N° 102 – Décembre 2006

Feuille de Vigne

Irem de Dijon

- "La malédiction des maths" en cm1/cm2
- Premier saut pour ... cabri ou ayez le déclic
- Chenilles, papillons, sphinx et autres mammifères
- Somme de deux carrés (suite)

1707-2007 Euler aurait 300 ans

Revue Trimestrielle

Issn 0246-5752

Sommaire

Articles

B loc-notes

ENONCES DU RALLYE DES COLLEGES DE COTE D'OR ET SAONE ET LOIRE 2007

Exercice 1 - Un 4×4 Sudoku **(Sixièmes et cinquièmes)**

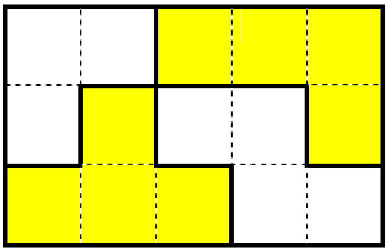
a		b	
	c		d

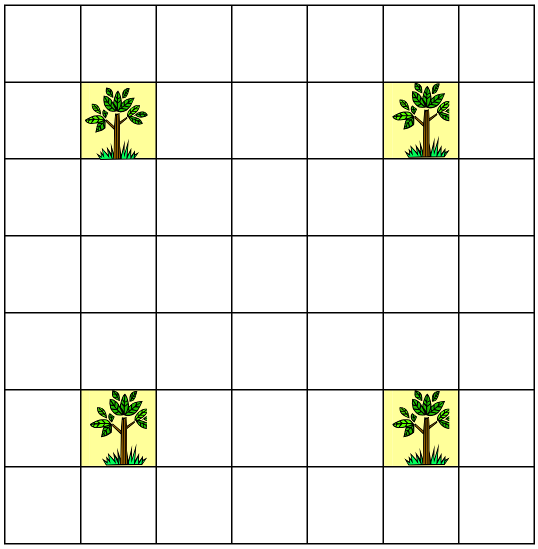
Remplir les 16 cases de la grille à l'aide des nombres 1, 2, 3 ou 4, sachant qu'il n'y a jamais deux fois le même nombre sur une même ligne, sur une même colonne ou dans un carré de 4 cases.

a : nombre pair qui divise 26.
b : chiffre des dizaines du produit de 41,1 par 32,1.
c : nombre de diagonales d'un quadrilatère.
d : le tiers de la moitié de 24.

Exercice 2 - Encore des dalles **(Sixièmes et cinquièmes)**

Le professeur Nesdjowôï veut paver sa terrasse de jardin avec des dalles qu'il commande sur Internet.
Les dalles sont vendues par palettes de quatre dalles toutes différentes. Ci-dessous, une palette.

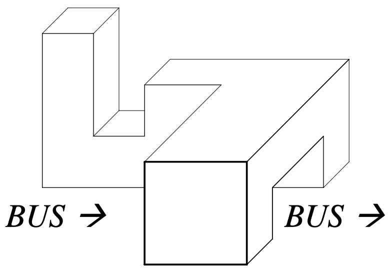




Il achète exactement trois palettes, mais la forme des dalles lui pose problème car il ne veut pas en casser tout en respectant les quatre massifs de fleurs.
À vous de l'aider à paver correctement sa terrasse.

Exercice 3 - Le rêve de Madame Ìèdre **(Sixièmes et cinquièmes)**

Madame Ìèdre, Principale du Collège, dont c'est la fête aujourd'hui, a rêvé que le Conseil Général va entreprendre la construction d'un nouveau collège, vaste et futuriste. Le projet de l'architecte (voir ci-contre) prévoit une arche sous laquelle les bus peuvent passer pour déposer les élèves.
L'intendant, soucieux du futur budget énergie, se dit qu'il y a peut-être un peu trop de surface en contact avec l'extérieur.
Combien l'immeuble a-t-il de faces extérieures (bien sûr, sans compter le sol) ?
Mais, au fait, quel est donc le prénom de Mme Ìèdre ?



Exercice 4 - Un carré très magique **(Tous)**

	$+\downarrow$	$+\downarrow$	$+\downarrow$	
$\times\rightarrow$				84
$\times\rightarrow$				180
$\times\rightarrow$				24
	16	9	20	

Il faut placer tous les nombres de 1 à 9 dans les neuf cases vides ci-contre de façon que :

- chaque nombre de droite soit le <u>produit</u> des nombres de la ligne correspondante
- chaque nombre du bas soit la <u>somme</u> des nombres de la colonne correspondante

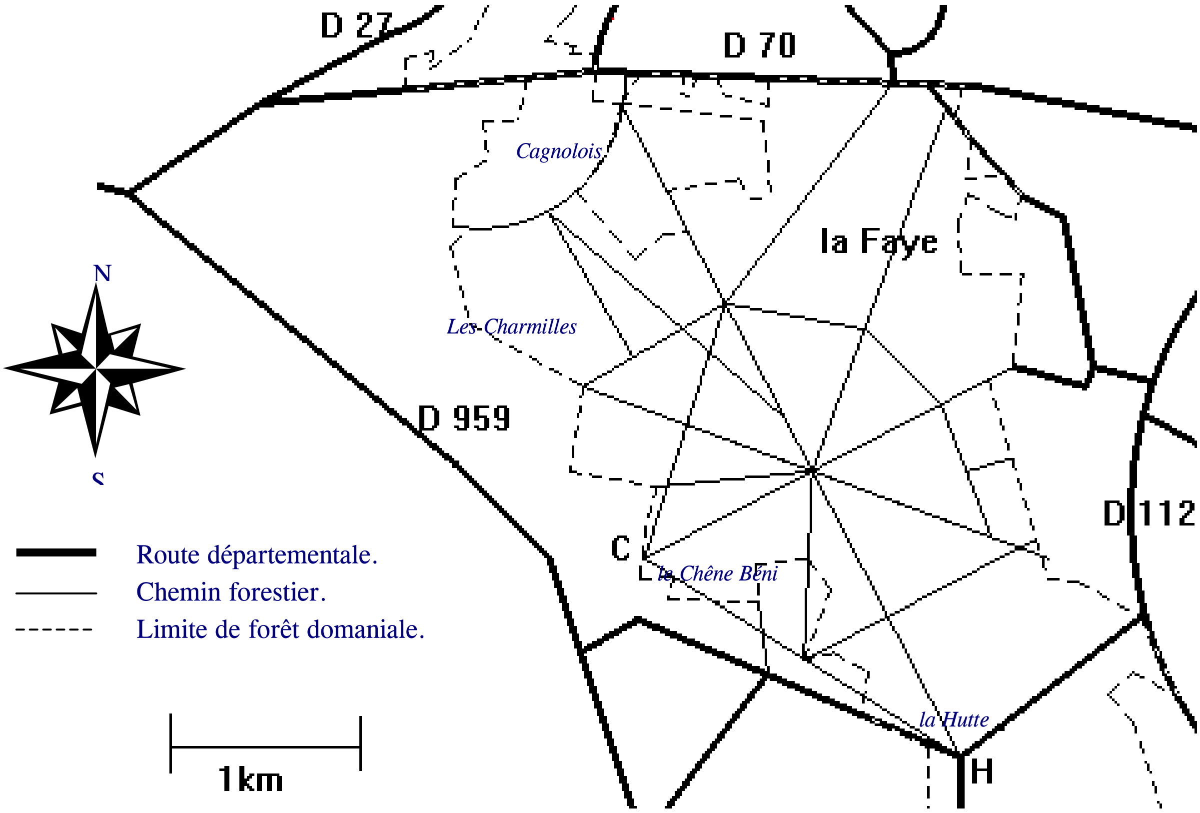
Exercice 5 - Géorientation **(Tous)**

Pour une course d'orientation, vous disposez de la carte ci-dessous et d'une boussole.
À certains endroits stratégiques, en croisée de chemins, on a disposé des fanions.
Ainsi, il y en a un près du chêne Béni C, de la Hutte H, de la source S, de la mare M et du puits P.
L'organisateur, le professeur d'EPS, n'a indiqué sur le plan que les points de départ C et d'arrivée H.
Le professeur de mathématiques a fourni les renseignements suivants pour vous permettre de situer tous les fanions.

- S est équidistant de C, P et H.
- P est équidistant de C, M et S.
- CP = 1 km
- C, S et H sont alignés.
- Lorsque depuis P on regarde M alors on a H exactement derrière soi.
- S est au sud de P.

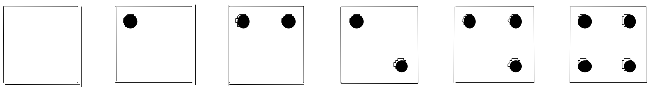
À vous

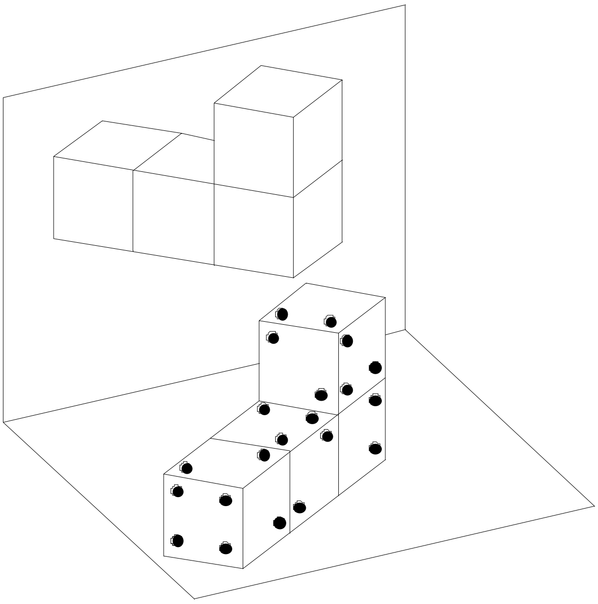
- de retrouver la place des fanions sur la carte.
- d'indiquer le trajet le plus court possible, sachant qu'il faut passer par tous les fanions et n'emprunter que des chemins forestiers.
- de trouver la longueur (la plus précise possible) de ce trajet.



