on parle du "ventre" de la terre, et de ses "flancs". Mais deux mots ont nécessité une explication, "*chose*" et "*māl*" : la *chose* dont il est question est ce qu'on appelle aujourd'hui l'inconnue et qu'on représente souvent dans un calcul par la lettre x. Le *māl* (signifiant le bien, la fortune, d'où la source d'amusement pour la classe, *le māl c'est le bien*) correspond au carré de l'inconnue x, autrement dit x^2. Le texte original est présenté ci-contre (des élèves d'origine maghrébine se sont amusées à retrouver des mots qu'elles savaient lire), et nous le faisons suivre par la traduction[3] :

11.4. <Problème d'arpentage>

Si on dit : une terre triangulaire, ses deux côtés <ont> dix coudées, dix coudées, et la base douze coudées, et dans son ventre une terre carrée. Quel est le côté du carré ?

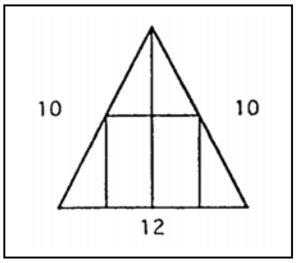
La méthode pour cela consiste à connaître la hauteur de la <terre> triangulaire et c'est en multipliant la moitié de la base - et c'est six -, par lui-même ; il vient trente-six. Retranche-les de l'un des deux côtés courts multiplié par lui-même - et c'est cent -. Il reste soixante-quatre. Prends sa racine, huit, et c'est la hauteur. Son aire est quarante-huit coudées et c'est ta multiplication de la hauteur par la moitié de la base, qui est six.

Nous considérons un des côtés de la <terre> carrée <égal à> une chose et nous la multiplions par elle-même ; il vient un māl. Nous le conservons. Puis, nous constatons qu'il nous reste deux triangles sur les deux flancs de la <terre> carrée et un triangle au-dessus d'elle.

Quant aux deux triangles qui sont sur les deux flancs, ils sont égaux et leurs hauteurs sont les mêmes et elles sont sur un angle droit. Leur aire est que tu multiplies une chose par six moins un demi d'une chose, il vient six choses moins la

[3] Cette traduction nous a été fournie par Ahmed Djebbar, professeur à l'Université de Lille, que nous remercions, et qui est par ailleurs auteur de "Une histoire de la science arabe" paru en 2001 aux Éditions du Seuil (collection Points-Sciences).

moitié d'un māl. Et c'est l'aire des deux triangles ensemble qui sont sur les deux flancs du carré.
Quant à l'aire du triangle supérieur, c'est en multipliant huit moins une chose, et c'est la hauteur, par la moitié d'une chose ; il vient quatre choses moins la moitié d'un māl.
<Tout> ceci est l'aire du carré et l'aire des trois triangles, et c'est dix choses, <qui> égalent quarante-huit, et c'est l'aire du grand triangle.
De cela, la chose est quatre coudées et quatre cinquièmes de coudée, et c'est chacun des côtés de la <terre> carrée.
Et voici sa figure :



La lecture de ce document a été à la fois source d'intérêt et de difficultés pour les élèves. L'origine de l'auteur et le vocabulaire exotique ont provoqué de la curiosité, mais en même temps cette description inhabituelle a vite entraîné une demande d'aide. Je leur ai proposé de détailler ce qui est effectué dans chaque phrase prise séparément. Le travail commun a permis d'obtenir le découpage suivant :
Première phrase : c'est l'énoncé du problème contenant la description de la figure. L'élément recherché est le côté du carré.
Deuxième phrase : elle contient deux parties, la première permet de calculer la hauteur du triangle à l'aide de la propriété de Pythagore, la deuxième de calculer son aire en appliquant la formule connue par les élèves.
Troisième phrase : la plus délicate car les deux termes "*chose*" et " *māl*" y apparaissent, et l'auteur demande de découper le triangle en quatre polygones, le carré, un triangle au-dessus, et un triangle de chaque côté du carré. J'ai alors suggéré de choisir l'écriture algébrique que nous connaissons, en prenant x pour la *chose* ; l'aire du carré est le *māl*, x^2, et de l'utiliser pour retranscrire la suite des calculs.

