UNIVERSITE DE DIJON

IREM

PHYSIQUE-MATHEMATIQUE

MATHEMATIQUES ET GRAND PUBLIC

RUBIK'S CUBE ET GROUPES DE TRANSFORMATIONS

D. ARNAL
M. BEN AMMAR
J.C. CORTET
H. FANT
C. MEUNIER
P. MOLIN

FACULTE DES SCIENCES MIRANDE

MATHEMATIQUES ET GRAND PUBLIC

RUBIK'S CUBE ET GROUPES DE TRANSFORMATIONS .

Exposition réalisée dans le cadre des journées portes ouvertes

du 16 janvier 1982 à l'Université de Dijon

---

par : D. ARNAL

M. BEN AMMAR

J.C. CORTET

H. FANT

C. MEUNIER

P. MOLIN

I N T R O D U C T I O N

Le texte de ce fascicule est celui des affiches d'une exposition réalisée à l'occasion des journées portes ouvertes dans le cadre du colloque national "Recherche et Technologie" du 16 janvier 1982 par une équipe formée de chercheurs du laboratoire de physique mathématique de l'Université de Dijon et d'étudiants en 3e cycle (DEA et préparation au CAPES).

Notre objectif était de présenter en principe à tout public une introduction à la théorie des groupes. Plus précisément nous voulions :

1/ Montrer comment cette théorie apparaît en physique théorique.

2/ Développer une démarche fréquente dans la recherche mathématique à savoir la construction et la classification de tous les objets ayant une structure donnée.

3/ Présenter un résultat important et récent (classification des groupes finis simples).

Présentation de l'exposition

Le choix du Rubik's cube comme prétexte à cette exposition était guidé par le souci d'unepart de profiter de l'engouement du public pour ce casse tête , d'autre part de disposer d'un exemple non élémentaire de groupe de transformations.

Fallait-il donner une méthode de "remontage" du cube au risque de voir le public ne s'intéresser qu'à cela ? Nous nous y sommes résolus en nous engageant à guider oralement la visite de manière à insister sur les aspects mathématiques et à les séparer nettement du "remontage".

L'exposition était organisée comme suit :

- les affiches étaient regroupées par thèmes nettement séparés
- le premier groupe d'affiches définissait les notions abstraites d'états et dégageait la structure du groupe des transformations de l'ensemble des états sur l'exemple du cube.
  Oralement, nous tentions de généraliser ces questions à un système physique quelconque et de justifier l'étude des transformations des états plutôt que des manipulations du cube.
- ensuite, nous définissons la notion de morphisme, image et noyau et donnions des exemples en particulier puisque nous avions besoin du groupe S_n des permutations et de la signature, nous développionsl'exemple du "Taquin".

Oralement, nous essayions par des métaphores de rendre ces notions intuitives.

- La partie suivante était consacrée à la notion de groupe simple et au théorème de Jordan-Hölder ; les seules démonstrations données furent la simplicité de A_n et l'existence de la suite de Jordan Hölder pour un groupe fini. C'est alors que nous citions le résultat de classification des groupes finis simples.

Oralement, nous indiquions l'analogie entre la suite de Jordan Hölder et les facteurs premiers d'un nombre entier d'ailleur toutes les suites de Jordan Hölder de $\mathbb{Z}_{30}$ étaient données à titre d'exemples.

- La dernière partie théorique consistait à exhiber la suite de Jordan Hölder du groupe du cube, cette suite a été donnée sans démonstration par E. Halberstadt.

Nous en avons donné la démonstration la plus géométrique possible.

Oralement, nous accompagnons cette démonstration de manipulations du cube.

- Enfin, nous proposions une technique de remontage originale et techniquement aisée.

Cette partie était évidemment illustrée par un remontage effectif.

Toute cette exposition était agrémentée d'affichettes humoristiques qui permettaient d'éviter un abord trop rébarbatif et trop "magistral" de ces questions.

LE BILAN

Bien sûr, nous ne donnons ici qu'un bilan subjectif de cette expérience, il n'était pas question d'évaluer de façon précise le degré d'intérêt et de compréhension de nos visiteurs.

Une centaine de personnes environ se sont présentées.

Nous avons engagé la discussion avec plus des deux tiers de ces visiteurs par groupes de 2 ou 3.

Parmi ceux-ci, il y avait :

- environ une vingtaine de "scientifiques", collègues de l'Université professeurs de maths du secondaire et d'écoles normales
- les "non scientifiques" se répartissant également entre des jeunes de dix à vingt ans et des personnes plus agées soit directement intéressées soit accompagnant un enfant .... et un Rubik's cube.

Les visiteurs ont tous supporté 20 mn environ d'explications purement mathématiques en manifestant généralement un intérêt assez soutenu.

. Les notions d'états et de transformations semblent avoir été comprises dans l'ensemble

. A part l'associativité qui était trop triviale sur nos exemples, la structure de groupe a été saisie

. La notion de morphisme et d'image fidèle ou non est apparue assez intuitive d'abord grâce au vocabulaire emplyé ("photo") ensuite du fait des exemples concrets fournis (application δ)

. La signature quand elle a été comprise ne l'a été que grâce à l'exemple du taquin.

. Les difficultés ont vraiment commencées sur les notions du noyaux, groupes quotients, groupes simples, théorème de Jordan et Hölder.
La notion de groupe simple n'a finalement été perçue que comme classe de groupes connus et constituants élémentaires des autres groupes.

. L'intérêt heureusement se réveillait dès que l'on passait à la description pratique du groupe du cube : en effet d'une part tous ceux qui avaient auparavant manipulé le cube connaissaient plus ou moins implicitement l'existence d'invaraints sous le groupe des transformations. D'autre part tous les visiteurs ont été beaucoup plus convaincus par une démonstration "par geste" que par une suite de déductions théoriques . Cependant la structure exacte de $I(\delta)$ n'a pas été saisie (surtout le quotient $I(\delta)/A_{12} \times A_8$)

. Enfin, la technique de repontage a connu un gros succès auprès de toutes les couches d'âges et tous les niveaux scientifiques. Au point que certains n'ont pas hésité à recopier l'intégralité de nos affiches, restant ainsi près d'une heure dans la salle.

. Quelquefois, nous avons dépassé le cadre de l'exposition pour des aperçus sur la recherche en mathématiques ou sur l'histoire des mathématiques, profitant d'ailleurs de la présence dans la même salle d'un "poster" sur ce sujet.

. Notre méthode décontractée d'approche des problèmes semble avoir été appréciée.

Conclusion

Cette expérience nécessairement limitée d'exposition mathématique nous a convaincus qu'il était possible d'intéresser en assez large public à des questions théoriques nécessitant une attention soutenue et à exposer des chaînes de raisonnements complexes grâce à un support concret bien appréhendé.

Certainement, 20 mn étaient trop brèves pour exposer toute notre théorie, les visiteurs ne lisant pratiquement pas les affiches. D'une autre côté la présence de "guides" semble indispensable pour maintenir l'intérêt et donner des idées intuitives. Il est apparu préférable de doter chaque visiteur d'un guide pour toute l'exposition afin de ne pas "saucissoner" l'exposé. Des groupes de visiteurs un peu plus gros auraient été sans doute plus intéressants.

Pour une utilisation en classe de parties de cette exposition il nous semble possible d'étudier les notions de groupes et morphismes sur l'exemple du cube .

Le taquin est une bonne application du groupe de permutation et de la notion de signature.

Le noyau $N(\delta)$ du morphisme δ peut être déterminé puisque le raisonnement ne fait appel qu'à des notions simples de géométrie dans l'espace.

Quant à une réutilisation de cette exposition elle nécessiterait peut être un fléchage pour éviter les dispersions des visiteurs à l'entrée.

LES AFFICHES

Voici maintenant le texte des affiches exposées.
Pour des raisons techniques, il nous a été impossible de les reproduire et nous avons dû nous contenter de les recopier.

Ces affiches étaient en fait écrites à la main avec des feutres de couleur sur des feuilles de papier de 45 cm x 64 cm. Elles étaient "décorées" avec de nombreuses photos en couleur du cube. Ces photos sont ici remplacées par un dessin avec les conventions suivantes :

Une facette $\square$ est blanche

Une facette marquée $\boxed{+}$ est rouge

Une facette marquée $\boxed{.}$ est bleue

Une facette marquée $\boxed{o}$ est orange

Une facette marquée $\boxed{\triangle}$ est verte

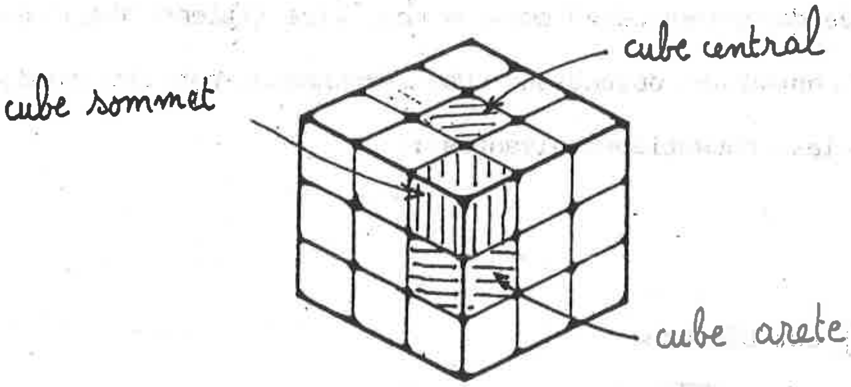
Une facette marquée $\boxed{*}$ est jaune