Exercice 6 - Réflexion cubique (Tous)

Voici les six faces d'un dé à jouer un peu particulier :





Sur une table, on assemble quatre dés, absolument identiques. Ces quatre dés se reflètent dans un miroir posé verticalement sur la table.

Sur le dessin ci-contre, on a volontairement «oublié» de dessiner les points sur l'image dans le miroir.

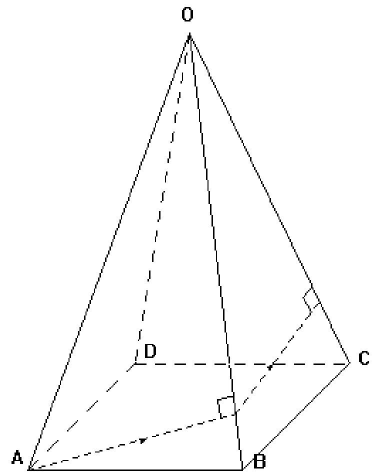
Dessiner les points manquants en les positionnant correctement.

Donner le nombre de points en contact avec la table.

Exercice 7 - Drôle d'embouteillage (Quatrièmes et troisièmes)

Avec la récolte de son verger, Madame Reine Ette a obtenu 2007 centilitres de jus de pommes.
Pour les mettre en bouteilles, elle ne dispose que de deux sortes de bouteilles, d'une contenance de 73 ou de 75 centilitres.
Elle a réussi à mettre toute sa production en bouteilles et toutes les bouteilles sont remplies.
Combien a-t-elle utilisé de bouteilles de chaque sorte ?

Exercice 8 - Un sacré scarabée **(Quatrièmes et troisièmes)**



Un courageux scarabée, partant du point A, veut escalader la pyramide avec l'intention d'atteindre le sommet.

Pour cela, il se déplace successivement sur les diverses faces en tournant toujours dans le même sens autour de la pyramide.

Sur chaque face, son trajet est un segment perpendiculaire à l'arête qu'il vise (voir figure ci-contre).

On voudrait savoir sur quelle face de la pyramide il se trouvera lorsqu'il sera parvenu à mi-hauteur de l'édifice.

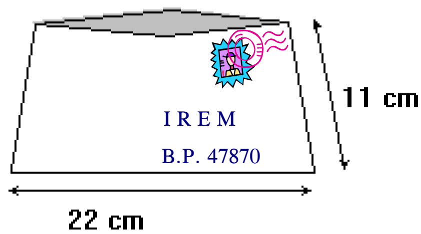
On donne les renseignements suivants :

ABCD est un carré.

$$OA = OB = OC = OD = 150 \text{ m}$$

$$\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOA} = 30°$$

Exercice 9 - L'enveloppe de Mémère **(Quatrièmes et troisièmes)**



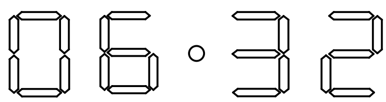
Ma grand-mère, qui était postière, a une astuce qui lui permet de transformer uniquement par pliage, une enveloppe rectangulaire de format 11 sur 22 cm, en un carré. Comme pour l'enveloppe initiale, le carré obtenu a deux épaisseurs de papier.

1. Dessiner très exactement le carré de mémère.
2. Trouver la mesure du côté de ce carré au millimètre près.

ENONCES DU RALLYE MATHEMATIQUE DE BOURGOGNE 2007

1. AFFICHAGE DIGITAL.

Combien de fois dans la journée, les 4 chiffres d'un affichage digital de pendule sont-ils tous différents ?
La pendule marque les heures de 00 . 00 à 23 . 59.



2. LE CALENDRIER.

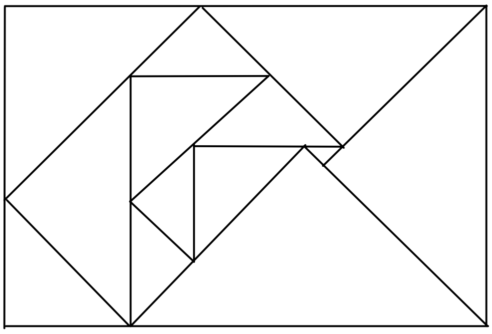
Gaston est né un premier avril. Cette année-là, le **5** janvier, le **11** février, le **24** avril, le **30** juillet, le **3** octobre et le **23** décembre sont tombés un lundi, un mardi, un mercredi, un jeudi, un vendredi et un samedi, mais pas nécessairement dans cet ordre.
Quel jour de la semaine est né Gaston ?

3. EN FAMILLE.

Un couple a des enfants dont les âges sont des entiers strictement positifs distincts.
La moyenne des âges de tous les membres de la famille est de 14 ans.
La moyenne des âges des parents est 13,5 fois plus grande que celle des enfants.
Déterminer les âges de chacun des enfants.

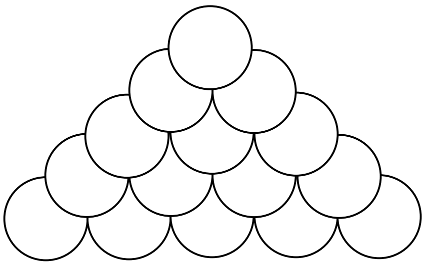
4. TRIANGLES...RECTANGLE.

La figure ci-contre représente un rectangle de 38 cm de largeur.
Ce rectangle est partagé en 13 triangles tous rectangles et isocèles.
Quelle est la longueur du rectangle ?

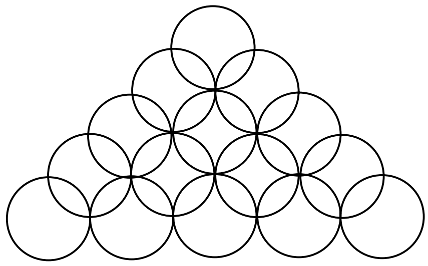


5. LE TOIT.

Une partie triangulaire d'un toit est recouverte de tuiles rondes de rayon **10** cm. (Voir schéma.)
Les rangées comprennent 1, 2, 3, 4, 5, 6,... tuiles. Il y a en tout **666** tuiles.
Quelle est l'aire totale recouverte par ces tuiles ? (Arrondir au m^2 le plus proche.)



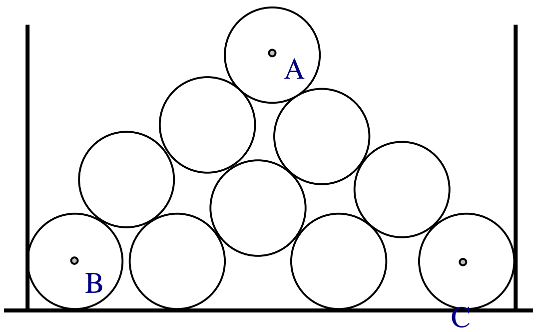
Vue de dessus



Vue par transparence

6. CAVE À VIN.

Gaston a rangé ses **10** bouteilles de bourgogne (de mêmes dimensions) à peu près comme sur le schéma ci-contre. (Seules quatre bouteilles touchent le fond, puis trois, puis deux, puis une).
Si A, B, C désignent les centres respectifs des fonds de la bouteille du haut, de la bouteille gauche et de la bouteille droite, démontrer que le triangle ABC est isocèle.



7. DITES 34.

Gaston a une nouvelle calculette pouvant afficher **12** chiffres.
Il effectue le produit de plusieurs nombres entiers naturels consécutifs, et voit s'afficher un nombre de **12** chiffres qui commence et qui se termine par **34**.
Quels nombres a-t-il tapés ?

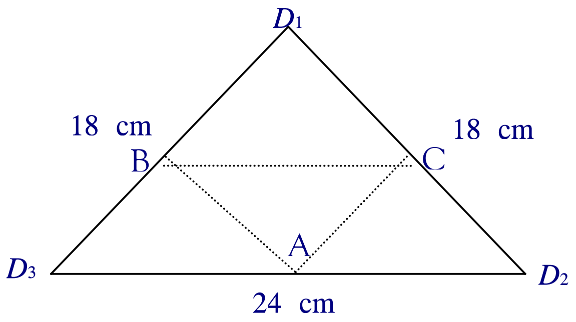
3 4 3

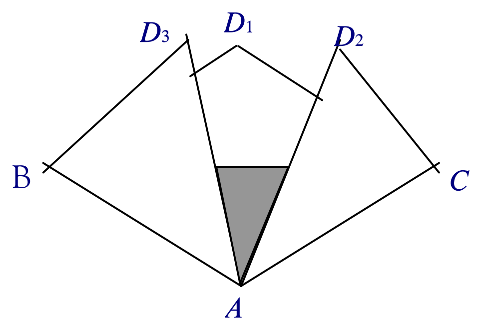
8. SOMME TOUTE.

Quelle est la somme des chiffres de la somme des chiffres de la somme de chiffres du nombre entier $\mathbf{2007^{2007}}$ lorsqu'il est écrit dans le système décimal ?