Quatrième phrase : les aires des deux triangles latéraux sont égales chacune à $\frac{x(6-\frac{x}{2})}{2}$, ce qui donne $x(6-\frac{x}{2})=6x-\frac{x^2}{2}$ pour l'ensemble des deux triangles.

Cinquième phrase : l'aire du triangle supérieur est égale à $(8-x)\frac{x}{2}=4x-\frac{x^2}{2}$.

Sixième phrase : on obtient : $x^2 + 6x-\frac{x^2}{2} + 4x-\frac{x^2}{2} = 10x = 48 =$ aire du grand triangle.

Septième et dernière phrase : le côté cherché mesure 4 coudées et $\frac{4}{5}$ de coudée, ce qu'on écrit aujourd'hui 4,8 coudées.

Il ne s'agissait plus alors que de vérifier les résultats donnés par al-Khwarizmi, ce qui n'a pas posé de problème particulier, si ce n'est l'écriture finale du résultat sous une forme fractionnaire. Le fait qu'au X^ème^ siècle, l'écriture décimale 4,8 n'existait pas fut une vraie surprise pour la classe, mais leur fit bien entrevoir l'existence d'une réelle modification des connaissances mathématiques au cours du temps. L'écriture des nombres a beaucoup évolué à travers les siècles avant de se stabiliser au cours du XVII^{ème} siècle dans la forme décimale qu'on connaît aujourd'hui, mais leur raconter l'histoire de ces écritures n'aurait certainement pas eu la même efficacité sur ces élèves : en effet la lecture de ce nombre 4 et $\frac{4}{5}$ les a installées dans une situation de demandeuses d'information, et non de simples réceptionnaires de connaissances transmises.

Deux interventions ont également eu lieu pendant cette phase de travail. Lors de la lecture de l'énoncé, une élève attentive et "bien dressée" a formulé la remarque que l'auteur avait donné une aire de 48 coudées au lieu d'écrire 48 coudées carrées. La deuxième intervention a concerné la forme isocèle du triangle utilisé. Pourrait-on utiliser la technique proposée avec n'importe quel triangle comme on l'a montré avec la technique géométrique ? La classe a alors rapidement constaté que la méthode présentée fonctionnait bien pour des raisons de symétrie, mais qu'elle ne s'appliquait plus dans le cas général d'un triangle quelconque.

Je suis ensuite revenu sur la question initiale de l'inscription d'un carré dans un triangle. Comment faut-il utiliser la méthode d'al-Khwarizmi qui nous donne seulement la mesure du côté du carré, mais ne nous fournit pas la méthode de construction comme Marolois ? Trois solutions ont été proposées :
Une élève propose des "essais successifs", en déplaçant la règle parallèlement à la hauteur, jusqu'à ce qu'on obtienne "juste" 4,8 cm (plutôt que continuer à parler des coudées, les élèves ont spontanément utilisé les centimètres).
Une deuxième améliore la première en disant qu'il suffisait de mesurer 4,8 cm sur la hauteur, puis 2,4 cm de chaque côté du pied de la hauteur sur la base, et on complète facilement le carré.
La troisième solution a été de découper un carré de papier de 4,8 cm de côté et de le placer dans le triangle jusqu'à ce qu'il soit bien inscrit.

Bien que la dernière méthode ait été reconnue plus longue à mettre en œuvre, elle a eu la préférence de la majorité, peut-être parce qu'elles se reconnaissent dans un exercice comportant un tracé avec découpage comme lors de leur travail en atelier (fabrication de gabarits).

Bilan et conclusion.

Environ trois heures ont été consacrées à ces travaux qui ont permis aux élèves de rencontrer des contenus mathématiques variés inclus dans le programme de mathématiques des classes de BEP. Nous pouvons citer les propriétés des figures géométriques simples, le théorème de Thalès (reconnaître une "situation de Thalès", utiliser le théorème lui-même), l'égalité des rapports, les équations (mise en équation et résolution), le calcul littéral, l'utilisation des formules des aires de figures simples, l'inscription de figures. Mais nous devons insister également sur les échanges fréquents pour valider, accepter, démontrer ou rejeter une proposition.