Transformations du cube

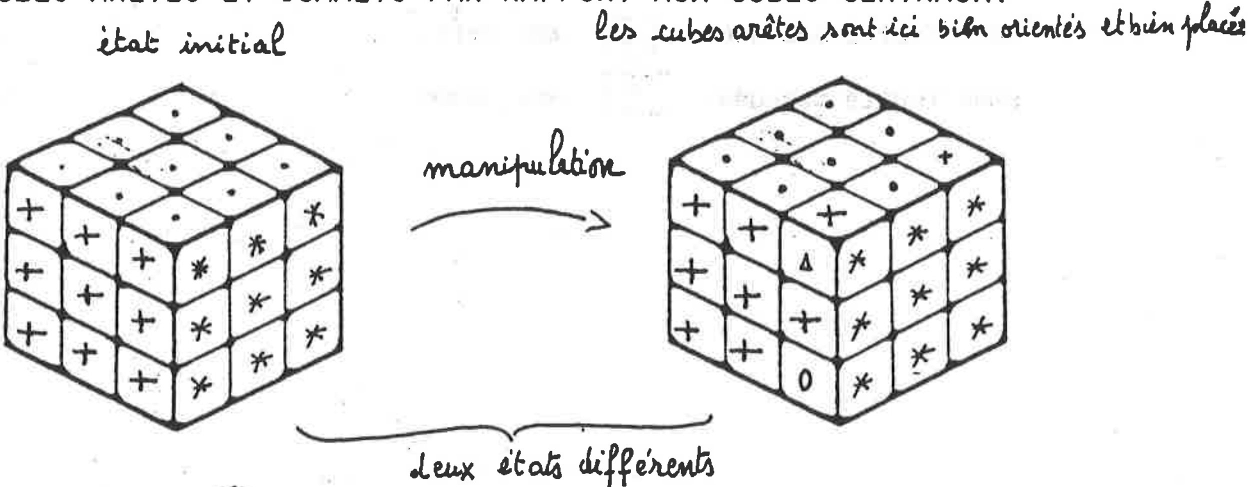
ETATS DU CUBE

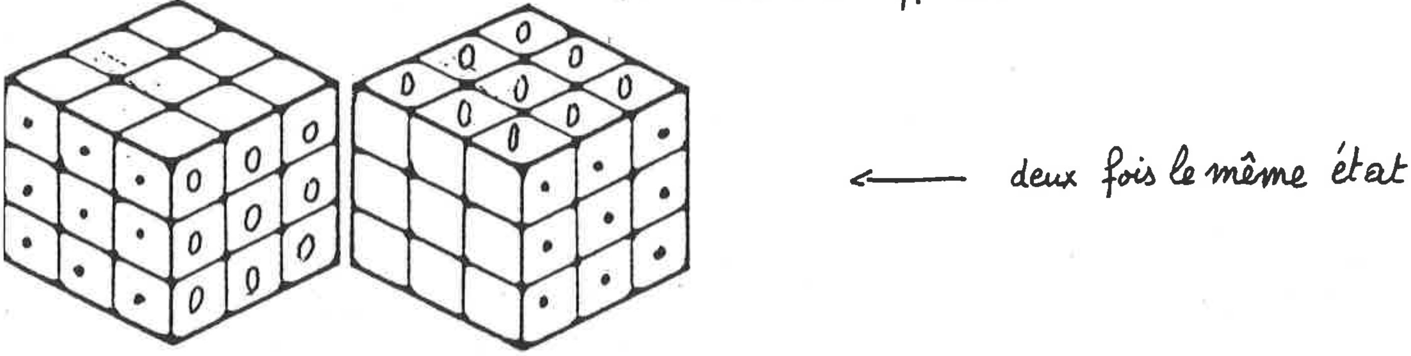
ON REGARDE LE CUBE DANS SON ETAT INITIAL

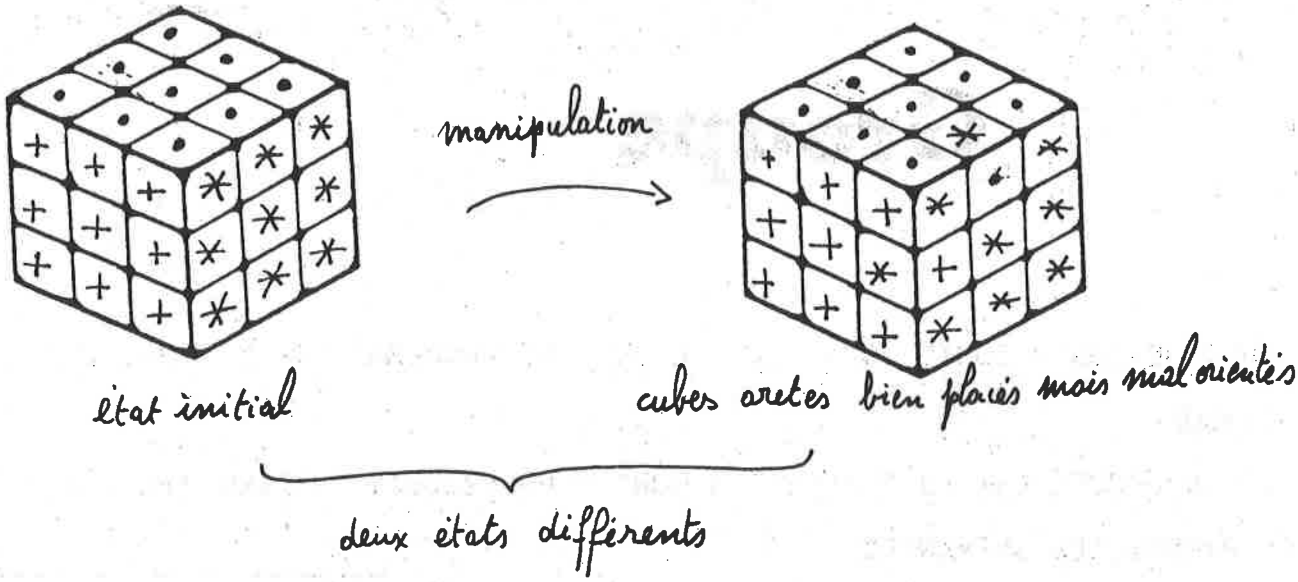
ON LE MANIPULE : ON CONSTATE QUE LES CUBES CENTRAUX N'ONT PAS BOUGÉ
QUE LES CUBES ARETES RESTENT CUBES ARETES
QUE LES CUBES SOMMETS RESTENT CUBES SOMMETS



UNE FOIS LA MANIPULATION FAITE, LE CUBE SE TROUVE DANS UN CERTAIN ETAT QUE L'ON PEUT CARACTÉRISER PAR LA POSITION ET L'ORIENTATION DES CUBES ARÈTES ET SOMMETS PAR RAPPORT AUX CUBES CENTRAUX.







TRANSFORMATIONS

LE BUT DU JEU EST DE REMETTRE LE CUBE DANS SON ÉTAT INITIAL. LE CUBE ÉTANT DANS UN ETAT DONNE UNE MANIPULATION LE MET DANS UN AUTRE ETAT, ET L'IMPORTANT EST NON PAS LA MANIPULATION ELLE-MÊME, MAIS LA TRANSFORMATION QU'ELLE APPORTE SUR LES ÉTATS DU CUBE.

EXEMPLE : UN TOUR COMPLET D'UNE DES FACES NE TRANSFORME PAS LE CUBE.

ON NOTERA C L'ENSEMBLE DE TOUTES CES TRANSFORMATIONS

* ETANT DONNEES DEUX TRANSFORMATIONS $c_1 + c_2$, ON PEUT EN DÉFINIR UNE TROISIÈME LE "PRODUIT" $c_2 . c_1$ DE c_1 ET c_2 EN APPLIQUANT c_1 À TOUT ÉTAT PUIS c_2 À L'ÉTAT OBTENU.

ATTENTION : EN GENERAL $c_1 . c_2 \neq c_2 . c_1$
PAR CONTRE $(c_1 . c_2) . c_3 = c_1 . (c_2 . c_3)$

* C POSSÈDE UN ÉLÉMENT PARTICULIER, LA TRANSFORMATION QUI NE CHANGE AUCUN ÉTAT : ON LE NOTERA : e

* UNE TRANSFORMATION c ÉTANT DÉFINIE PAR UNE MANIPULATION , ON PEUT TOUJOURS EFFECTUER LA MANIPULATION EN SENS INVERSE CE QUI DÉFINIT UNE TRANSFORMATION c^{-1} ET BIEN SUR $c^{-1} . c = c . c^{-1} = e$.

Groupe

C MUNI DE SON PRODUIT CONSTITUE CE QUE LES MATHEMATICIENS APPELLENT UN GROUPE.

UN GROUPE EST UN ENSEMBLE G MUNI D'UN PRODUIT "." QUI VÉRIFIE LES PROPRIÉTÉS SUIVANTES :

* POUR TOUS LES ELEMENTS g_1, g_2, g_3 DE G : $\boxed{(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)}$
* G POSSÈDE UN ÉLÉMENT e TEL QUE : $\boxed{e \cdot g = g \cdot e = g}$ POUR TOUT g DE G.
* CHAQUE g DE G A UN "INVERSE" g^{-1} POUR LEQUEL : $\boxed{g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e}$

ICI, ON N'ÉTUDIERA QUE DES GROUPES AYANT UN NOMBRE FINI D'ÉLÉMENTS

EXEMPLES : . $\{1\}$ EST UN GROUPE POUR LA MULTIPLICATION.

. ETANT DONNEES N CASES NUMÉROTÉES 1,2,....N , ET N OBJETS DISTINCTS PLACÉS DANS CES CASES À RAISON D'UN PAR CASE, ON PERMUTE CES OBJETS. UNE TELLE PERMUTATION s SERA NOTÉE PAR EXEMPLE :

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

L'OBJET DE LA CASE 1 EST PASSÉ DANS LA CASE 5

L'OBJET DE LA CASE 2 EST PASSÉ DANS LA CASE 4, ETC......

ON NOTE S_N L'ENSEMBLE DE TOUTES CES PERMUTATIONS

LE PRODUIT $s_2 . s_1$ EST DÉFINI, COMME POUR LE CUBE, EN APPLIQUANT DÉJÀ s_1, PUIS s_2.

EXEMPLE :

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad s_2 . s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

S_N EST UN GROUPE FINI AYANT $N(N-1)(N-2)\ldots\ldots \times 3 \times 2$ ÉLÉMENTS.

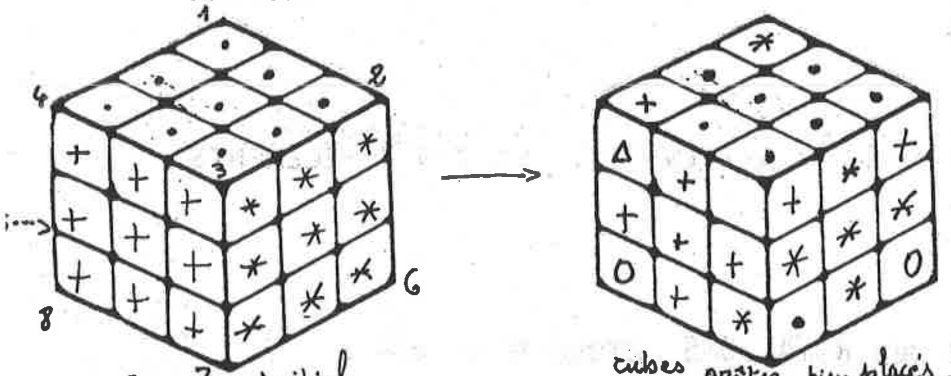
$\boxed{\cdot\ \mathbb{Z}_N}$ GROUPE DES ROTATIONS AUTOUR D'UN AXE ; $r_0, r_1, r_2, \ldots\ldots, r_{N-1}$ DE 0, 1 $N^{\text{IÈME}}$, 2 $N^{\text{IÈME}}$, ... $(N-1)$ $N^{\text{IÈME}}$ DE TOUR. LE PRODUIT EST ANALOGUE AUX PRÉCÉDENTS.