9. UN DRÔLE DE PATRON.

Un triangle de papier isocèle, dont les côtés mesurent respectivement **18** cm, **18** cm et **24** cm, est plié suivant les milieux *A*, *B*, *C* des trois côtés puis assemblé de façon à constituer le patron d'un tétraèdre *ABCD*, en faisant coïncider les trois points D_1, D_2 et D_3.
Quel est le volume de ce tétraèdre ?





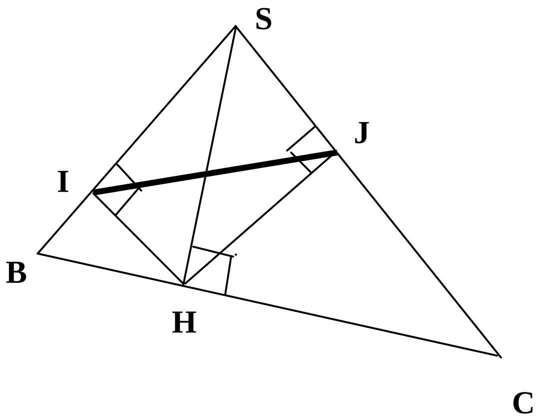
Michel LAFOND

JEU - 52.

Un entier est dit BIDIGITAL si, en base 10, il s'écrit en utilisant au plus 2 chiffres différents.
Exemples : 2666262 et 3300303033300 sont bidigitaux.
123456 = 90090 + 33366 est la somme de deux entiers bidigitaux.
Ecrire 1234567, 12345678 et 123456789 comme sommes de trois entiers bidigitaux.

PROBLÈME- 52.

Dans un triangle acutangle, soit H le pied de la hauteur issue d'un des 3 sommets : S.
H se projette en I et J sur les deux côtés passant par S.
Démontrer que la longueur IJ ne dépend pas du sommet choisi.



Solutions

JEU - 51

Ma montre avance d'une minute toutes les 44 minutes. Elle est à l'heure à midi.
A quelle heure (exacte) les deux aiguilles seront-elles de nouveau en coïncidence ?

Solution :

En ce qui concerne les heures (fausses) indiquées par la montre, dans une heure, la grande aiguille sera sur 12 et la petite sur 5. Il y a "5 minutes" à rattraper pour avoir la prochaine coïncidence, la vitesse de la grande aiguille par rapport à la petite étant de "55 minutes" par heure.

La prochaine coïncidence aura lieu dans $60 + 5 \div \frac{55}{60} = \frac{720}{11}$ minutes (de la montre)

Mais 44 minutes réelles correspondent à 45 minutes de la montre.

Le délai réel avant la coïncidence sera donc de $\frac{720}{11} \times \frac{44}{45} = 64$ minutes (réelles).

Il sera donc exactement **1 heure 04**.

PROBLÈME – 51

La somme des chiffres de $2^{67} = 147573952589676412928$ est égale à 110.
Celle de $2^{103} = 10141204801825835211973625643008$ est aussi égale à 110.

Démontrer que si les écritures décimales de 2^m et 2^n ont la même somme de chiffres, alors $m - n$ est un multiple de 6.

Solution :

Soit $\sum_{i=0}^{k} c_i \, 10^i$ la décomposition en base 10 de 2^n.

modulo 9 on a : $2^n \equiv \sum_{i=0}^{k} c_i \, 1^i = \sum_{i=0}^{k} c_i$ c'est à dire la somme des chiffres de n.

Par conséquent, si 2^m et 2^n ont la même somme de chiffres, alors $2^m \equiv 2^n$ modulo 9.
Or la suite des puissances de 2 modulo 9 : [1, 2, 4, 8, 7, 5, 1, 2, 4, 8, 7, 5 ---] est périodique de période 6.
Cela vient du fait que $2^6 = 64 \equiv 1 \mod 9$ implique $2^{n+6} = 2^n \, 2^6 \equiv 2^n \mod 9$
$2^m \equiv 2^n \mod 9$ implique donc que $m - n$ est multiple de la période 6. CQFD.

Attention, la réciproque est fausse : si $m - n$ est multiple de 6, il n'est pas sûr que 2^m et 2^n aient des écritures avec la même somme de chiffres, c'est même plutôt rare.

« La malédiction des maths » en cm1/cm2

Nicole BONNET, professeur de mathématiques à l'IUFM de Dijon, IREM de Dijon,
membre de la COPIRELEM[1] *Adresse mel : nicole.bonnet@dijon.iufm.fr*
Elisabeth OUDON, professeur des écoles, maître formateur à l'école Petit Bernard de Dijon
et ses élèves (années 2004-2005 et 2005-2006)

Résumé : *l'article propose la description et les commentaires didactiques de cinq séances mises en œuvre dans une classe de CM1/CM2. Ces séances portent sur la résolution de problèmes complexes dont les énoncés racontent une histoire en lien avec l'album « La malédiction des maths ». Cet album nous a paru riche en possibilités et notre objectif est de donner envie aux maîtres de l'utiliser en leur fournissant quelques pistes de réflexion. Quant aux élèves, ils ont pris grand plaisir à répondre aux questions parfois loufoques de l'album et sont rentrés plus facilement dans les problèmes que nous leur avons proposés.*

Mots clés : *problèmes pour chercher ; procédure personnelle ; différenciation pédagogique ; système d'équations multiples ; fractions.*

Pour une meilleure compréhension nous conseillons au lecteur de lire « La malédiction des maths » de Jon Scieszka et Lane Smith. Edition Seuil Jeunesse, cependant l'article devrait se suffire à lui seul. Nous souhaitons cependant que le lecteur n'ait qu'une envie : exploiter dans d'autres directions cet album qui offre un grand nombre de possibilités pour le cycle 3.
Dans ce que nous allons décrire, l'album sert de prétexte à poser des problèmes. Si les élèves ont eu la possibilité de consulter l'album, la dévolution des problèmes se fait de manière plus contextualisée. Les élèves entrent mieux dans la compréhension des énoncés car ils se sont déjà appropriés l'histoire.
A partir de l'album, nous avons choisi quelques situations posant problème et nous avons proposé aux élèves d'en chercher alors une solution.

Le document d'accompagnement sous la rubrique « les problèmes pour chercher » met en évidence quatre fonctions pour la résolution de problèmes :

1. *des problèmes dont la résolution vise à la construction d'une nouvelle connaissance,*
2. *des problèmes destinés à permettre le réinvestissement des connaissances déjà travaillées, à les exercer,*
3. *des problèmes plus complexes que les précédents dont la résolution nécessite la mobilisation de plusieurs catégories de connaissances,*
4. *des problèmes centrés sur le développement de la capacité à chercher : en général, pour résoudre ces problèmes, les élèves ne disposent pas encore de solution experte.*

Dans ce dernier cas, nous parlons de « problème pour chercher » alors que dans les précédents, nous parlons de « problèmes pour apprendre », en soulignant l'aspect réducteur de ces dénominations, puisque dans tous les cas, l'élève mobilise des connaissances et se trouve placé en situation de recherche.

Les «problèmes pour chercher» sont des problèmes pour lesquels les élèves ne disposent pas d'un modèle de résolution qui aurait été enseigné auparavant. Ils permettent le développement de stratégies de recherche.
Face à une tâche de résolution de problème «ordinaire», les élèves se contentent en général de chercher quelle est la bonne opération à utiliser avec les nombres donnés dans l'énoncé et ils attendent que le maître leur dise si leur résultat est correct…

Dans le cas de «problèmes pour chercher», il va être nécessaire d'expliquer aux élèves quelles sont leurs tâches : élaborer une solution personnelle, en laisser une trace écrite, formuler une réponse dans les termes du problème, vérifier et justifier par eux-mêmes leurs résultats, essayer d'expliquer leur méthode, établir la preuve d'une proposition.

[1] COPIRELEM : Commission Inter-IREM Pour l'École Élémentaire

1. *OBJECTIFS GENERAUX QUE NOUS NOUS ETIONS FIXE POUR LES ELEVES*

- Formuler des conjectures, émettre des hypothèses.
- Améliorer la gestion des procédures par essais de calculs successifs : garder la trace des essais, faire des ajustements au voisinage du but, vérifier que les solutions sont compatibles avec les contraintes de l'énoncé.
- S'organiser pour produire les solutions, contrôler qu'on a toutes les solutions.
- Etablir la preuve d'une proposition.

Dans cette classe de CM1/CM2, la maîtresse a conservé un coin de regroupement comme dans les classes maternelles. Ce n'est pas très courant et nous voudrions en souligner l'intérêt. Cet endroit permet non seulement de raconter ou de lire des histoires, mais aussi de donner des consignes collectives avant que les élèves ne s'impliquent dans une tâche. Lors de la résolution de problèmes, la maîtresse lit le problème, certains enfants le reformulent : racontent l'histoire, puis essaient de mémoriser les nombres en jeu. Ils ne vont à leur place que s'ils savent exactement ce qu'il faut chercher. La recherche se fait le plus souvent individuellement dans un premier temps, puis par groupe si le problème est suffisamment «résistant».