Une discussion collective a été nécessaire plusieurs fois, entre des élèves désireuses de défendre leur conception, mais ne refusant pas d'écouter les arguments de leurs camarades, et de les accepter si leur méthode leur semblait meilleure. C'est d'ailleurs à cette occasion qu'on peut relever l'importance qu'il y a de traiter un problème qui a pris du sens par des tracés préliminaires et une mise en commun, et qui a vu sa solution apparaître sous deux formes très différentes, relevant toutes deux d'une période passée, mais pas dépassée. En effet, les contenus et méthodes abordés restent bien d'actualité.

Une phrase extraite d'un article d'Evelyne Barbin, présidente de la commission inter-IREM "Épistémologie et Histoire des Mathématiques", et datant de 1995, me semble bien correspondre à l'intérêt de la mise en place d'une telle situation :

"Le professeur de mathématiques doit enseigner les mathématiques comme un processus historique et un objet culturel. Mais il ne s'agit pas ici de calquer l'enseignement sur l'histoire, mais de saisir dans l'histoire les problèmes qui donnent signification aux savoirs."

([Bar1995])

En effet, la syntaxe et l'écriture, originales, n'ajoutent pas une difficulté supplémentaire dans les cas évoqués, mais provoquent bien chez les élèves une volonté de compréhension des exercices décrits intégrés dans un "processus historique" ; le dépaysement, les interrogations suscitées par les textes permettent une réflexion sur un plan culturel.

Du point de vue des connaissances mathématiques, la présentation de deux méthodes très éloignées pour résoudre un même problème agit sur les représentations des élèves, et leur permet de donner du sens aux méthodes et aux savoirs qu'elles ont pu étudier par ailleurs, comme le préconisait la phrase ci-dessus.

Nous ne voudrions pas terminer cet article sans évoquer deux faits qui nous semblent importants. Lors de ce travail aucune élève n'a posé la fameuse question du "à quoi ça sert ?", mais chacun des lecteurs comprend bien que l'inscription d'un carré dans un triangle n'a pas une grande utilité pour une couturière, et l'intérêt rencontré lors de la résolution du problème aura été le moteur de la classe.

Enfin j'ai souhaité rechercher chez les élèves si elles avaient le sentiment qu'une méthode était "meilleure" que l'autre. Et au lieu d'obtenir un pourcentage comparatif, j'ai constaté que derrière ce mot de "meilleure" se cachait des significations très diverses (on retrouve les ambiguïtés de vocabulaire évoquées au début de l'article pour le mot *inscrire*). Pour l'une c'était la méthode la plus exacte, pour l'autre la plus rapide, ou encore la plus pratique, ou enfin celle qui plaît le plus.

Mais plutôt qu'une dissonance, n'est-il pas juste de voir dans ces avis très divers, une implication des élèves, source de satisfaction chez le professeur, qui perçoit tout ce qu'une telle attitude peut avoir de positif en terme de formation, sans oublier l'aspect plaisir.

Bibliographie

[Chu1979] : **Nicolas Chuquet**, *La Géométrie, première géométrie algébrique en langue française*, 1484, introduction, texte et notes par Hervé l'Huillier, Vrin, Paris, 1979.

[Dau1901] : **M. Dauzat**, *Éléments de méthodologie mathématique*, Librairie Nony & Cie, Paris, 1901.

[Déc1998] : *Maths seconde*, collection Déclic, Hachette éducation, Paris, 1998.

[Mar1616] : **Samuel Marolois**, *Geometrie contenant la theorie et practicque d'icelle nécessaire à la fortification*, Hagae-Comitis, ex Officina Henrici Hondii, Arnhemi, 1616.

[Bar1995] : **Evelyne Barbin**, *Bulletin de l'APMEP* n° 397, février 1995.