$\boxed{\cdot\ G \times H}$ SI G ET H SONT DEUX GROUPES, ON DÉFINIT SUR L'ENSEMBLE DES COUPLES $(g ; h)$ OÙ g EST ÉLÉMENT DE G, h DE H, LE PRODUIT :

$$(g_2 ; h_2) . (g_1 ; h_1) = (g_2 . g_1 ; h_2 . h_1)$$

Image de groupe

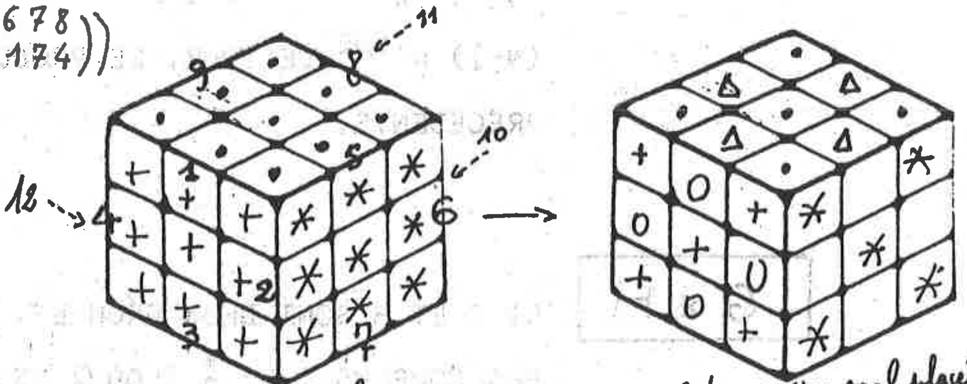
ON REGARDE C, $S_{12} \times S_8$. A UNE TRANSFORMATION c, ON ASSOCIE UN COUPLE (s_1, s_2) OÙ s_1 EST LA PERMUTATION DES 12 CUBES ARÊTES DÉFINIE PAR c, EN <u>OUBLIANT L'ORIENTATION</u>, s_2 CELLE DES CUBES SOMMETS



Etat initial

cubes arêtes bien placés
cubes sommets mal placés.

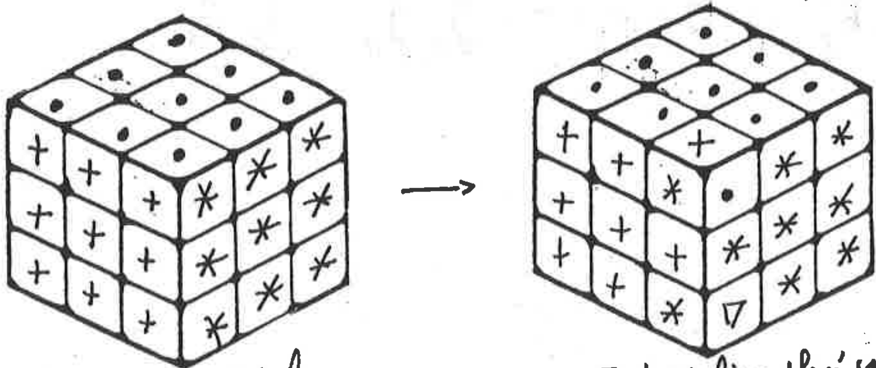
$$\left(e\,;\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&5&2&3&6&1&7&4\end{pmatrix}\right)$$



Etat initial

Cubes arêtes mal placés
cubes sommets bien placés

$$\left(\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12\\10&11&8&6&12&4&9&3&7&1&2&5\end{pmatrix}; e\right)$$



Etat initial

Tout est bien placé (mais mal orienté)

$$(e\,;e)$$

LE COUPLE (s_1, s_2) NE DÉPEND QUE DE c. ON NOTE $\delta(c) = (s_1, s_2)$

ON PEUT REMARQUER QUE : $\delta(c.c') = (s_1, s_2).(s'_1, s'_2)$

$$= \delta(c) \,.\, \delta(c')$$

MORPHISME DE GROUPE

LE PROCÉDÉ δ PRÉCÉDENT EST UN CAS PARTICULIER D'UNE NOTION FONDAMENTALE :

> SI G ET H SONT DEUX GROUPES, ON DIRA QU'ON A UN MORPHISME α DE G DANS H SI À TOUT ÉLÉMENT g DE G, ON SAIT ASSOCIER UN ÉLÉMENT $\alpha(g)$ DE H SORTE QUE L'ON AIT :
>
> $$\alpha(g.g') = \alpha(g) \,.\, \alpha(g')$$
>
> ON NOTERA : $G \xrightarrow{\alpha} H$

IMAGE ET NOYAU

α DONNE UNE "PHOTO" DE G DANS H. L'IMAGE DE G PAR α, $I(\alpha)$ EST CONSTITUÉE DES ÉLÉMENTS DE H ASSOCIÉS PAR α À CEUX DE G ; $I(\alpha)$ EST UN GROUPE.

LA PHOTO EST DITE FIDELE SI DEUX ÉLÉMENTS DISTINCTS DE G SONT DIFFERENCIES PAR α. IL Y A DES PHOTOS NON FIDELES (δ EST UN MORPHISME "NON FIDÈLE", VOIR DERNIÈRE PHOTO).

ON MESURE L'ÉTENDUE DES DÉGÂTS (OU LA DÉFINITION DE LA PHOTO) EN REGARDANT TOUS LES ÉLÉMENTS DE G DONT L'IMAGE PAR α EST e ; ON APPELLE CET ENSEMBLE NOYAU DE α, ON LE NOTE $N(\alpha)$. α EST FIDÈLE SI (ET SEULEMENT SI) $N(\alpha) = \{e\}$.

AUTRES EXEMPLES UTILES

. SIGNATURE D'UNE PERMUTATION

LES NOMBRES (-1) ET 1 AVEC LA MULTIPLICATION, CONSTITUENT UN GROUPE

NOTÉ $\{-1;1\}$.

$\varepsilon : S_N \longrightarrow \{-1;1\}$ (SIGNATURE DE LA PERMUTATION s)

$s \longmapsto \varepsilon(s) = (-1)^N$ OÙ N EST LE NOMBRE DE COUPLES DONT L'ORDRE A ÉTÉ INVERSÉ PAR s. (N EST LE NOMBRE DE COUPLES (i,j) TELS QUE $i < j$ ET $s(i) > s(j)$)

ε EST UN MORPHISME (PAR AILLEURS NON FIDÈLE)

UNE PERMUTATION DU TYPE $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ EST APPELÉE UN CYCLE DE LONGUEUR 4 ; SA SIGNATURE EST $(-1)^{4+1} = (-1)$.

. ISOMÉTRIES DU TRIANGLE ET PERMUTATIONS

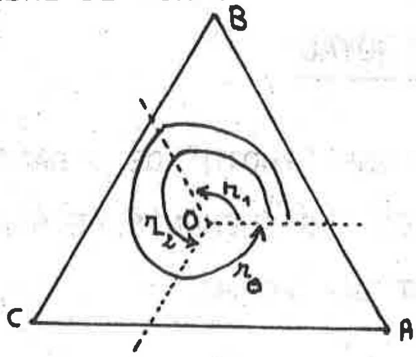
ON REGARDE LES APPLICATIONS DU PLAN DANS LE PLAN LAISSANT INVARIANT UN TRIANGLE ÉQUILATÉRAL ; ELLES SONT AU NOMBRE DE SIX :

3 ROTATIONS AUTOUR DU CENTRE O DU TRIANGLE

r_1 : ROTATION DE 120° (1 TIERS DE TOUR)

r_2 : ROTATION DE 240° (2 TIERS DE TOUR)

r_0 : ROTATION DE 360° (1 TOUR COMPLET)

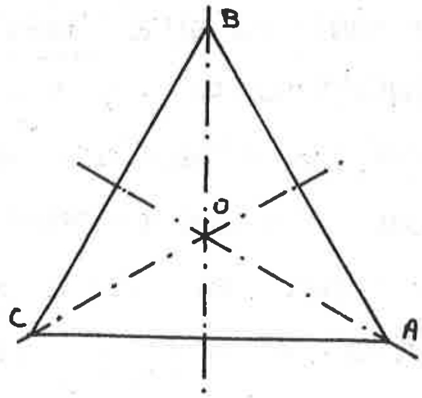


3 SYMÉTRIES

r_3 : PAR RAPPORT À OA

r_4 : PAR RAPPORT À OB

r_5 : PAR RAPPORT À OC



$\{r_0; r_1; r_2; r_3; r_4; r_5\}$ MUNI DE LA COMPOSITION EST UN GROUPE D'ÉLÉMENT NEUTRE r_0.

SI À CHAQUE APPLICATION DE CET ENSEMBLE NOUS FAISONS CORRESPONDRE LA PERMUTATION DONNÉE PAR L'IMAGE DES SOMMETS, A,B ET C , NOUS CONS-

TRUISONS ALORS UN MORPHISME, D'IMAGE FIDÈLE ($_0$ SEUL ÉLÉMENT DU NOYAU)

$r_1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ r_1 TRANSFORME A EN B B EN C, C EN A $r_3 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$r_2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ r_2 TRANSFORME A EN C B EN A, C EN B $r_4 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$r_0 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $r_5 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Le taquin

CE JEU COMPOSÉ DE 15 CARRÉS NUMÉROTÉS ET D'UN TROU, FUT LORS DE SON INVENTION, L'OBJET D'UNE CAMPAGNE PUBLICITAIRE. IL ÉTAIT OFFERT 10.000$ À CELUI QUI, EN RESPECTANT LES RÈGLES DU JEU, ARRIVERAIT À LA CONFIGURATION SUIVANTE :

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

MONTRONS À L'AIDE DE LA SIGNATURE QU'IL EST IMPOSSIBLE D'ARRIVER À CE RÉSULTAT.

CHAQUE TRANSFORMATION DU TAQUIN CORRESPOND À UNE PERMUTATION DE S_{15} (ON REGARDE QUEL CHIFFRE ON A À LA FIN DE LA TRANSFORMATION PAR RAPPORT À L'ÉTAT DE DÉPART). SI ON ADMET QUE L'ON TERMINE CHAQUE TRANSFORMATION EN REMETTANT LE TROU EN BAS À DROITE, TOUTE PERMUTATION DE S_{15} PEUT ÊTRE ÉCRITE COMME UNE PERMUTATION DE S_{16} .

EXEMPLE : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & 14 & 15 & 16 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \dots & \sigma(14) & \sigma(15) & 16 \end{pmatrix}$

NOUS VOYONS QUE CHAQUE DÉPLACEMENT ÉLÉMENTAIRE DU TROU DÉFINIT UNE TRANSPOSITION DE S_{16} (SEULEMENT DEUX ÉLÉMENTS PERMUTÉS) ET TOUTE TRANSFORMATION S'ÉCRIT COMME "PRODUIT" DE CES DÉPLACEMENTS ÉLÉMENTAIRES.

ε ETANT UN MORPHISME, LA SIGNATURE DE LA PERMUTATION DÉFINIE PAR NOTRE TRANSFORMATION EST $(-1)^{\text{LONGUEUR DU CHEMIN DU TROU}}$.

COMME LE TROU REVIENT À SA PLACE, LE CHEMIN EST DE LONGUEUR PAIRE.

$$\boxed{\text{TOUTES NOS TRANSFORMATIONS SONT ASSOCIEES A DES PERMUTATIONS DE SIGNATURE +1}}$$

OR LA TRANSFORMATION DESSINÉE PLUS HAUT EST ASSOCIÉE À UNE PERMUTATION DE SIGNATURE -1. ELLE EST DONC IMPOSSIBLE À RÉALISER.