***Première séance :** découverte de l'album.*

La lecture est faite par la maîtresse dans le coin de regroupement. La manière est traditionnelle : la maîtresse lit et montre les images.
<u>Compréhension générale</u> : reformulation par les élèves : «Qui peut raconter l'histoire que je viens de lire ?»
<u>Compréhension plus fine</u> :
- Le narrateur dit «Tout est problème». Est-ce que ce sont des problèmes ? Les élèves répondent qu'il y a plusieurs questions, certaines sont faciles comme «Combien y a-t-il de minutes dans une heure ?» ; d'autres sont farfelues : «Combien de dents dans une bouche ?» ; «Quel est l'âge du conducteur ? » ; «A quoi vous fait penser cette tache d'encre ?».
- La maîtresse attire l'attention sur la syntaxe : « qui parle ? Est-ce un garçon ou une fille ? ». Les élèves doivent tirer du texte des indications pour justifier leur réponse. Il s'agit d'une fille car il est écrit : «A quelle heure serai-je prête ? »
- La page «Le dîner ne m'apporte aucun répit» est l'occasion de se poser des problèmes de logique :
  - *Maman dit : tout ce que dit votre père est faux.*
  - *Papa dit : tout ce que dit votre mère est vrai...*
  - *Si ce que dit maman est vrai, ce que dit papa est faux. Mais si ce que dit papa est faux, ce que dit maman n'est pas forcément vrai. Et si ce que dit maman n'est pas vrai, ce que dit papa n'est pas faux...*

***Séance 2 :** Produire des énoncés de problèmes*

La maîtresse a distribué aux élèves la photocopie de l'extrait de page suivant.

> Je me réveille à 7 h 15.
> Il me faut 10 minutes pour m'habiller,
> 15 minutes pour prendre mon petit déjeuner,
> et 1 minute pour me brosser les dents.
>
> SOUDAIN, C'EST UN PROBLÈME :
> 1. Sachant que mon bus part à 8 h 00, parviendrai-je à l'attraper ?
> 2. Combien y a-t-il de minutes en 1 heure ?
> 3. Combien de dents dans une bouche ?

Après lecture silencieuse et reformulation des élèves, la maîtresse demande de résoudre les deux premières questions. Cela est fait très rapidement. Quant à la troisième question, après discussion, on s'accorde à dire qu'on ne peut pas répondre car cela dépend de la dentition de chacun. Dans l'absolu, les élèves savent qu'ils ont 32 dents, mais… De plus cette question n'a pas vraiment de rapport avec les précédentes.

La maîtresse propose alors de modifier le texte de façon à ce que cela devienne un «vrai problème».
En italiques, voici les textes de quelques groupes de trois élèves, les critiques et la reconstruction des énoncés qui ont été faites lors de la phase collective.

Énoncé	Commentaires
Problème 1 : *Je me réveille à 7 h 15. Je mets 2 min pour descendre les escaliers. Il me faut 10 min pour m'habiller et 3 min pour me coiffer. Je mets 15 min pour déjeuner, 1 min pour me brosser les dents. Mon bus met 5 min pour arriver à l'école.* 1. *Sachant que mon bus part à 8 h 02, parviendrai-je à l'attraper ?* 2. *Arriverai-je en retard ?*	La première question est jugée facile car il n'y pas de conversion à faire. La discussion porte ensuite sur la deuxième question : elle ne peut être résolue car il manque une donnée. Il s'agit de déterminer l'heure de fermeture de la grille. Les élèves se rendent compte que celle-ci ne peut pas être donnée au hasard pour que le problème puise être cohérent. En outre, les données déterminent si la question peut être résolue facilement de tête ou par un calcul. Après concertation, ils proposent : «Arriverai-je en retard si la grille ferme à 8 h 32 ?»
Problème 2 : *Je me réveille à 7 h 15. il me faut 10 min pour m'habiller, 15 min pour déjeuner, 1 min pour me brosser les dents et 5 min pour faire mon lit. Je mets 25 min pour descendre les marches et 40 min pour aller à l'école.* *Sachant que ça sonne à 8 h 13, arriverai-je avant la sonnerie ?*	La discussion porte sur la cohérence du problème. Une donnée gêne les élèves : «25 min pour descendre les marches». Ce n'est pas possible ! Un élève propose de rajouter 14 étages. Les autres rétorquent que c'est tout de même peu probable. Un autre élève propose : « mon pied pourrait être cassé ». La phrase devient donc : « l'ascenseur est en panne et j'ai très mal au pied, alors je mets 25 min pour descendre les 14 étages.
Problème 3 : *Je me lève à 7 h 15. Il me faut 5 min pour faire mon lit, 5 min pour me laver, 10 min pour m'habiller, 15 min pour prendre mon petit déjeuner, 1 min pour me brosser les dents, 2 min pour me coiffer, 12 secondes pour mettre mon bracelet, 2 min pour enfiler mon manteau, 2 min pour mettre mes chaussures, 2 min pour mettre mon cartable sur mon dos ? Je mets 10 min pour aller à l'école. La cloche sonne à 8 h 50. Est-ce que je vais être en retard ?*	Le problème est jugé plus complexe que les précédents car les élèves qui ont rédigé l'énoncé ont rajouté des secondes. «c'est plus compliqué les soustractions avec des minutes et des secondes» La maîtresse profite de cette réflexion pour proposer une autre question : «si je suis en avance, peux-tu me dire de combien de temps ?» Tous les élèves en résolvant le problème se rendent compte de la difficulté effective des opérations nécessaires.
Problème 4 : *Je me réveille à 7 h 15. il me faut 10 min pour m'habiller, 15 min pour prendre mon petit déjeuner et 1 min pour me brosser les dents.* *Mon bus part à 8 h, mais je dois apporter une leçon à 14 min d'ici, mais il l'a justement oubliée chez lui au milieu du chemin. Donc il retourne chez lui. Il met 2 min à la trouver. Donc il y retourne et met 7 min à expliquer la leçon. Le deuxième passage du bus est à 8 h 16.* *Prendra t-il ce bus ou le suivant ?*	La réécriture de ce problème sera quasi totale… Elle porte moins sur les données numériques que sur la rédaction elle-même. Tout d'abord, le narrateur passe du «je» au «il», puis il y a répétition de «mais» et de «donc» mal employés. Enfin le texte en lui-même n'est pas très cohérent. Tout le monde s'approprie de l'histoire et une élaboration collective est faite. La maîtresse veille au bon usage des connecteurs, à la syntaxe et à la grammaire. Les données numériques sont modifiées et les élèves introduisent des secondes comme dans le problème précédent. Puis le nouvel énoncé est donné à résoudre à tous.

Rédiger des problèmes est une activité riche :

- Pour la maîtrise de la langue.
  - Les élèves prennent conscience de l'importance de la clarté de la rédaction et donc de la reformulation. La cohérence d'un récit, par notamment un meilleur usage des substituts et des connecteurs logiques est largement abordée.
  - Les élèves se rendent compte que certaines formulations aident à la compréhension des questions. Ainsi certaines phrases peuvent permettre de résoudre une question, alors que d'autres pourraient concerner une autre question.
  - Enfin, les problèmes rédigés étant destinés à être résolus par des élèves d'une autre classe, les rédacteurs sont particulièrement sensibles à la correction de la grammaire et de l'orthographe.
- Pour la résolution de problèmes.
  - Les élèves qui ont écrit l'énoncé le comprennent aisément. Il en va de même pour tous ceux qui ont participé activement à son élaboration. Le problème a du sens.
  - Les élèves prennent conscience de l'impact des données numériques qui peuvent complexifier ou simplifier la (les) opération (s) à effectuer.
  - Tous les problèmes fabriqués appartiennent à une même classe et auront pour titre de référence « Le problème du départ à l'école ». Les élèves pourront s'en souvenir : il fait partie de la culture commune.

Séance 3 : Résoudre un problème complexe : « le problème des chemises »

1. PRESENTATION DE LA PAGE ET DU PROBLEME EN COLLECTIF ORAL

La maîtresse montre de nouveau les pages de l'album et lit l'histoire à partir de «J'ouvre mon armoire… « jusqu'à «Tout semble faire problème».
D'un commun accord, les élèves trouvent les deux premières questions faciles. En revanche, ils ne peuvent pas répondre à la troisième. La maîtresse leur propose donc le problème suivant :

Je décide de renouveler ma garde robe car je n'en peux plus de l'immonde chemise de l'oncle Zeno.
Je casse ma tirelire. Elle contient 110 €
Le commerçant me dit :
Avec l'argent que tu possèdes, tu peux acheter

Quatre chemises vertes et deux chemises à carreaux

Cinq chemises à carreaux

Deux chemises vertes, une chemise à carreaux et deux chemises à fleurs

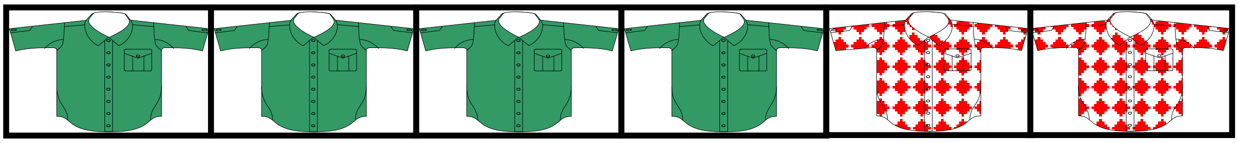
Oui, mais combien coûtent donc une chemise verte, une chemise à carreaux et une chemise à fleurs ?
Je sens que je vais exploser.
Le lecteur peut-t-il m'aider ?

Une reformulation rapide de l'énoncé du problème permet de s'assurer que les élèves ont compris tous les termes utilisés par les auteurs.
L'annexe 1 distribuée aux élèves, propose un montage de la page photocopiée de l'album sur laquelle nous avons collé l'encadré précédent.