Somme de diviseurs

Tristan DERAY, Lycée Hilaire de Chardonnet à Chalon s/Saône

C'est vers 1760 qu'Euler présenta en arithmétique la fonction qui porte son nom et qui indique le nombre d'entiers premiers avec un entier n et qui lui sont strictement inférieurs. Dans ce même domaine, il avait auparavant déjà introduit une autre fonction moins connue, mais aussi digne d'intérêt à savoir celle qui à un entier associe la somme de ses diviseurs (généralement notée $\sigma(n)$).

Descartes avant lui avait remarqué que si p était un entier premier, alors $\sigma(p^r)=\dfrac{p^{r+1}-1}{p-1}$

En effet, les diviseurs de p^r sont $1,\ p,\ p^2 \ldots\ldots p^r$

et donc $\sigma(p^r)=1+p+\ldots+p^r$

c'est-à-dire $\sigma(p^r)=\dfrac{p^{r+1}-1}{p-1}$

Euler établit vers 1750 le théorème suivant :

$$\text{Si } n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{r_i} \quad \text{alors } \sigma(n^r) = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{r_i+1}-1}{p_i-1}$$

En effet si $n = p_1^{r_1}\ldots\ldots p_k^{r_k}$, alors la somme des diviseurs est donnée par le produit

$$(1+p_1+p_1^2+\ldots\ldots+p_1^{r_1})\,(1+p_2+p_2^2+\ldots\ldots+p_2^{r_2})\ldots\ldots(1+p_k+p_k^2+\ldots\ldots+p_k^{r_k})$$

ou encore $\sigma(n)=(\dfrac{p^{r_1+1}-1}{p-1})\ldots.(\dfrac{p^{r_k+1}-1}{p-1})$ $\qquad \sigma(n)=\prod_{i=1}^{i=k}(\dfrac{p^{r_i+1}-1}{p-1})$

il s'ensuit immédiatement le corollaire

Si a et b sont deux entiers premiers entre eux alors $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$

Autrement dit la fonction σ est une fonction arithmétique multiplicative.

Les nombres parfaits entretiennent un rapport privilégié avec la fonction σ de part leur définition même :

L'entier p est premier si et seulement si $\sigma(p)=2p$.

On doit à Euclide d'avoir établi à la dernière proposition du livre 9 de ses Eléments le théorème suivant :

Un nombre de la forme $p=2^{p-1}(2^p-1)$ est parfait si $q=(2^p-1)$ est un nombre de Mersenne.

En effet les diviseurs de 2^{p-1} sont $1,\ 2,\ 2^2 \ldots.\ 2^{p-1}$.

Si 2^p-1 est premier, ses seuls diviseurs sont 1 et lui-même.

Comme 2^{p-1} et 2^p-1 sont premiers entre eux, la somme des diviseurs de $2^{p-1}(2^p-1)$ peut-être représentée comme le produit des sommes des diviseurs de 2^{p-1} et 2^p-1

c'est-à-dire

$$\sigma\left[2^{p-1}(2^p-1)\right] = \sigma\left[2^{p-1}\right]\ \sigma\left[2^p-1\right] = \left(\frac{2^p-1}{2-1}\right)\times 2^n = 2\times(2^{p-1})(2^p-1)$$

En posant $P = 2^{p-1}(2^p - 1)$, on a donc bien $\sigma(P) = 2P$

Un nombre de la forme $P = 2^{p-1}(2^p - 1)$ avec $(2^p - 1)$ nombre de Mersenne est appelé nombre euclidien.

Ainsi les nombres euclidiens sont parfaits. A plus de 15 siècles de distance, Euler répondit à Euclide :

Les nombres pairs parfaits sont euclidiens.

Soit p un entier parfait, posons $p = 2^{n-1}s$ avec $n \geq 2$ et s impair.

Comme p est parfait, $\sigma(p) = 2p$.