Etude du noyau

RAPPELONS QUE SI $\alpha : G \longrightarrow H$ EST UN MORPHISME, LE NOYAU DE α $N(\alpha)$ EST L'ENSEMBLE DES ÉLÉMENTS DE G DONT L'IMAGE PAR α EST L'ÉLÉMENT NEUTRE DE H.

$N(\alpha)$ A DES PROPRIÉTÉS PARTICULIÈRES :

- SI x ET y SONT DES ÉLÉMENTS DE $N(\alpha)$, ALORS x^{-1} ET $x.y$ SONT AUSSI DES ÉLÉMENTS DE $N(\alpha)$.
- SI x EST UN ÉLÉMENT DE $N(\alpha)$ ET y UN ÉLÉMENT QUELCONQUE DE G, ALORS $y.x.y^{-1}$ EST UN ÉLÉMENT DE $N(\alpha)$.

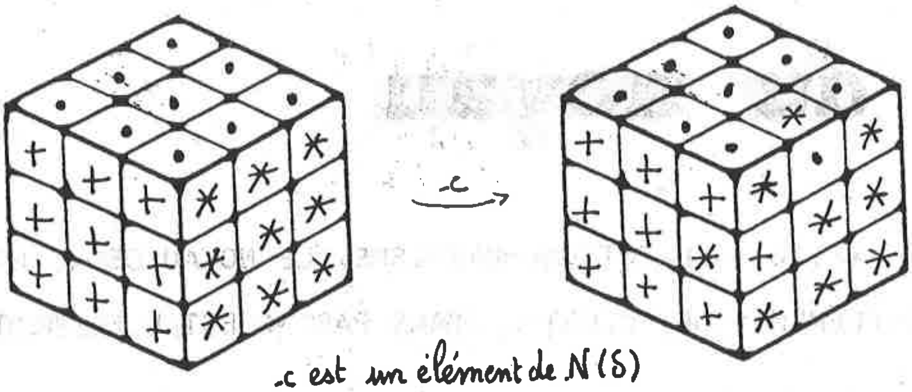
UNE PARTIE DE G AYANT CES PROPRIÉTÉS EST APPELÉE SOUS GROUPE NORMAL DE G. $N(\alpha)$ EST UN SOUS GROUPE NORMAL DE G.

UN SOUS-GROUPE NORMAL EST TOUJOURS LE NOYAU D'UN MORPHISME :

- CONSIDÉRONS UN SOUS-GROUPE NORMAL N DE G, LES PARTIES $g.N$ (LES ÉLÉMENTS DE $g.N$ SONT LES PRODUITS DE g PAR CHAQUE ÉLÉMENT DE N) SONT LES ÉLÉMENTS D'UN NOUVEL ENSEMBLE G/N ; G/N EST UN GROUPE POUR LE PRODUIT : $g.N \, . \, g'.N = g.g'.N$ L'ÉLÉMENT NEUTRE DE CE GROUPE EST $e.N = N$. EN POSANT $\alpha(g) = g.N$, ON DÉFINIT UN MORPHISME $\alpha : G \longrightarrow G/N$; DE NOYAU $N(\alpha) = N$ ET L'IMAGE $I(\alpha)$ EST G/N.

EXEMPLES :

1. G LUI MÊME EST UN NOYAU ; C'EST LE NOYAU DU MORPHISME TRIVIAL :
   $\alpha : G \longrightarrow \{1\} \quad , \quad \alpha(g) = 1$
2. e TOUT SEUL EST UN NOYAU : C'EST LE NOYAU DU MORPHISME : IDENTITÉ
   $\alpha : G \longrightarrow G \quad , \quad \alpha(g) = g$
3. LE NOYAU DU MORPHISME δ : $N(\delta)$; C'EST L'ENSEMBLE DES TRANSFORMATIONS DU CUBE QUI LAISSE CHAQUE PETIT CUBE À SA PLACE (LEURS ORIENTATIONS PEUVENT ÊTRE MODIFIÉES).



-c est un élément de N(S)

4. A_N ON NOTERA A_N LE NOYAU DU MORPHISME $\varepsilon : S_N \to \{-1,1\}$.
A_N EST L'ENSEMBLE DES PERMUTATIONS "PAIRES" $\varepsilon(s) = 1$. COMME IL Y EN A AUTANT QUE L'IMPAIRES, A_N A : $N(N-1) \times \ldots \times 3$ ÉLÉMENTS.

GROUPE SIMPLE

TOUT GROUPE G ADMET G ET $\{e\}$ COMME SOUS-GROUPE NORMAUX : S'IL N'EN A PAS D'AUTRES, ET SI G N'EST PAS LE GROUPE $\{1\}$; ON DIRA QUE G EST SIMPLE :

EXEMPLES :

1. $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$; $\mathbb{Z}_3$ SONT SIMPLES.

2. A_N EST SIMPLE SI $N > 4$.

LES MATHEMATICIENS PENSENT MAINTENANT AVOIR DETERMINE

TOUS LES GROUPES FINIS SIMPLES (SEMINAIRE

N. BOURBAKI, NOV.81 EXPOSÉ N°584).

A_n est simple $[n>4]$

LE CALCUL DE ε.

RAPPELONS QUE LE CYCLE DE LONGUEUR M QUE NOUS NOTERONS $(a_1, a_2, \dots, a_M)$ EST L'ÉLÉMENT DE S_N :

$$(a_1, a_2, \dots, a_M) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots a_1 \dots & a_2 \dots & a_M \dots \\ \dots & & a_2 \dots & a_3 \dots & a_1 \dots \end{pmatrix}$$

SA SIGNATURE EST $\varepsilon((a_1, a_2, \dots, a_M)) = (-1)^{M+1}$

TOUTE PERMUTATION s DE S_N EST UN PRODUIT DE CYCLE "DISJOINTS".

PAR EXEMPLE :

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 8 & 7 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (1,3,8,5)(2,4,7)$$

(LE PRODUIT PEUT ÊTRE EFFECTUÉ DANS N'IMPORTE QUEL ORDRE). SI s EST UN ÉLÉMENT DE S_N, NOUS NOTERONS :

$$s = s_1 s_2 \dots s_K$$

SA DÉCOMPOSITION EN PRODUIT DE CYCLES DE LONGUEURS $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_K$.

ALORS $\varepsilon(s) = \varepsilon(s_1) \times \dots \times \varepsilon(s_K) = (-1)^{r_1+1} \times (-1)^{r_2+1} \times \dots \times (-1)^{r_K+1}$.

SOIT H UN SOUS-GROUPE NORMAL DE A_N DIFFÉRENT DE $\{e\}$ ET s UN ÉLÉMENT DE H DISTINCT DE e,

$$s = s_1 s_2 \dots s_K \qquad (K \geq 1)$$

EST SA DÉCOMPOSITION EN PRODUIT DE CYCLE DISJOINTS.

1ER CAS : $s_1=(a_1,a_2,\dots,a_m)$ ET $m>3$

POSONS $t=(a_1,a_2,a_3)$, $u=(a_2,a_3)(a_3,b)$.

CE SONT DES ELEMENTS DE A_N ET : $u^{-1}s^{-1}t^{-1}stu=(a_2,a_3,b)$

UN ÉLÉMENT DE H. ON DONNE À b TOUTES LES VALEURS DE 1 À N SAUF a_2 ET a_3 , CHAQUE ELEMENT DE A_N EST UN PRODUIT DES CYCLES (a_2,a_3,b) QUE L'ON A TROUVÉS. $A_N=H$.

2È CAS : $s_1=(a_1,a_2,a_3)$ ET $s_2=(a_4,a_5,a_6)$

POSONS $t=(a_2,a_3,a_4)$; t EST UN ÉLÉMENT DE A_N ET

$s^{-1}t^{-1}st=(a_1,a_6,a_2,a_3,a_4)$ EST UN ÉLÉMENT DE H. ON EST RAMENÉ AU CAS PRÉCÉDENT. $A_N=H$.

3E CAS : $s_1=(a_1,a_2,a_3)$ ET TOUS LES AUTRES s_i (S'IL Y EN A) SONT DE LONGUEUR 2.

POSONS $u=(a_2,a_3)(a_2,b)$. u EST UN ÉLÉMENT DE A_N ET

$u^{-1}s^2u=(a_1,a_3,b)$ EST UN ÉLÉMENT DE H. ON FINIT LA DÉMONSTRATION COMME DANS LE PREMIER CAS. $A_N=H$.

4E CAS : $s_1,s_2,\dots,s_k$ SONT TOUS DE LONGUEUR 2.

k EST ALORS PAIR DONC PLUS GRAND QUE 1. SI $s_1=(a_1,a_2)$ ET $s_2=(a_3,a_4)$, ON POSE $t=(a_2,a_3,a_4)$ ET $u=(a_1,a_4,a_5)$

t ET u SONT DES ÉLÉMENTS DE A_N ET $u^{-1}t^{-1}stsu=(a_1,a_5,a_4)$ EST UN ÉLÉMENT DE H. ON EST RAMENÉ AU CAS PRÉCÉDENT. $A_N=H$.

DANS TOUS LES CAS $H=A_N$.

A_N EST SIMPLE.

REMARQUE : $A_1=A_2=\{1\}$ N'EST PAS SIMPLE, $A_3=\mathbb{Z}_3$ EST SIMPLE, A_4 N'EST PAS SIMPLE.

Dévissage d'un groupe

Méthode de Jordan et Hölder

TOUS LES GROUPES NE SONT PAS SIMPLES

EXEMPLES :

- $\varepsilon : S_N \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ $\quad N \geqslant 2$, S_N N'EST PAS SIMPLE
- $\delta : C \longrightarrow S_{12} \times S_8$ $\quad C$ N'EST PAS SIMPLE

$N(\delta) \neq \{e\}$

UN GROUPE QUI N'EST PAS SIMPLE EST "FABRIQUÉ" À PARTIR DE GROUPES SIMPLES.

SI G N'EST PAS SIMPLE, ON CHOISIT UN SOUS-GROUPE NORMAL "MAXIMAL" H_1 DE G. C'EST LE NOYAU D'UN MORPHISME .

$G_1 = I(\alpha)$ EST SIMPLE

SI β EST UN MORPHISME DE G_1, $\beta \circ \alpha$ EST UN MORPHISME DE G DE NOYAU H_1 OU G (CAR H_1 EST MAXIMAL) EST FIDÈLE OU TRIVIAL.