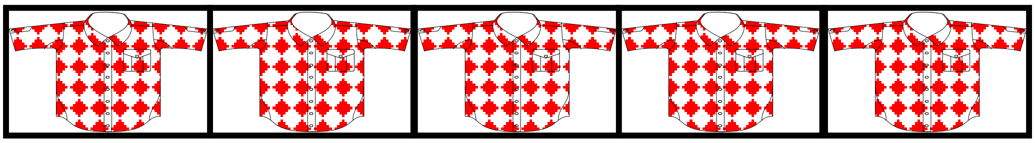
2. LA RECHERCHE

Cinq minutes sont consacrées à la réflexion individuelle afin de s'approprier l'énoncé puis la recherche se poursuit par groupes de trois élèves. Un rappel est fait sur le rôle de chacun dans le groupe : «vous devez désigner un rapporteur, un secrétaire et un gardien du silence».

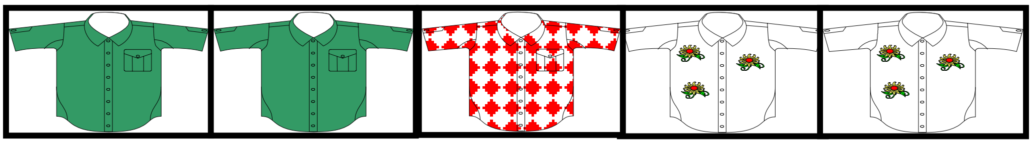
Au tableau est affiché la traduction **des contraintes dans l'ordre de l'énoncé** :



110 €



110 €



110 €

Dans un but de différenciation pédagogique, les groupes n'ont pas le même type de matériel

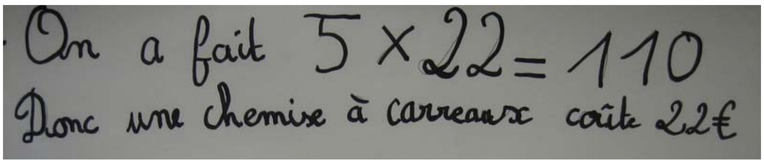
- Certains groupes disposent de trois enveloppes dans lesquelles sont mises les étiquettes des chemises correspondant aux trois contraintes (annexe 2). Sur les enveloppes ne figure que le prix total : 110 €.

L'intérêt pour les élèves est la mobilité des enveloppes qui peut permettre aux élèves de calculer en premier le prix des chemises à carreaux.

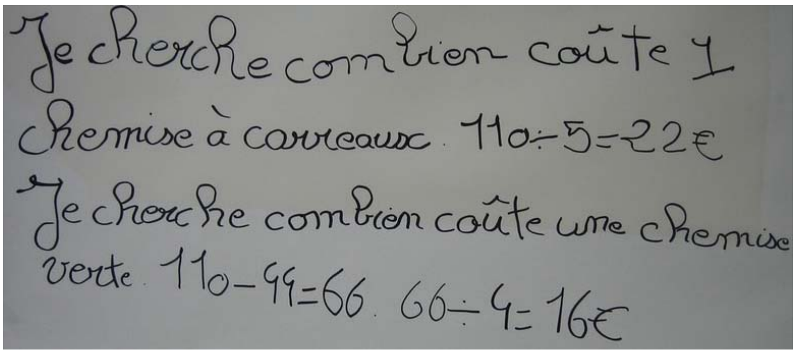
- A d'autres groupes d'élèves, la maîtresse suggère de faire des schémas avec des crayons de couleur.
- Les derniers groupes n'ont aucun matériel.

Nous avons sélectionné deux groupes A et B dont les productions nous paraissent significatives.
Au bout de trois quarts d'heure, le groupe A, n'a trouvé que le prix d'une chemise à carreaux en utilisant une multiplication à trous, alors que le groupe B a été plus loin dans sa recherche. Cependant, le groupe B ne formule pas de phrase réponse après chaque opération. Ci-dessous les affiches de ces deux groupes.

Groupe A



Groupe B



3. PHASE DE SYNTHESE

Toutes les productions sont affichées, aucun groupe n'est laissé en échec. Tous ont pris en compte la deuxième contrainte et ont trouvé le prix d'une chemise à carreaux soit 22 €.
Les élèves rapporteurs expliquent leurs démarches à l'aide des affiches. Tous se rendent comptent de l'importance des contraintes données. Il ne faut pas forcément les prendre dans l'ordre de l'énoncé.
Une autre séance sera nécessaire pour terminer le problème et pour que chaque élève rédige sa solution finale.

Cependant au bout de deux séances, il est illusoire de croire :

- que tous les élèves ont compris le problème ;
- qu'ils sont capables de réinvestir ces nouvelles connaissances dans d'autres problèmes du même type[2] .

Deux problèmes de réinvestissement sont proposés dans une séance ultérieure.
En voici les énoncés :
Problème 1 (complexe) :
«Pour équiper un collège en matériel informatique, une entreprise expédie trois chargements de 300 kg chacun.

- Le premier chargement contient 15 ordinateurs et 30 chaises.
- Le deuxième contient 25 ordinateurs.
- Le troisième contient 10 ordinateurs, 20 chaises et 5 armoires.

Combien pèse un ordinateur, une chaise, une armoire ?»

Problème 2 (plus simple car on peut matérialiser les objets) :
«On a acheté du matériel pour une classe : des feuilles de bristol, des crayons et des gommes.

- 2 feuilles et 3 crayons coûtent 70 centimes d'euro ;
- 6 feuilles coûtent 30 centimes d'euro ;
- 3 feuilles, 2 crayons et 4 gommes coûtent 95 centimes d'euro ;
- Combien coûte une feuille, un crayon, une gomme ? »

Conclusion :

Il est illusoire de penser que des élèves de fin de cycle 3 pourront dorénavant résoudre des systèmes triangulaires de trois équations à trois inconnues. Cependant, c'est un premier pas et nous pouvons espérer que ces problèmes où il faut lire tout le texte et mettre en ordre les différentes contraintes ne les laisseront plus en échec complet.

Séance 4 : *résoudre un autre problème complexe : « le problème des dinosaures »*

1. PRESENTATION DE LA PAGE ET DU PROBLEME EN COLLECTIF ORAL

Dans un premier temps, en collectif, la maîtresse montre les pages de l'album et lit le texte à partir de «la matinée… » jusqu'à « 2 rangées ? »
Les élèves résolvent facilement les questions résolues. Elle leur propose le problème suivant qui est comme la première fois, rédigé sur une photocopie de la page de l'album (annexe 3).

Le problème des rangées me tourne la tête. Depuis ce matin, je range les petites voitures dans mon garage, j'aligne les capsules de bière de ma collection, j'ordonne en rangées les dinosaures de mon autre collection.

J'ai remarqué que si je mets les dinosaures par rangées de 6, il en reste trois
Si je les place par rangées de cinq, il n'en reste pas.
Et voilà que j'invente des problèmes maintenant !

1. **si je les mettais par rangées de trois, en resterait-il ?**
2. **si je les mettais par rangées de deux, en resterait-il ?**
3. **Finalement, combien est-ce que je possède de dinosaures ? Je me souviens seulement que j'en ai un nombre inférieur à 50, mais proche de 50.**

La malédiction des maths m'est réellement tombée dessus !

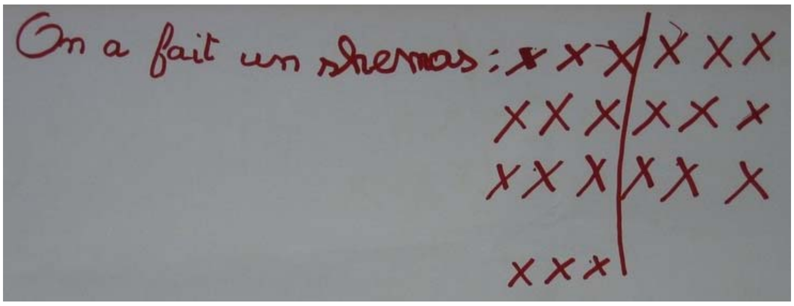
2. RECHERCHE

Il est demandé aux élèves de ne chercher que les deux premières questions et de ne répondre à la troisième que si les deux premières ont trouvé une solution.
On prépare une cinquantaine de haricots dans des gobelets comme aide éventuelle, mais cela ne servira pas dans cette classe.

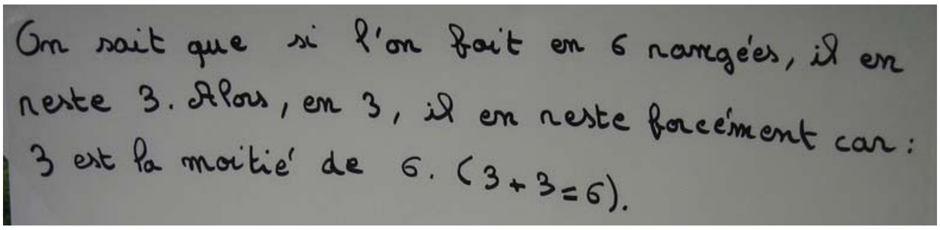
[2] Voir l'article « Séquences de résolution de problèmes complexes : quelle mise en œuvre » dans grand N n° 77.

Ci-dessous nous proposons les affiches de quatre groupes d'élèves.