Par ailleurs $\sigma(2^{n-1}s) = \sigma(2^{n-1})\sigma(s) = 2(2^{n-1}s) = 2^n s$

Comme 2^{n-1} et s n'ont pa s de diviseurs communs, on a : $\sigma(2^{n-1}s) = \dfrac{2^n - 1}{2 - 1} \times \sigma(s)$

et donc $\sigma(p) = (2^n - 1)\sigma(s)$

Par conséquent $2^n s = (2^n - 1)\sigma(s)$

posons $\sigma(s) = s + k$ (k représente la somme des diviseurs de s qui lui sont strictement inférieurs), on a alors : $2^n s = (2^n - 1)(s + k)$

et donc $s = (2^n - 1)t$

donc t doit diviser s et doit donc être un diviseur de s, ce qui n'est possible que si $t = 1$.

Par conséquent $s = (2^n - 1)$

Euler se contenta de la remarque suivante pour « compléter » son résultat :

« Quant à savoir s'il existe des nombres parfaits impairs, la question est autrement plus compliquée ! «

A ce jour, personne n'a su véritablement formuler de meilleure réponse.

Le talent d'Euler ne s'arrête pas là, mais poursuit ses découvertes bien au-delà, étudiant les partitions des entiers, c'est-à-dire les décompositions d'un entier comme somme d'entiers inférieurs, il vit curieusement réapparaître la fonction σ de façon aussi étrange qu'admirable, en découvrant une expression permettant de calculer $\sigma(n)$ à l'aide des valeurs $\sigma(n-k)$ où k prend ses valeurs dans l'ensemble des nombres pentagonaux ! Cette intuition et ce génie sont le sceau qu'il apposa sur les mathématiques du 18ème.

OBSERVATION SUR LES SOMMES DE DIVISEURS

Leonhard Euler

§ 1 . Soit un nombre quelconque n, et soit $\int n$ la somme de tous les diviseurs de n. Comme l'unité est son propre et seul diviseur, $\int 1 = 1$; comme un nombre premier n'admet que deux diviseurs, lui-même et l'unité, si n est un nombre premier, alors $\int n = n + 1$. Un nombre parfait étant égal à la somme de ses parties aliquotes, il est évident que la somme des diviseurs d'un nombre parfait est égal au double de ce nombre ; ainsi lorsque n est un nombre parfait $\int n = 2n$. Un nombre est dit redondant si la somme de ses diviseurs est supérieure à ce nombre, c'est-à-dire si $\int n > 2n$, inversement un nombre est dit déficient s'il est inférieur à la somme de ses diviseurs, donc $\int n < 2n$.

§ 2. Ainsi, le caractère des nombres, du moins ceux qui peuvent être exprimés à l'aide de la somme de leurs parties aliquotes, ou diviseurs, s'exprime facilement à l'aide de ce signe.

En effet, si $\int n = 1 + n$, alors n est un nombre premier, si $\int n = 2n$, alors n est un nombre parfait, et si $\int n > 2n$ ou $\int n < 2n$, alors n est respectivement un nombre redondant ou déficient.

Ce symbole est aussi utilisable pour évoquer les nombres que l'on appelle amiables, ceux pour lesquels la somme de diviseurs est égale à un autre et inversement. Si m et n sont des nombres amiables, comme m est la somme partielle de ses parties aliquotes $m = \int m - m$ et $n = \int n - n$, on a alors $n = \int m - m$ et $m = \int n - n$, donc $\int m = \int n = m + n$

§ 3. La somme des diviseurs de n'importe quel nombre proposé peut-être trouvé facilement, et d'autant plus facilement que le nombre sera produit de deux facteurs premiers entre eux, c'est-à-dire n »ont pas d'autres diviseurs communs que l'unité : la somme des diviseurs du produit pq est égal au produit des sommes des diviseurs de chacun, c'est-à-dire : $\int pq = \int p \times \int q$

Cette méthode qui est utilisée pour trouver les sommes de petits nombres de diviseurs peut être étendue sans peine pour trouver les sommes de grands nombres de diviseurs.

§ 4. Si a,b,c,d,… désignent des nombres premiers, tout nombre peut s'écrire sous la forme $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$, donc la somme des diviseurs est donnée par : $\int a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta = \int a^\alpha \int b^\beta \int c^\gamma \int d^\delta$

Si a,b,c,d,… sont des nombres premiers, alors : $\int a^\alpha = 1 + a + a^2 + \ldots + a\alpha = \dfrac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}$

et nous voyons que $\int a^\alpha \int b^\beta \int c^\gamma \int d^\delta == \dfrac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \times \dfrac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \times \dfrac{c^{\gamma+1}-1}{c-1} \times \dfrac{d^{\delta+1}-1}{d-1}$.