ON RECOMMENCE AVEC H_1

$$\begin{array}{lll} H_1 \subset G & & \\ \quad\downarrow & & \\ \quad G_1 = G/H_1 & & G_1 \text{ SIMPLE} \end{array}$$

SI H_1 N'EST PAS SIMPLE :

$$\begin{array}{lll} H_2 \subset H_1 \subset G & & \\ \quad\downarrow \qquad\; \downarrow & & \\ \quad G_2 = H_1/H_2 \;\; G_1 & & G_1, G_2 \text{ SIMPLES} \end{array}$$

ON FINIT PAR ARRIVER SUR $\{e\}$:

$$\begin{array}{lllll} \{e\} = H_N \subset H_{N-1} \quad \ldots \subset H_2 \subset H_1 \subset G & & & & G_1, G_2, \ldots, G_N \\ \qquad\quad\;\downarrow \qquad\qquad\qquad\; \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow & & & & \text{SIMPLES} \\ \qquad\quad G_N = H_{N-1}/H_N \qquad G_3 \quad G_2 \quad G_1 & & & & \end{array}$$

THEOREME DE JORDAN ET HÖLDER

LA SUITE $G_1, G_2, \ldots, G_N$ EST CARACTÉRISTIQUE DE G.

CETTE SUITE SERA APPELÉE <u>SUITE DE J.H. DE G.</u>

<u>A T T E N T I O N</u> ! LA SUITE EST CARACTÉRISTIQUE, PAS L'ORDRE DE SES TERMES.

<u>EXEMPLES</u> :

G_1, G_2 SIMPLES $\qquad G = G_1 \times G_2$

$$\begin{tikzcd} \{e\} \arrow[r, phantom, "\subset"] & G_1 \arrow[r, phantom, "\subset"] & G = G_1 \times G_2 \\ G_1 & G_2 & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \{e\} \arrow[r, phantom, "\subset"] & G_2 \arrow[r, phantom, "\subset"] & G = G_1 \times G_2 \\ G_2 & G_1 & \end{tikzcd}$$

SONT LES SUITES DE J.H DE G.

SI ON A UN MORPHISME $\alpha : G \longrightarrow H$, LA SUITE DE J.H. DE G EST OBTENUE EN JUXTAPOSANT CELLE DE $I(\alpha)$ ET CELLE DE $N(\alpha)$, CAR ON PEUT CHOISIR LES H_i TELS QUE L'UN D'ENTRE EUX SOIT $N(\alpha)$.

SUITES DE JORDAN-HÖLDER

de $\mathbb{Z}_{30}$

$$\begin{array}{ccccccc}
\{r_0\} & & \{r_0, r_{15}\} & & \left\{\begin{array}{l} r_0, r_5, r_{10} \\ r_{15}, r_{20}, r_{25} \end{array}\right\} & & \{r_0, \dots, r_{29}\} \\
\{e\} & \subset & \mathbb{Z}_2 & \subset & \mathbb{Z}_6 & \subset & \mathbb{Z}_{30} \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& \mathbb{Z}_2 & & \mathbb{Z}_3 & & \mathbb{Z}_5 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\{r_0\} & & \{r_0, r_{15}\} & & \left\{\begin{array}{l} r_0, r_3, r_6, r_9, r_{12} \\ r_{15}, r_{18}, r_{21}, r_{24}, r_{27} \end{array}\right\} & & \{r_0, \dots, r_{29}\} \\
\{e\} & \subset & \mathbb{Z}_2 & \subset & \mathbb{Z}_{10} & \subset & \mathbb{Z}_{30} \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& \mathbb{Z}_2 & & \mathbb{Z}_5 & & \mathbb{Z}_3 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\{r_0\} & & \{r_0, r_{10}, r_{20}\} & & \left\{\begin{array}{l} r_0, r_5, r_{10} \\ r_{15}, r_{20}, r_{25} \end{array}\right\} & & \{r_0, \dots, r_{29}\} \\
\{e\} & \subset & \mathbb{Z}_3 & \subset & \mathbb{Z}_6 & \subset & \mathbb{Z}_{30} \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& \mathbb{Z}_3 & & \mathbb{Z}_2 & & \mathbb{Z}_5 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\{r_0\} & & \{r_0, r_{10}, r_{20}\} & & \left\{\begin{array}{l} r_2, r_4, r_6, r_8, r_{10}, r_{12}, r_{14} \\ r_0 \; r_{16}, r_{18}, r_{20}, r_{22}, r_{24}, r_{26}, r_{28} \end{array}\right\} & & \{r_0, \dots, r_{29}\} \\
\{e\} & \subset & \mathbb{Z}_3 & \subset & \mathbb{Z}_{15} & \subset & \mathbb{Z}_{30} \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& \mathbb{Z}_3 & & \mathbb{Z}_5 & & \mathbb{Z}_2 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\{r_0\} & & \left\{\begin{array}{l} r_0, r_6, r_{12} \\ r_{18}, r_{24} \end{array}\right\} & & \left\{\begin{array}{l} r_0, r_3, r_6, r_9, r_{12} \\ r_{15}, r_{18}, r_{21}, r_{24}, r_{27} \end{array}\right\} & & \{r_0, \dots, r_{29}\} \\
\{e\} & \subset & \mathbb{Z}_5 & \subset & \mathbb{Z}_{10} & \subset & \mathbb{Z}_{30} \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& \mathbb{Z}_5 & & \mathbb{Z}_2 & & \mathbb{Z}_3 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\{r_0\} & & \left\{\begin{array}{l} r_0, r_6, r_{12} \\ r_{18}, r_{24} \end{array}\right\} & & \left\{\begin{array}{l} r_2, r_4, r_6, r_8, r_{10}, r_{12}, r_{14} \\ r_0 \; r_{16}, r_{18}, r_{20}, r_{22}, r_{24}, r_{26}, r_{28} \end{array}\right\} & & \{r_0, \dots, r_{29}\} \\
\{e\} & \subset & \mathbb{Z}_5 & \subset & \mathbb{Z}_{15} & \subset & \mathbb{Z}_{30} \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& \mathbb{Z}_5 & & \mathbb{Z}_3 & & \mathbb{Z}_2 &
\end{array}$$

Le Groupe Du Cube

$\boxed{\underline{1/\ I(\delta)}}$

$$C \xrightarrow{\delta} S_{12} \times S_8$$

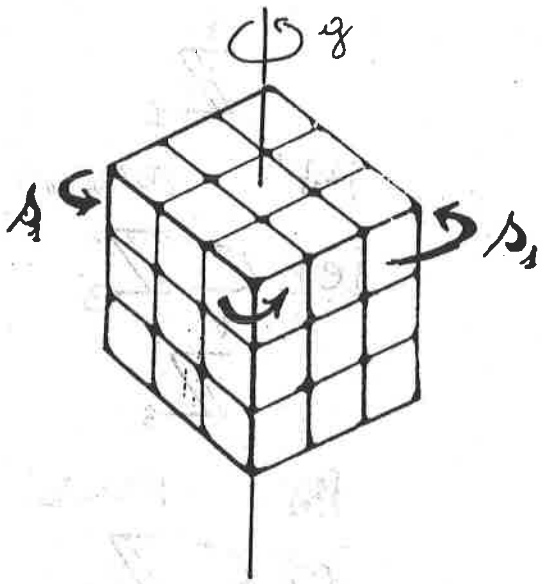
LE MORPHISME γ :

$$S_{12} \times S_8 \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}_2 = \{-1,1\}$$

DEFINI PAR : $\gamma(s_1, s_2) = \varepsilon(s_1).\ \varepsilon(s_2)$

<u>I(δ) EST DANS N(γ) :</u>

- SI g EST LA TRANSFORMATION : "ROTATION D'UNE FACE D'UN QUART DE TOUR



$$\delta(g) = (s_1, s_2)$$

s_1 CYCLE D'ORDRE 4 : $\varepsilon(s_1) = -1$

s_2 CYCLE D'ORDRE 4 : $\varepsilon(s_2) = -1$

$\gamma(\delta(g)) = 1$

- SI g EST UNE TRANSFORMATION QUELCONQUE, $g = g_1 g_2 \cdots g_n$ OÙ $g_1, g_2, \ldots, g_n$ SONT DES ROTATIONS D'UN QUART DE TOUR DE FACES

$$\gamma(\delta(g)) = \gamma(\delta(g_1 g_2 \cdots g_n)) = \gamma(\delta(g_1)\delta(g_2)\cdots\delta(g_n))$$
$$= \gamma(\delta(g_1)).\ \gamma(\delta(g_2))\cdots\gamma(\delta(g_n)) = 1$$

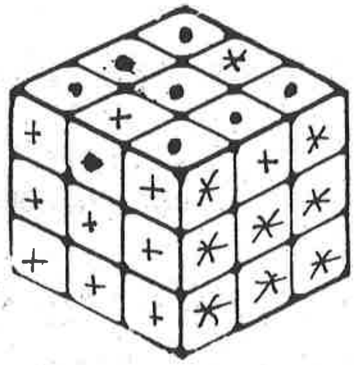
DONC $\delta(g)$ EST ELEMENT DE N(γ).

$N(\gamma)$ EST DANS $I(\delta)$

SI (s_1, s_2) EST ÉLÉMENT DE $N(\gamma)$, $\gamma(s_1, s_2) = \varepsilon(s_1)\,\varepsilon(s_2) = 1$

$$\varepsilon(s_1) = \varepsilon(s_2)$$

- 1ER CAS : $\varepsilon(s_1) = \varepsilon(s_2) = 1.$



s_1 ÉLÉMENT DE A_{12}, s_2 DE A_8.

- ON PEUT EXHIBER UNE TRANSFORMATION g DE C, CYCLE D'ORDRE 3 SUR 3 CUBES ARÊTES SUPÉRIEURS, LES CUBES SOMMETS RESTANT EN PLACE.

PAR COMPOSITION ON TROUVE TOUS LES (s_1, e), s_1 ÉLÉMENT DE A_{12}.
DE MÊME, ON EXHIBE TOUS LES (e, s_2), s_2 ÉLÉMENT DE A_8.

$(s_1, s_2) = (s_1, e)(e, s_2)$ ET $A_{12} \times A_8$ EST DANS $I(\delta)$.

- 2E CAS : $\varepsilon(s_1) = \varepsilon(s_2) = -1.$

SI g EST UNE ROTATION D'1/4 DE TOUR D'UNE FACE ET $\delta(g) = (t_1, t_2)$
ALORS : $\varepsilon(t_1) = \varepsilon(t_2) = -1.$

$(s_1 t_1, s_2 t_2)$ EST ELEMENT DE $A_{12} \times A_8$ ET ON A TROUVÉ h DE C

TEL QUE $\delta(h) = (s_1 t_1, s_2 t_2)$. $(s_1, s_2) = \delta(hg^{-1})$

$N(\gamma)$ EST DONC IDENTIQUE À $I(\delta)$.