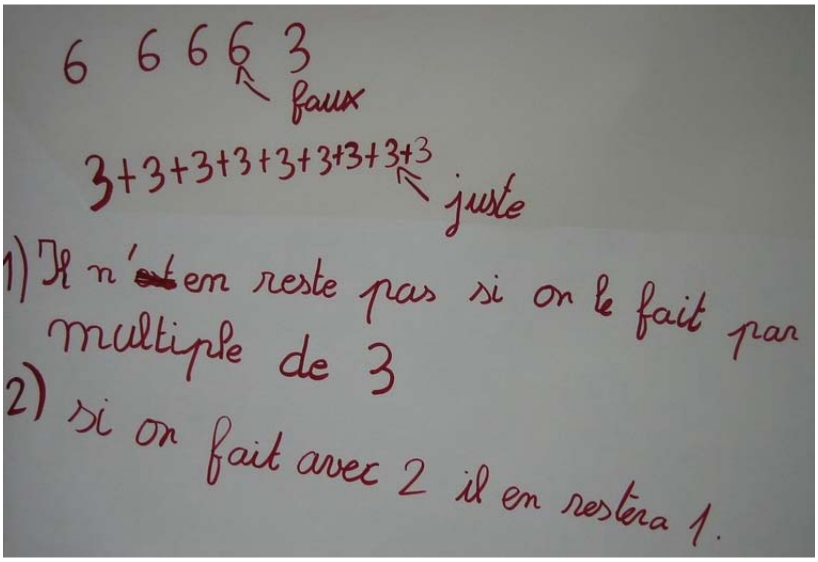
Groupe A



Groupe B



Groupe C

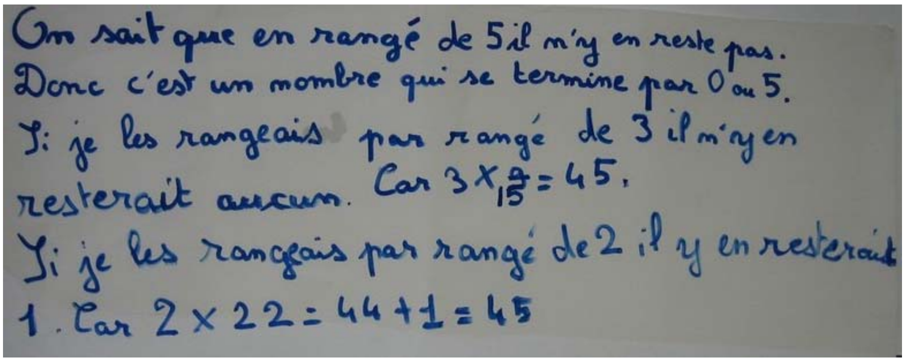


Pour répondre à la première question, le groupe A schématise les dinosaures par des croix, même s'il ne conclut pas par écrit, on voit bien qu'il a compris et il sera capable d'expliquer oralement qu'il ne reste pas de dinosaures si on les met par groupe de trois.

Le groupe B a un raisonnement plus élaboré car il met en évidence une propriété multiplicative : « 6 est le double de 3 ».

Le groupe C a un raisonnement additif : « 3 + 3 = 6 » pour la première question et ne donne qu'une réponse sans justificatif pour la deuxième question.

Groupe D



Le groupe D a d'abord cherché à répondre à la troisième question avant de répondre aux deux premières malgré nos consignes de départ.

Remarques :

- Nous nous sommes rendu compte que la notion en jeu était implicite chez ces élèves de CM1/CM2. La maîtresse a du insister pour de nouveau donner du sens au mot **multiple**. Par un questionnement approprié elle a su faire en sorte que les élèves le prononcent, l'utilisent dans des phrases, même si le schéma leur parait suffisamment clair.

- La production du groupe D nous ayant alertées, lors d'une séance ultérieure, un problème de réinvestissement sera donné en deux étapes :

Première étape : recherche du problème suivant :
«Nicolas reçoit des chocolats pour Pâques.
Quand il les range par paquets de 5, il ne lui en reste aucun.
Quand il les range par paquets de 12, il lui en reste 4 qu'il ne peut pas ranger.

1. s'il les mettait par paquets de 4 lui en resterait-il ?
2. S'il les mettait par paquets de 3, lui en resterait-il ?»

Deuxième étape : ajout d'une question supplémentaire.
Lorsque les deux questions ont été résolues, la maîtresse écrit au tableau la troisième :
«Nicolas m'a dit qu'il avait moins de 100 chocolats, mais plus de 60 chocolats. Combien de chocolats a reçu Nicolas ?»

Conclusion :

Les notions de multiples de 2, 5 et 10 complètent les connaissances des élèves sur la structuration arithmétique des entiers naturels. Il nous semble important de traiter ces problèmes à la fin de l'école primaire car au collège d'autres problèmes arithmétiques plus complexes seront proposés dont ceux de proportionnalité.
Les programmes de 2002 ont réduit la connaissance de « multiples et de diviseurs » à celle de multiple. Le mot «diviseur» ne devant pas être utilisé en cycle 3 dans le sens «5 est diviseur de 35 est une formulation équivalente à 35 est un multiple de 5». Cela rend les formulations ou reformulations assez complexes et les maîtres doivent en être conscients.

***Séance 5 :** résoudre un troisième problème complexe : « le problème des tartelettes »*

1. PRESENTATION DE LA PAGE ET DU PROBLEME EN COLLECTIF ORAL

La maîtresse montre aux élèves les pages de l'album et lit celle de gauche : à partir de « Malheureusement pour moi » jusqu'à « que je croque 2 par 2 ».
Les avis sont partagés pour répondre à la question 3, mais là n'est pas le problème de la maîtresse qui leur propose le problème suivant (annexe 4) qui est comme les deux fois précédentes, rédigé sur une photocopie de la page de l'album.

> Je n'arrive plus à digérer les pizzas et les tartes. Je somnole en classe quand tout à coup, me voilà propulsé dans un cauchemar.
> Il y a des tartelettes qui voltigent autour de moi. En les comptant le tournis augmente. Il y en a 20.
> Le boulanger me dit : tu vas les placer dans des boites. Bing, je reçois cinq boites sur la tête. Il y en a deux jaunes et trois vertes.
> Le boulanger continue : il faut utiliser toutes les boites et les boîtes d'une même couleur doivent contenir le même nombre de tartelettes. Tu peux, si tu veux, partager les tartelettes en deux ou en trois parts égales, mais pas plus.
> Je me mets au travail, mais j'hésite car il y a plusieurs façons.
> Tout ça augmente mon mal de cœur. Je vais vomir si tu ne m'aides pas…

Souhaits pédagogiques :

Nous voulons systématiser une attitude pédagogique en trois étapes

- Phase d'action : les élèves cherchent des solutions de façon non organisée. Nous avions souhaité qu'ils en trouvent «beaucoup».
- Formulation des résultats par les élèves. La maîtresse observe et fait remarquer la pertinence des procédures.
- Vers la notion de preuve : l'objectif est méthodologique. Peut-on s'organiser pour trouver toutes les solutions ?

Le problème et ses contraintes :

Il a fallu un certain temps pour que les élèves s'imprègnent de toutes les contraintes. On a 2 boîtes jaunes et 3 boîtes rouges, 20 tartelettes. Il s'agit de prévoir la répartition de toutes les tartelettes dans les boîtes avec les contraintes suivantes :

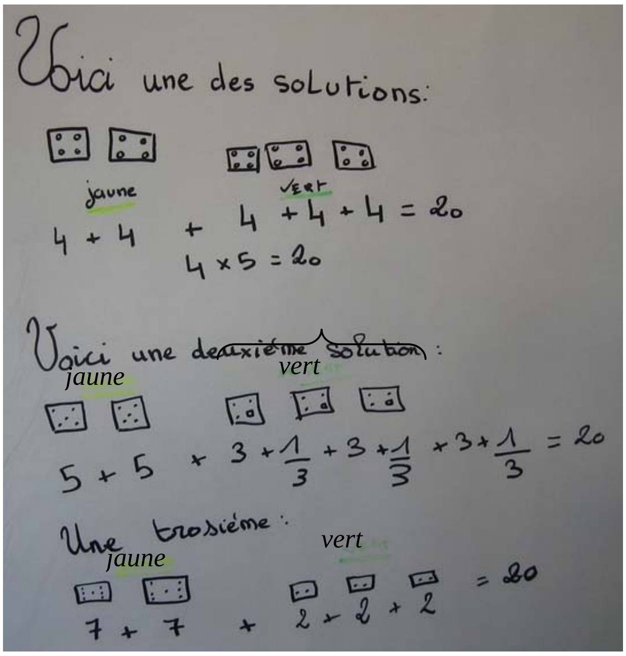
- **On utilise toutes les boîtes.**
- **Les boîtes d'une même couleur contiennent le même nombre de tartelettes.**
- **On peut partager les tartelettes en deux ou en trois parts égales.**

Remarque : les élèves doivent prendre conscience que dans les deux boîtes jaunes on peut mettre des tartelettes entières ou des demis, mais pas des tiers et que dans les trois boîtes rouges, on peut mettre des tartelettes entières ou des tiers, mais pas des demis.

Les aides :
Nous avons prévu des carrés (format A5) de couleurs jaune et vert découpés dans du bristol qui symbolisent les boîtes. Nous les avons plastifiés afin que les élèves puissent écrire avec des feutres effaçables. Cette idée s'est avérée utile car ils ont ainsi pu faire de nombreux essais.
De plus, quelques groupes d'élèves se sont aidés de dessins comme le groupe A.

Groupe A

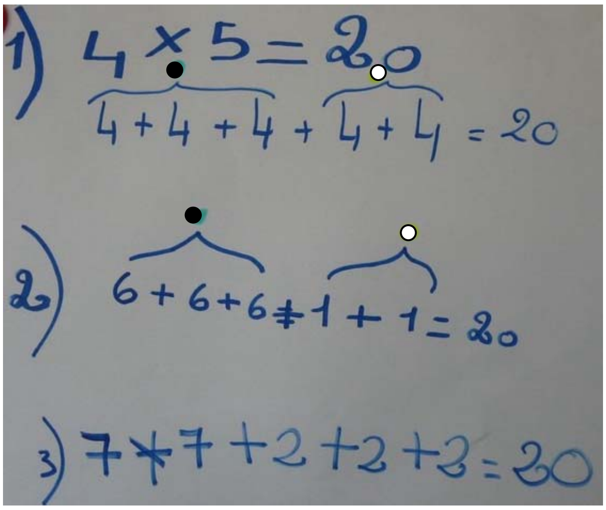
Les élèves ont écrit en jaune le mot « jaune » au-dessus de ces deux schémas



Les élèves ont écrit en vert le mot « vert» au-dessus de ces schémas

Ce problème possède 19 solutions et parmi lesquelles, trois donnent des valeurs entières.
De nombreux élèves, comme le groupe B, ont d'abord trouvé celles-ci.