Il suffit ainsi de trouver la multiplicité des facteurs premiers d'un nombre pour trouver la somme de ses diviseurs.

§ 5. Donnons ici la valeur de la somme des diviseurs des entiers inférieur à 100, ce qui nous aidera par la suite.

$\int 1=1$	$\int 26=42$	$\int 51=72$	$\int 76=140$
$\int 2=3$	$\int 27=40$	$\int 52=98$	$\int 77=96$
$\int 3=4$	$\int 28=56$	$\int 53=54$	$\int 78=168$
$\int 4=7$	$\int 29=30$	$\int 54=120$	$\int 79=80$
$\int 5=6$	$\int 30=726$	$\int 55=72$	$\int 80=186$
$\int 6=12$	$\int 31=32$	$\int 56=120$	$\int 81=121$
$\int 7=8$	$\int 32=63$	$\int 57=80$	$\int 82=126$
$\int 8=15$	$\int 33=48$	$\int 58=90$	$\int 83=84$
$\int 9=13$	$\int 34=54$	$\int 59=60$	$\int 84=224$
$\int 10=18$	$\int 35=48$	$\int 60=168$	$\int 85=108$
$\int 11=12$	$\int 36=91$	$\int 61=62$	$\int 86=132$
$\int 12=28$	$\int 37=38$	$\int 62=96$	$\int 87=120$
$\int 13=14$	$\int 38=60$	$\int 63=104$	$\int 88=180$
$\int 14=24$	$\int 39=40$	$\int 64=127$	$\int 89=90$
$\int 15=24$	$\int 40=41$	$\int 65=84$	$\int 90=234$
$\int 16=31$	$\int 41=42$	$\int 66=144$	$\int 91=112$
$\int 17=18$	$\int 42=96$	$\int 67=68$	$\int 92=168$
$\int 18=39$	$\int 43=44$	$\int 68=69$	$\int 93=128$
$\int 19=20$	$\int 44=84$	$\int 69=96$	$\int 94=144$
$\int 20=42$	$\int 45=78$	$\int 70=144$	$\int 95=120$
$\int 21=32$	$\int 46=72$	$\int 71=72$	$\int 96=252$
$\int 22=36$	$\int 47=48$	$\int 72=195$	$\int 97=98$
$\int 23=24$	$\int 48=124$	$\int 73=74$	$\int 98=171$
$\int 24=60$	$\int 49=57$	$\int 74=114$	$\int 99=156$
$\int 25=31$	$\int 50=93$	$\int 75=124$	$\int 100=217$

§ 6. Si l'on considère la suite de nombres 1,3,4,7,6,12,8,15,13,18,12,28,... constituée de la somme des diviseurs des nombres entiers, non seulement aucune règle ne donne la loi de progression, mais encore, l'ordre en semble absent.

Cette série est liée à celle des nombres premiers, puisque si n est premier, alors $\int n = n+1$, dont on ignore la loi de progression. Comme notre suite contient non seulement des nombres premiers, mais aussi tous les autres nombres, la règle de formation semble encore plus compliquée que la suite des nombres premiers elle-même.

§ 7. Je vois ainsi qu'il ne m'appartient pas de faire progresser la science des nombres. Cependant j'ai découvert une certaine règle constante, par laquelle chaque terme de la suite $1, 3, 4, 7, 6,$ etc... est engendré et par laquelle encore chaque terme de la suite est défini par les termes précédents. Ce que j'ai trouvé de plus merveilleux concernant cette suite, c'est une sorte de progression que l'on appelle par récurrence et qui permet de trouver n'importe quel terme à partir des précédents à l'aide d'une certaine relation déterminée.

Cependant, cette suite est vraiment désordonnée, et il semble qu'il n'existe aucune relation de récurrence. Toutefois, est-il possible de donner une méthode permettant d'engendrer de telles suites ?