LA SUITE DE JORDAN - HÖLDER DE $I(\mathcal{S})$ EST :

$$A_{12}\ ,\ A_8,\ \mathbb{Z}_2$$

SOIT $I(\mathcal{S}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}_2$, $\mathcal{E}(s_1 . s_2) = \mathcal{E}(s_1)$

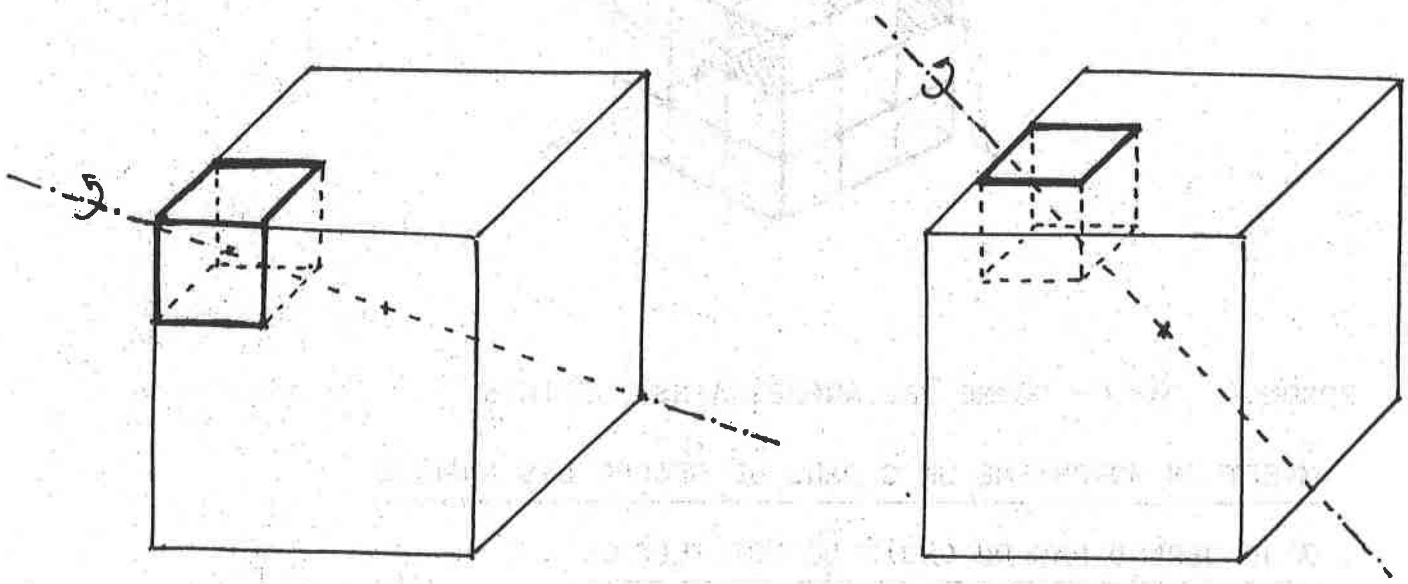
- $\mathcal{E}$ EST UN MORPHISME
- $N(\mathcal{E}) = A_{12} \times A_8$ EST MAXIMAL
- $I(\mathcal{E}) = \mathbb{Z}_2$
- A_{12} ET A_8 SONT SIMPLES

$$\begin{array}{ccccccc}\{e\} & \subset & A_{12} & \subset & A_{12} \times A_8 & \subset & I(\mathcal{S}) \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & A_{12} & & A_8 & & \mathbb{Z}_2 & \end{array}$$

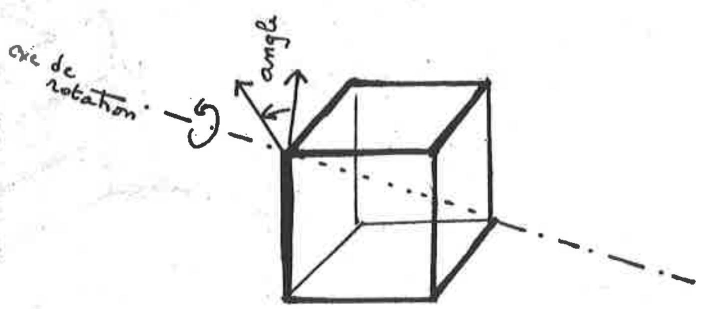
EST UNE SUITE DE JORDAN - HÖLDER DE $I(\mathcal{S})$.

2/ N(δ)

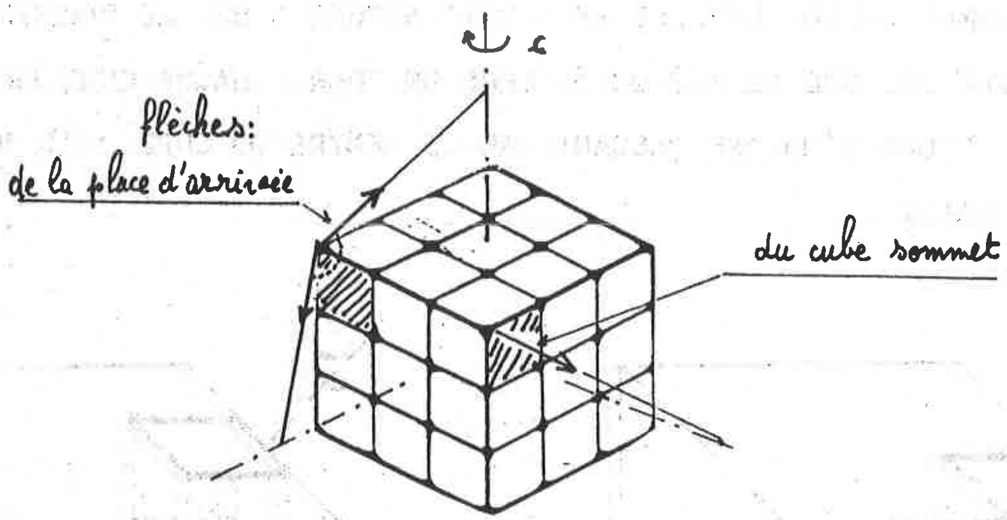
SI ON APPLIQUE UN ÉLÉMENT DE N(δ) À UN ÉTAT DU CUBE, CHAQUE CUBE SOMMET RESTE EN PLACE ET PIVOTE AUTOUR D'UN AXE PASSANT PAR LE CENTRE DU CUBE DE 1,2 OU 3 TIERS DE TOUR. CHAQUE CUBE ARÊTE PIVOTE AUTOUR D'UN AXE PASSANT PAR LE CENTRE DU CUBE DE 1 OU 2 DEMI-TOUR(S).



POUR MESURER CES ROTATIONS, ON FIXE UN REPÈRE FORMÉ D'UNE FLÈCHE PERPENDICULAIRE À L'AXE DE ROTATION SUR LE PETIT CUBE. LA TRANSFORMATION FAIT TOURNER CETTE FLÈCHE D'UN CERTAIN ANGLE.



FAISONS CELA POUR CHAQUE CUBE SOMMET. UNE TRANSFORMATION QUELCONQUE c DE C ENVOIE LES CUBES SOMMETS SUR EUX-MÊMES DONC TRANSPORTE NOS FLÈCHES SUR DES FLÈCHES QUI FONT UN CERTAIN ANGLE AVEC CELLES ATTACHÉES AUX PLACES D'ARRIVÉES



POSONS : $\alpha(c)$ = SOMME DES ANGLES AINSI DÉFINIS.

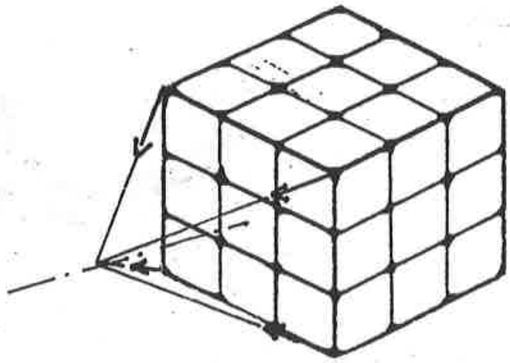
. α EST UN MORPHISME DE C DANS LE GROUPE DES ANGLES

. α NE DÉPEND PAS DU CHOIX DE NOS FLÈCHES :

MODIFIER UNE FLÈCHE AUGMENTE UN DES ANGLES ET DIMINUE DE LA MÊME QUANTITÉ UN AUTRE.

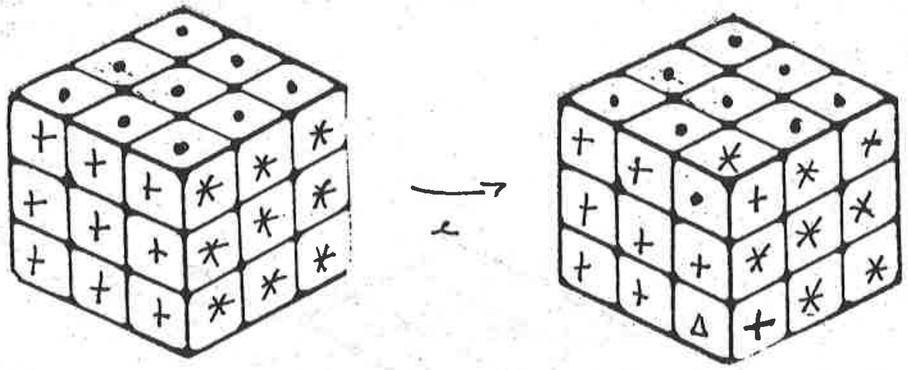
. SI c EST UN QUART DE TOUR D'UNE FACE, $\alpha(c) = 0$.

IL SUFFIT DE CHOISIR LES QUATRE FLÈCHES QUI TOURNENT POINTANT VERS L'AXE DE ROTATION DE c .



DONC α EST LE MORPHISME TRIVIAL.

SI ON CHOISIT UN CUBE SOMMET, L'ORIENTATION DE CE CUBE EST IMPOSÉE PAR CELLE DES 7 AUTRES. MAIS ON CONNAIT UN c DE $N(\delta)$ QUI FAIT PIVOTER DEUX CUBES SOMMETS ADJACENTS ET QUI NE MODIFIE PAS LES CUBES ARÊTES.



ON PEUT DONC DE PROCHE EN PROCHE AMENER CES 7 CUBES COMMETS DANS UNE ORIENTATION QUELCONQUE, EN RESTANT DANS $N(\delta)$, ET EN LAISSANT LES 12 CUBES ARÊTES BIEN ORIENTÉS.