Groupe B

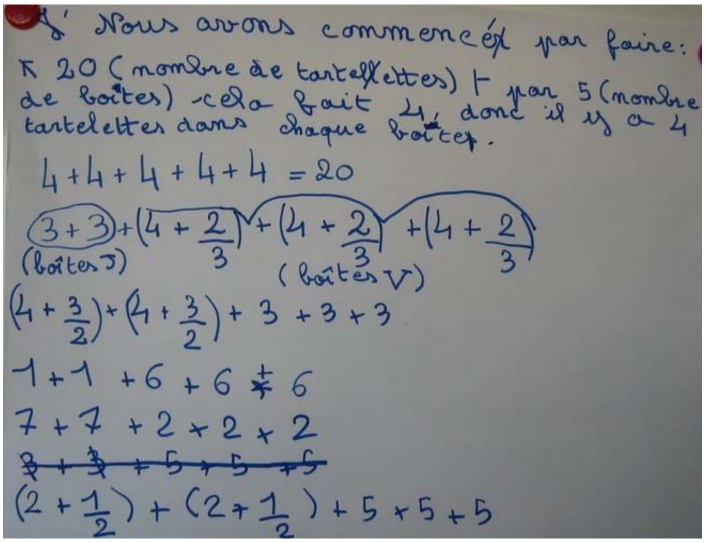


Les élèves ont placé un point vert ● et un point jaune ○ au-dessus de leurs accolades

Certains ont eu du mal à dépasser ce stade, mais une fois les tartelettes découpées virtuellement, le jeu les a motivés et ils ne voulaient plus s'arrêter.

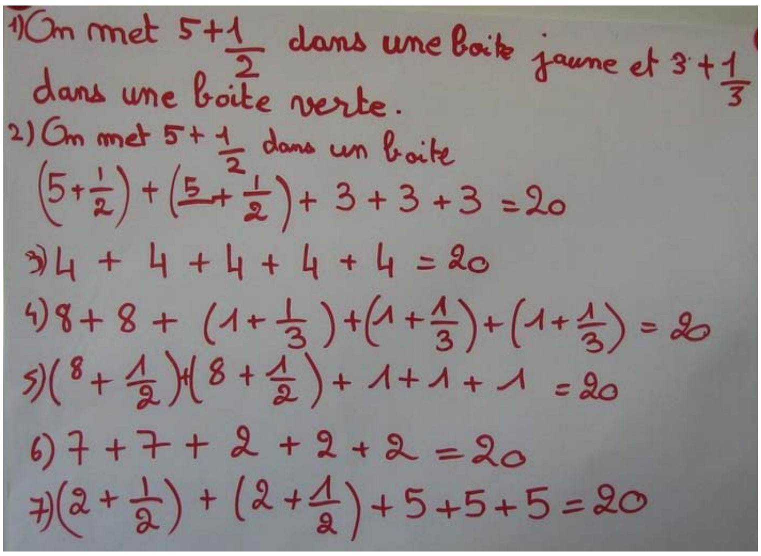
Le groupe C trouve trois solutions supplémentaires avec des fractions.

Groupe C



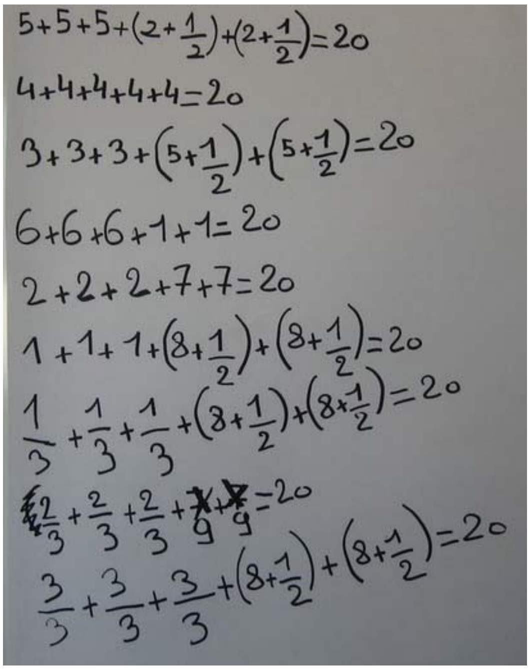
La première solution du groupe D est originale, mais le total fait 21 au lieu de 20. Cette non prise en compte d'une contrainte du problème est assez fréquente chez les élèves de cycle 3. Nous pouvons tout de même remarquer que ce groupe trouve six solutions exactes.

Groupe D



Le groupe E montre déjà certaines performances dans le calcul des fractions. Une solution parmi les neuf trouvées est erronée en raison de la non prise en compte du total des tartelettes.

Groupe E



Cette phase de recherche s'est terminée par une vérification des solutions trouvées : « respectent-elles bien toutes les contraintes ? ».
Lors de la séance suivante, la maîtresse a repris les solutions et a tenté de faire trouver une organisation possible afin de ne pas en oublier. Il s'agit d'un travail méthodologique adapté au cycle 3.
Le travail a pu être réalisé à partir de l'affiche du groupe E où l'on voit un début de recherche systématique à gauche de la feuille : 5, 4, 3, puis une rupture à cause du 6, puis de nouveau 2 et 1, avant le partage en tiers.

Une disposition sous forme de tableau nous a semblé pertinente car elle aide à la visualisation.

Boîte verte	Boîte verte	Boîte verte	Boîte jaune	Boîte jaune	Total
$6 + \frac{1}{3}$	$6 + \frac{1}{3}$	$6 + \frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	20
6	6	6	1	1	20
$5 + \frac{2}{3}$	$5 + \frac{2}{3}$	$5 + \frac{2}{3}$	$1 + \frac{1}{2}$	$1 + \frac{1}{2}$	20
Etc.	…	…	…	…	

Remarque : Nous voulons attirer l'attention sur le retour au sens nécessaire. En effet, les élèves les plus en difficulté, même s'ils ont écrit l'égalité mathématique $2 + 2 + 2 + 7 + 7 = 20$, ont du mal à la formuler oralement : « 2 tartelettes dans chacune des boîtes vertes et 7 tartelettes dans chacune des boîtes jaunes », et à la rédiger.

Conclusion :

Ce problème a été l'aboutissement d'un travail préalable sur les fractions simples. Il s'inscrit dans la dynamique instaurée par les I.O. de 2002. Les fractions prennent encore plus de sens au travers de la résolution de problèmes. Les fractions utilisées ici ont des dénominateurs « simples » : ce sont des demis et des tiers.
Les élèves ont mieux intégré le concept difficile formulé de la manière suivante : « Pour prendre un tiers, il faut partager une unité en trois parties égales et prendre une part. Pour prendre deux tiers, il faut partager une unité

en trois parties égales et prendre deux parts. Mais pour prendre trois demis, il faut partager chacune des deux unités en deux parties égales, et prendre trois parts. »

Le problème des tartelettes prolonge celui peut être donné avec des jetons (dans l'énoncé, on remplace seulement le mot « tartelette » par le mot « jeton »). Les solutions sont alors entières. A notre avis, ce problème relève davantage du début du cycle 3.
Nous avons pu constater que les élèves sont motivés pour chercher des combinaisons linéaires convenables, et à la fin de ces séances, ils réclamaient encore de nouveaux problèmes.

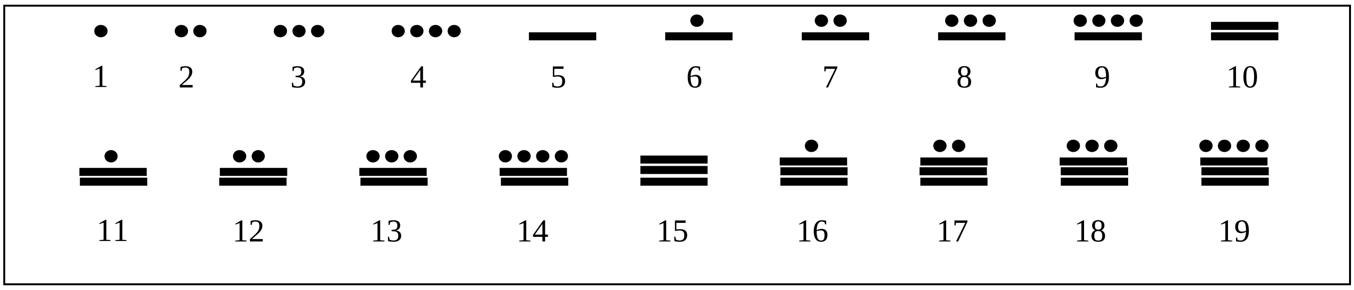
Perspectives

Il est nécessaire que le lecteur possède l'album « la malédiction des maths » pour comprendre ce qui suit.

- Nous avons fait une proposition pour les deux premières doubles pages : le problème des chemises (Annexe 1).
- Des doubles pages suivantes offrent des ouvertures vers les mesures de longueur anciennes ou les mesures anglo-saxonnes (inch, foot, yard). Nous trouvons également des questions concernant les conversions des mesures légales françaises en mesures anglaises et on peut observer la ou non-proportionnalité de ces échelles de mesure. Des recherches sur internet et/ou dans le dictionnaire peuvent être entreprises.