§ 8. Si n est un entier, $\int n$ désigner la somme de ses diviseurs et les termes qui précèdent celui-ci dans la suite des sommes des diviseurs sont $\int(n-1), \int(n-2), \int(n-3), \ldots$ Il est possible d'exprimer le terme $\int$n de cette suite en fonction des termes précédents de la manière suivante :

$$\int n = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12) + \int(n-15) - \int(n-22) - \int(n-26) + \int(n-35) +$$

$$\int(n-40) - \int(n-51) - \int(n-57) + \int(n-70) + \int(n-77) - \int(n-92) - \int(n-100) + \int(n-117) + \int(n-126) \ldots$$

où les signes + et – alternent en se répétant deux fois. Il est commode de présenter la série de la manière suivante :

$$\int n =$$
$$\int(n-1) - \int(n-5) + \int(n-12) - \int(n-22) + \int(n-35) - \int(n-51) + etc.....$$
$$\int(n-2) - \int(n-7) + \int(n-15) - \int(n-26) + \int(n-40) - \int(n-57) + etc...$$

§ 9. Il est possible de déterminer un ordre dans cette suite de nombres que l'on soustrait successivement à n. Il suffit pour cela de former les différences secondes pour s'apercevoir que celles-ci sont constantes. On a ainsi pour la première suite de nombres:

	1		5		12		22		35		70		92		117		etc		
Différence 1ère		4		7		10		13		16		19		22		25		etc
Différence 2nde			3		3		3		3		3		3		3		3		

Et le terme général de la suite est $\frac{3x^2 - x}{2}$ qui est la suite des nombres pentagonaux.

L'autre suite est

	2		7		15		26		40		57		77		100		126		etc
Différence 1ère		5		8		11		14		17		20		23		26		etc	
Différence 2nde			3		3		3		3		3		3		3		3		etc

Son terme général est $\frac{3x^2 + x}{2}$, cette suite est celle des pentagonaux auxquels est ajoutée celle des entiers consécutifs. $(1+1\ ;\ 5+2\ ;\ 12+3\ ;\ 22+4\ ..)$

§ 10. Il est digne d'intérêt de remarquer que la suite des nombres pentagonaux et celle qui lui a été associée puissent s'appliquer à l'étude de celle de la somme des diviseurs des entiers.

Alors que rien ne laisse supposer de lien entre des entiers pentagonaux et la somme des diviseurs. Si l'on ordonne la suite de nos nombres de la manière suivante :

$$...,77,57,40,26,15,7,2,0,1,5,12,22,35,51,70,92,...$$

on peut ordonner la somme des diviseurs de la manière qui suit :

$$etc,-\int(n-15)+\int(n-7)-\int(n-2)+\int(n-0)-\int(n-1)+\int(n-5)-\int(n-12)...etc$$

en prenant soin de ne prendre que des entiers positifs.

§ 11. A partir de cette formule, nous pouvons retrouver la première établie.

$$\int n=\int(n-1)+\int(n-2)-\int(n-5)-\int(n-7)+\int(n-12)+\int(n-15)\ldots\text{etc}$$

Nous voulons déterminer la somme du nombre n à partir des sommes de diviseurs de nombres inférieurs, et appliquer cette formule pour les valeurs positives $(n-1),(n-2),(n-5),\ldots$ Il n'est pas possible de dire combien de termes de cette suite doivent être pris, c'est-à-dire avant d'atteindre les sommes des diviseurs de nombres négatifs.

Tous les termes qui suivent le symbole $\int$ et qui contiennent des nombres négatifs doivent être omis. Si n est un petit nombre, un petit nombre de termes suffit, tandis que s'il est grand, en général de nombreux termes devront être pris e compte dans notre formule.