POUR LES CUBES ARÊTES, IL SE PASSE EXACTEMENT LA MÊME CHOSE ; ON ATTEINT AINSI TOUT $N(\delta)$ ET DONC :

$$N(\delta) = \underbrace{\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \ldots \times \mathbb{Z}_3}_{7\ fois} \times \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2}_{11\ fois}$$

LA SUITE DE JORDAN - HOLDER DE $\mathcal{C}$ EST

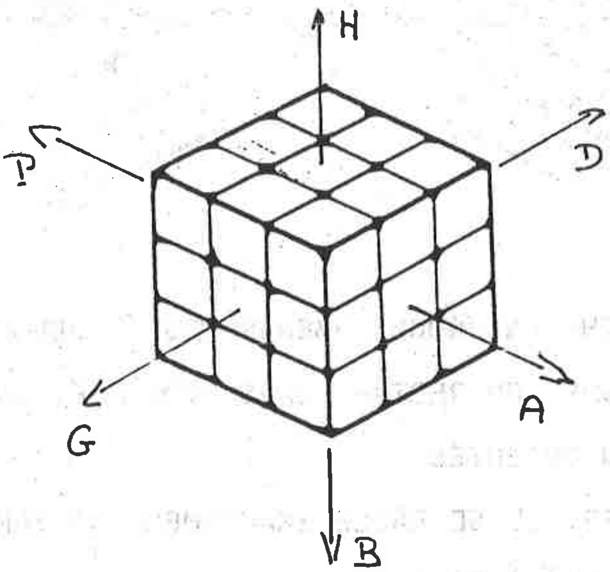
$$\underbrace{\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3, \ldots, \mathbb{Z}_3}_{7\ fois}, \underbrace{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2, \ldots, \mathbb{Z}_2}_{12\ fois}, A_{12}, A_8$$

$\mathcal{C}$ A DONC : 43.252.003.274.489.856.000 ÉLÉMENTS

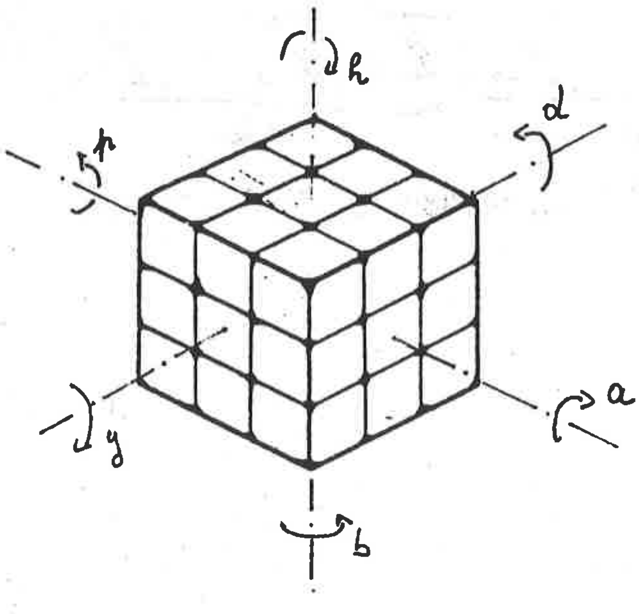
REMONTAGE

POUR PARLER LA MEME LANGUE

LES LETTRES CAPITALES (H,D,A,B,G,P) DÉSIGNENT LES FACES (HAUTE , DROITE, ANTÉRIEURE.......).



LES LETTRES MINUSCULES (h, d, a, b, g, p) DÉSIGNENT LES ROTATIONS D'UN QUART DE TOUR DES FACES (H,D,A,B,G,P) DANS LE SENS DES AIGUILLES D'UNE MONTRE (EN "VISSANT" LA FACE DANS LE CUBE).



REMONTAGE

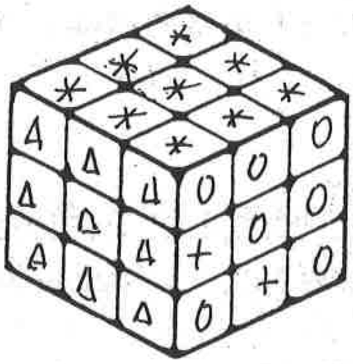
TROIS MANOEUVRES À CONNAITRE

MANOEUVRE "DES 6"

$K = b^2 g^2 b^2 g^2 b^2 g^2$

EFFET SUR L'ÉTAT INITIAL

NOTE : $K^2 = e$

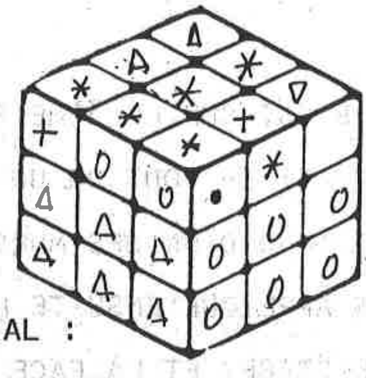


PIVOTEMENT DES CUBES ARÊTES

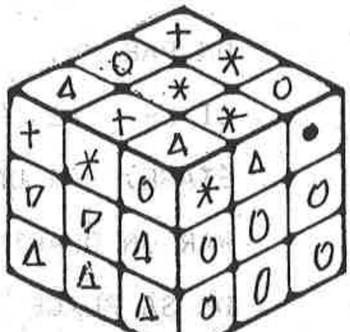
$L = p^{-1} g^{-1} h^{-1} g h p$

EFFET SUR L'ÉTAT INITIAL :

NOTE : $L^6 = e$



L



L^2

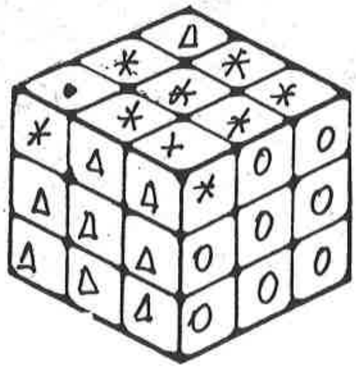
L FAIT PIVOTER LES CUBES ARÊTES, MAIS ELLE LES PERMUTE, AINSI QUE LES CUBES SOMMETS DE LA FACE H

MANOEUVRE DES COINS

$M = g h^{-1} d^{-1} h g^{-1} h^{-1} d h$

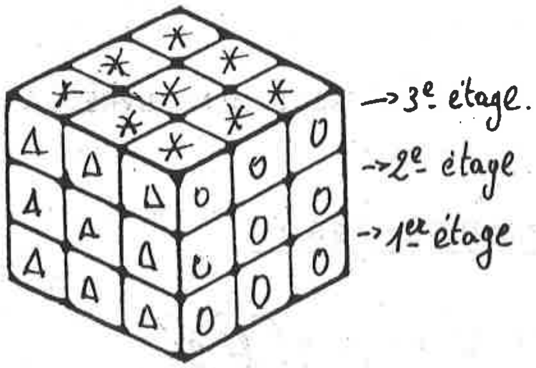
EFFET SUR L'ÉTAT INITIAL :

NOTE : $M^3 = e$



LES TROIS CUBES COMMETS DE LA FACE H TOURNENT ET PIVOTENT AUTOUR DU CUBE SOMMET HDA, QUI LUI NE BOUGE PAS.

LA METHODE INDIQUEE REMONTE LE CUBE PAR ETAGES



1ÈRE PHASE : 1ER ÉTAGE

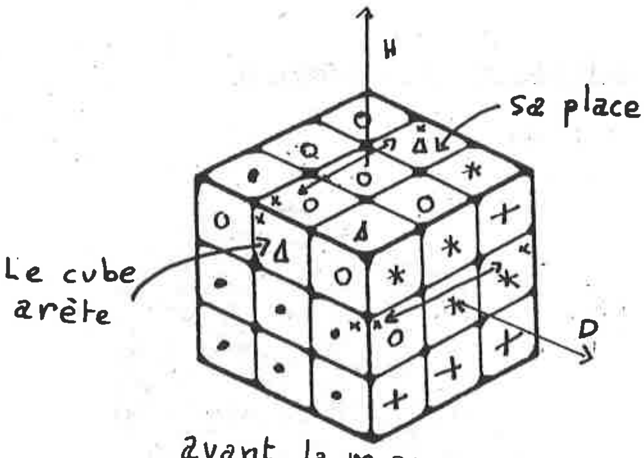
SUPPOSONS QUE VOUS SAVEZ LE FAIRE ET N'INSISTONS PAS

2ÈME PHASE : 2ÈME ÉTAGE

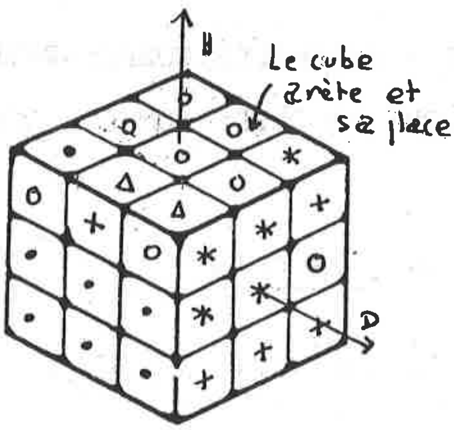
ON APPLIQUE LA MANOEUVRE DES 6

ON REMONTE LES 4 CUBES ARÊTES QUI CONSTITUENT LE DEUXIÈME ÉTAGE UN PAR UN.

SI LE CUBE ARÊTE EST SUR LE 3ÈME ÉTAGE, ON LE PLACE SUR LE 2ÈME ÉTAGE, PAR UN QUART DE TOUT OU UN DEMI-TOUR DU 3ÈME ÉTAGE, PUIS PAR UN QUART DE TOUR D'UN DES MURS, DE FAÇON QU'IL SOIT EN FACE DE SA PLACE. ON APPLIQUE ENSUITE LA MANOEUVRE DES 6, LA FACE D ÉTANT LE 3ÈME ÉTAGE, ET LA FACE H ÉTANT CELLE DÉTERMINÉE PAR LE CUBE ARÊTE ET SA PLACE.



avant la manœuvre des 6



après la manœuvre

ON REVIENT ENSUITE À LA POSITION ANTÉRIEURE, ET LE CUBE EST EN PLACE.

SINON, PAR LA MÊME MANOEUVRE, ON L'ENVOIE DU 2ÈME ÉTAGE AU 3ÈME, ET ON EST RAMENÉ AU CAS PRÉCÉDENT.

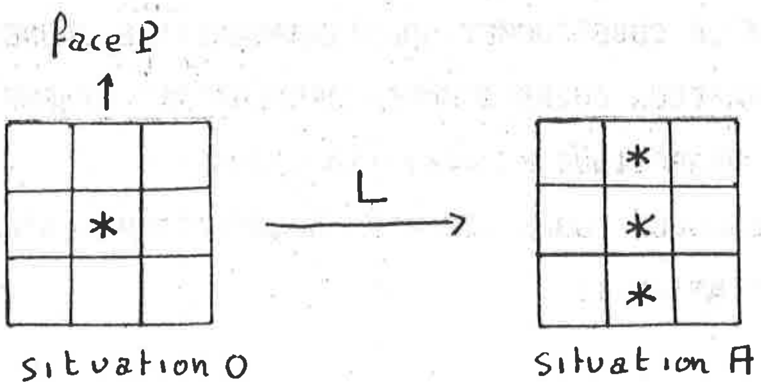
REMARQUE IMPORTANTE : QUELQUEFOIS, EN REMETTANT UN CUBE ARÊTE SUR LE 2ÈME ÉTAGE, ON EN ENVOIE UN DÉJÀ EN PLACE AU 3ÈME ÉTAGE. CE DANGER PEUT ÊTRE ÉVITÉ EN FAISANT SUBIR AU 3ÈME ÉTAGE, JUSTE AVANT LA MANOEUVRE DES 6, UN QUART DE TOUR (À CONDITION JUSTE APRÈS LA MANOEUVRE DES 6, DE FAIRE LA MANOEUVRE INVERSE).

A PARTIR DE MAINTENANT, H EST LE 3ÈME ETAGE, ON LE CHOISIT JAUNE POUR FIXER LES IDEES.

3ÈME PHASE : LA CROIX JAUNE

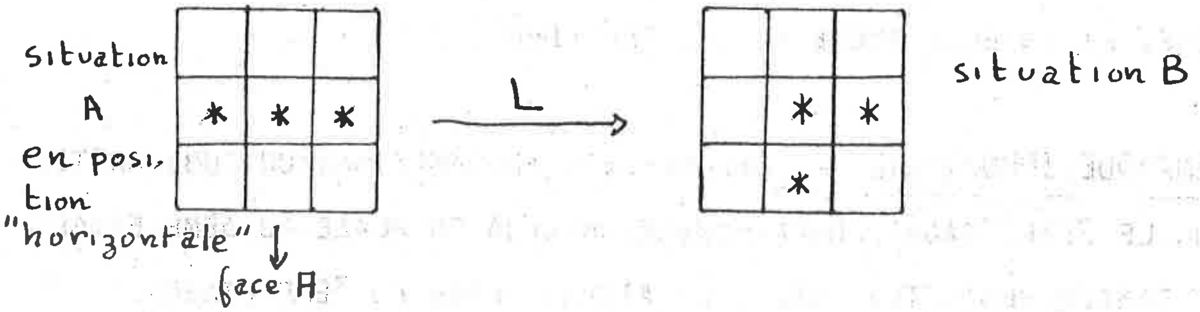
ON APPLIQUE LA MANOEUVRE L

SI AUCUNE BRANCHE DE LA CROIX N'EST JAUNE (SITUATION O) ON APPLIQUE UNE FOIS L : ON OBTIENT UNE BARETTE JAUNE (SITUATION A)



ON PLACE CETTE BARETTE "HORIZONTALEMENT" ET ON APPLIQUE UNE FOIX L :

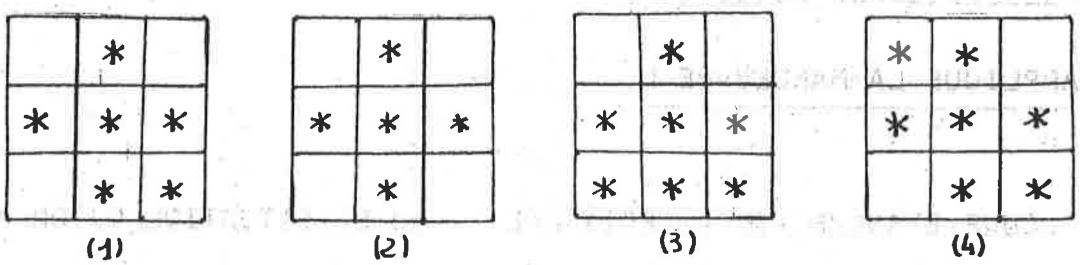
IL APPARAÎT



SI ON APPLIQUE ENCORE L UNE FOIX, LA CROIX APPARAÎT. LE FAIT QUE N(δ) SOIT $(\mathbb{Z}_2)^{11}$ POUR LES CUBES ARÊTES ENTRAINE QUE SEULES LES SITUATIONS O,A,B,C, PEUVENT SE PRODUIRE.

4ÈME PHASE : 3E ÉTAGE UNICOLORE

SI LE 3E ÉTAGE N'EST PAS UNICOLORE, ON EST DANS UNE DES 4 SITUATIONS SUIVANTES :



(1) LA PLUS SIMPLE : ON APPLIQUE M UNE, OU 2 FOIS (OU MIEUX M^{-1}) EN LAISSANT LE CUBE SOMMET HDA INVARIANT (LE JAUNE)

(2) ON MET SUR A DEUX CUBES SOMMETS PRÉSENTANT LA MÊME COULEUR SUR UN DES MURS. ON APPLIQUE M $\longmapsto$ SITUATION 1.

(3) ON PLACE LES DEUX CUBES SOMMETS JAUNES SUR P. ON APPLIQUE M $\longmapsto$ SITUATION 1.

(4) EN APPLIQUANT M, DE FAÇON À LAISSER INVARIANT UN DES DEUX CUBES SOMMETS NON JAUNES, ON ABOUTIT AUX SITUATIONS 1 OU 2 .

5ÈME PHASE : MISE EN PLACE DES COINS DU 3E ÉTAGE

ON APPLIQUE M

A UN QUART DE TOUR PRÈS, LES DEUX COINS EN PLACE SONT, OU BIEN ADJACENTS, OU BIEN OPPOSES.

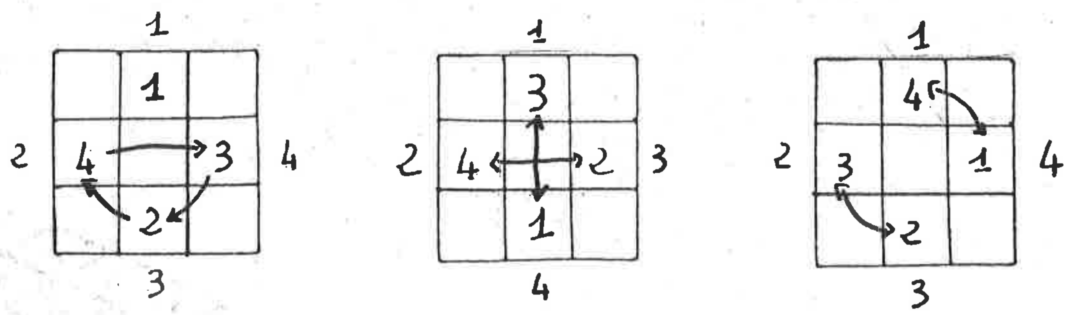
1° ADJACENTS : ON LES PLACES SUR P; ON APPLIQUE $p^{-1}d^{-1}$, SUIVI DE M^{-1} (OU M.M) , SUIVI DE dp (HGP INVARIANT).

2° OPPOSES : ON APPLIQUE $p^{-1}d^{-1}$, SUIVI DE M EN LAISSANT INVARIANT HGP, PUIS dp , ET ON EST RAMENÉ AU CAS 1°.

6ÈME PHASE : MISE EN PLACE DES CUBES ARÊTES DU 3E ÉTAGE

ON APPLIQUE LA MANOEUVRE DES 6

ON A 3 POSSIBILITÉS :

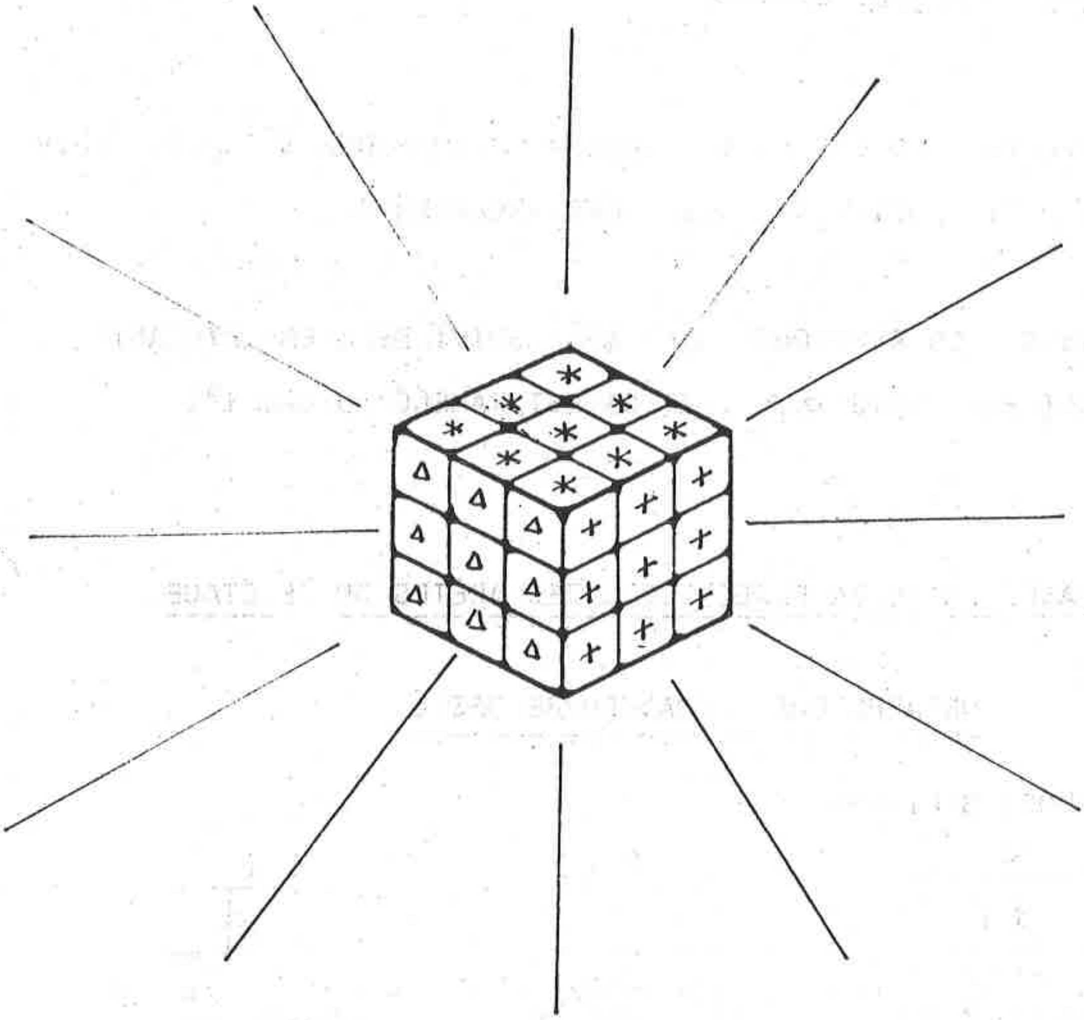


(1) ON ÉCHANGE 2 AVEC 3 PAR $d^{-1}hg$ PUIS, MANOEUVRE DES 6, PUIS $g^{-1}h^{-1}d$. L'ÉCHANGE $3 \leftrightarrow 4$ EST ALORS, À UN QUART DE TOUR PRÈS, UNE BANALE MANOEUVRE DES 6.

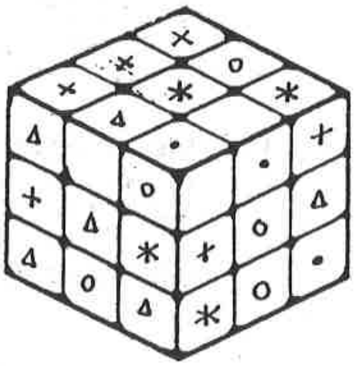
(2) ON AMÈNE 2 ET 4 SUR A PAR $d^{-1}g$, PUIS ON APPLIQUE h , ET ON FAIT LA MANOEUVRE DES 6 POUR A ET H.

(3) LAISSÉ AU LECTEUR À TITRE D'EXERCICE (NE TAPEZ PAS TROP FORT, S'IL VOUS PLAIT)

ON OBTIENT



ou bien :
(en cas d'erreur)



Dépôt légal n° 39
1er semestre 1982