§ 12. Par conséquent, la somme des diviseurs d'un nombre n est donnée par les sommes des parties aliquotes de nombres plus petits que je suppose connues. Il y a cependant une exception : ceci ne pouvant s'appliquer à la somme de diviseurs de nombres négatifs. Parmi ceux autorisés, il faut signaler le cas où notre formule donne le terme $\int(n-n)$, c'est-à-dire $\int 0$. Comme 0 est divisible par tout nombre, il faut donner une valeur infinie ou indéterminée à ce terme. Quand le cas se produit, c'est-à-dire quand n est un terme de la suite des nombres pentagonaux ou de la suite associée, on conviendra toujours de donner à $\int(n-n)$, c'est-à-dire $\int 0$ la valeur n ; avec cette règle, les termes $(n-n)$ seront donc remplacés.

§ 13. Les principes étant posés, il est facile de vérifier à partir d'exemples numériques que notre expression semble juste.

$$\int 1=\int 0=1$$
$$\int 1=1=1$$
$$\int 2=\int 1+\int 0$$
$$\int 2=1+2=3$$
$$\int 3=\int 2+\int 1=3+1=4$$
$$\int 4=\int 3+\int 2=4+3=7$$
$$\int 5=\int 4+\int 3-\int 0$$
$$\int 5=7+4-5=6$$
$$\int 6=\int 5+\int 3-\int 1$$
$$\int 6=6+7-1=12$$
$$\int 7=\int 6+\int 5-\int 2-\int 0$$
$$\int 7=12+6-3-7=8$$
$$\int 8=\int 7+\int 6-\int 3-\int 1$$

$$\int 8 = 8+12-4-1=15$$

$$\int 9=\int 8+\int 7-\int 4-\int 2$$

$$\int 9=15+8-7-3=13$$

$$\int 10=\int 9+\int 8-\int 5-\int 3$$

$$\int 10=13+15-6-4=18$$

$$\int 11=\int 10+\int 9-\int 6-\int 4$$

$$\int 11=18+13-12-7=12$$

$$\int 12=\int 11+\int 10-\int 7-\int 5+\int 0$$

$$\int 12=12+18-8-6+12=28$$

§ 14. Même des nombres plus grands peuvent être pris comme le montre l'exemple qui suit, et il est véritablement merveilleux de constater que notre attente est toujours satisfaite et que nous obtenons de la sorte la somme des diviseurs de n'importe quel nombre donné.

On vérifiera que pour aucun des nombres donnés précédemment, la somme des diviseurs ne dépasse 100. Intéressons nous donc à la justesse de celle-ci pour de grands nombres. Si un nombre premier est donné, nous nous réjouissons de voir notre formule nous donner une somme des diviseurs du nombre est égale au nombre lui-même augmenté de 1.

Considérons comme exemple le nombre $n=101$, dont on ne sait sans recherche spécifique s'il est ou non premier. Nous avons :

$$\int 101=\int 100+\int 99-\int 96-\int 94+\int 89+\int 86-\int 79-\int 75+\int 66+\int 61-\int 50-\int 44+\int 31+\int 24-\int 9-\int 1$$

$$\int 101=217+156-252-144+90+132-80-124+144+62-93-84+32+60-13-1$$

En regroupant les termes :

$$\int 101=373-396+222-204+206-177+92-14$$

$$\int 101=893-791=102$$

Nous remarquons que la somme des diviseurs du nombre 101 est égale à 102, par conséquent, le nombre 101 est premier. Comme nous le constatons avec admiration, sans qu'aucune opération ne soit posée, qui fournisse les diviseurs, il est possible sans connaître ces derniers d'en déterminer la somme.

§ 15. Les propriétés dont sont dotées les sommes de diviseurs ne sont rien moins que remarquables, même si elles demeurent loin de l'évidence et difficiles à établir clairement. Cependant même si une preuve relative à ces propriétés cachées des nombres n'est pas trouvée, cette règle découverte semble toutefois valable et la recherche de la vérité est digne d'éloge, mais cette vérité demeure bien cachée. Pour être certain, je me suis efforcé jusqu'à l'épuisement, sans pouvoir établir la vérité. Ainsi je ne sais pas même ce qu'il faut penser de ce qui est vérifié, mais dont la démonstration ne peut-être trouvée. Bien que de nombreux exemples semblent attester la véracité de la propriété, il ne nous est pas donné de pouvoir la démontrer.