Ces pages permettent aussi de se questionner sur d'autres masses et mesures.
On peut aussi *« Je ne prends même pas la peine de sortir les céréales, je ne veux pas savoir combien il y a de flocons dans un bol »*. Un problème intéressant à poser sur les grands nombres peut-être « Combien y a t-il de grains de riz dans un kilo de riz » ou « Combien de cheveux avons-nous sur la tête » ou « Combien de franges à le châle en soie de la maîtresse » (si celle-ci possède un châle !).

- Les doubles pages suivantes sont propices à l'étude du calendrier et on peut proposer de chercher « Quel était le nom du jour de ta naissance ? » ; « Quel était le nom du jour du 14 juillet 1789 ? ». La consultation de calendriers perpétuels permet de valider les résultats.
- Nous avons fait une proposition pour les deux doubles pages suivantes : le problème des dinosaures (Annexe3).
- Nous avons également fait une proposition pour les deux doubles pages suivantes : le problème des tartelettes (Annexe 4).
- Les doubles pages suivantes permettent l'étude du système de numération maya avec une ouverture vers les autres systèmes de numération (Egyptien ou Romain)



Calculer par exemple 

Les pages permettent en outre de se poser des problèmes sur la proportionnalité : problème de la gym et de réfléchir à la langue française : problème des mots qui peut être le point de départ de jeux d'écriture sur les mots-valises.

- Les doubles pages suivantes s'ouvrent vers l'étude des systèmes de numération de la planète Tétra et de la planète Binaire. Faire des additions et des soustractions dans la langue des planètes Tétra ou Binaire permet de mieux comprendre nos systèmes de retenues. On peut aussi s'amuser à répondre à la question : « au bowling j'ai marqué 1 237 points dans notre système à base 10, combien ai-je marqué de points dans la planète Tétra ? Et dans la planète Binaire? »

On peut aussi compléter la suite de Fibonacci 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... , compléter d'autres suites numériques.

- Les doubles pages suivantes accordent une pause et un peu de bon sens. En effet partager 24 choux à la crème en 25 relève de l'incongruité mathématique, il vaut bien mieux qu'une personne n'en veuille pas.
- Les doubles pages suivantes renvoient aux systèmes monétaires, puis aux problèmes de logique…
- Cela se termine par une pirouette : « casser la craie en deux et soustraire les deux moitiés, il reste un zérofice pour sortir du cauchemar. Ouf. Enfin libre ! »

Conclusion heureuse : une fois brisée la malédiction des maths. On peut résoudre n'importe quel problème en sachant que dans notre vie *« presque tout peut s'envisager comme un problème de mathématiques »*.

Bibliographie :

- « Faut-il enseigner les mathématiques à tous les élèves ? » article de Roland Charnay, Plot n°8.
- Mathématiques et problèmes (extraits de "pourquoi des mathématiques à l'école", Roland Charnay, ESF 1996).
- « En mathématiques, l'utilisation des connaissances se manifeste à travers la résolution de problèmes », Roland Charnay, article dans SNUipp.
- « Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes », Jean Julo, Grand N n°69.
- « Mise en œuvre d'un problème pour chercher en CM2 : analyse et perspectives », Nicole Bonnet, Grand N n°77.
- « Séquences de résolution de problèmes complexes : quelle mise en œuvre ? » G. Geudte, G. Lepoche, Grand N n° 77.
- « Le rôle des problèmes dans l'enseignement des mathématiques » François Boule, IREM de Dijon.
- Document d'Accompagnement des Programmes « Les problèmes pour chercher » :

www.eduscol.education.fr/prog

Annexe 1

Je me réveille à 7h15. Il me faut 10 minutes pour m'habiller, 15 minutes pour prendre mon petit déjeuner, et 1 minute pour me brosser les dents.

SOUDAIN, c'est un problème :

1. Sachant que mon bus part à 8h00, parviendrai-je à l'attraper ?
2. Combien y a-t-il de minutes dans 1 heure ?
3. Combien de dents dans 1 bouche ?

J'ouvre mon armoire et les problèmes se multiplient :

Je possède 1 chemise blanche, 3 chemises bleues, 3 chemises à rayures et l'immonde chemise à carreaux que m'a envoyée mon oncle Zeno.

1. Combien ai-je de chemises en tout ?
2. Combien m'en resterait-il si je jetais cette immonde chemise à carreaux ?
3. Quand mon oncle Zeno cessera-t-il de m'envoyer des chemises aussi immondes ?

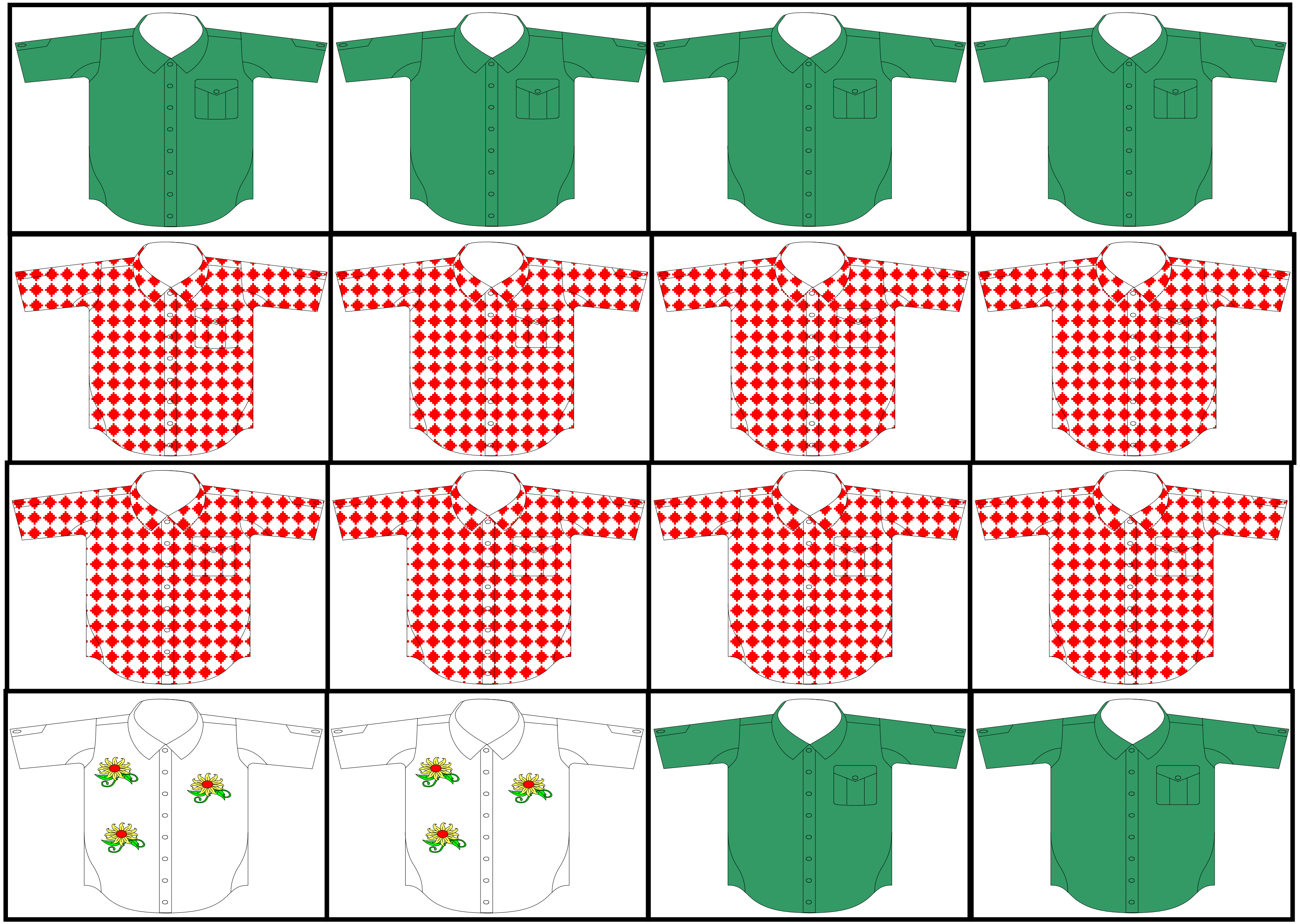
JE COMMENCE à m'inquiéter un peu.
Tout semble faire problème.

Je décide de renouveler ma garde robe car je n'en peux plus de l'immonde chemise de l'oncle Zeno.
Je casse ma tirelire. Elle contient 110 €
Le commerçant me dit :
Avec l'argent que tu possèdes, tu peux acheter

- **Quatre chemises vertes et deux chemises à carreaux**
- **Cinq chemises à carreaux**
- **Deux chemises vertes, une chemise à carreaux et deux chemises à fleurs**

Oui, mais combien coûtent donc une chemise verte, une chemise à carreaux et une chemise à fleurs ?
Je sens que je vais exploser.
Le lecteur peut-t-il m'aider ?

Annexe 2



Annexe 3

LA MATINEE entière n'est qu'une suite de problèmes.
Il y a **24 élèves** dans ma classe.
Et je sais de source sûre que quelqu'un va apporter des choux à la crème à partager.
Nous occupons **4 rangées** de **6 pupitres** chacune.

Que se passera-t-il si Mme Fibonacci décide d'aligner les pupitres en 6 rangées ?
8 rangées ? 3 rangées ? 2 rangées ?

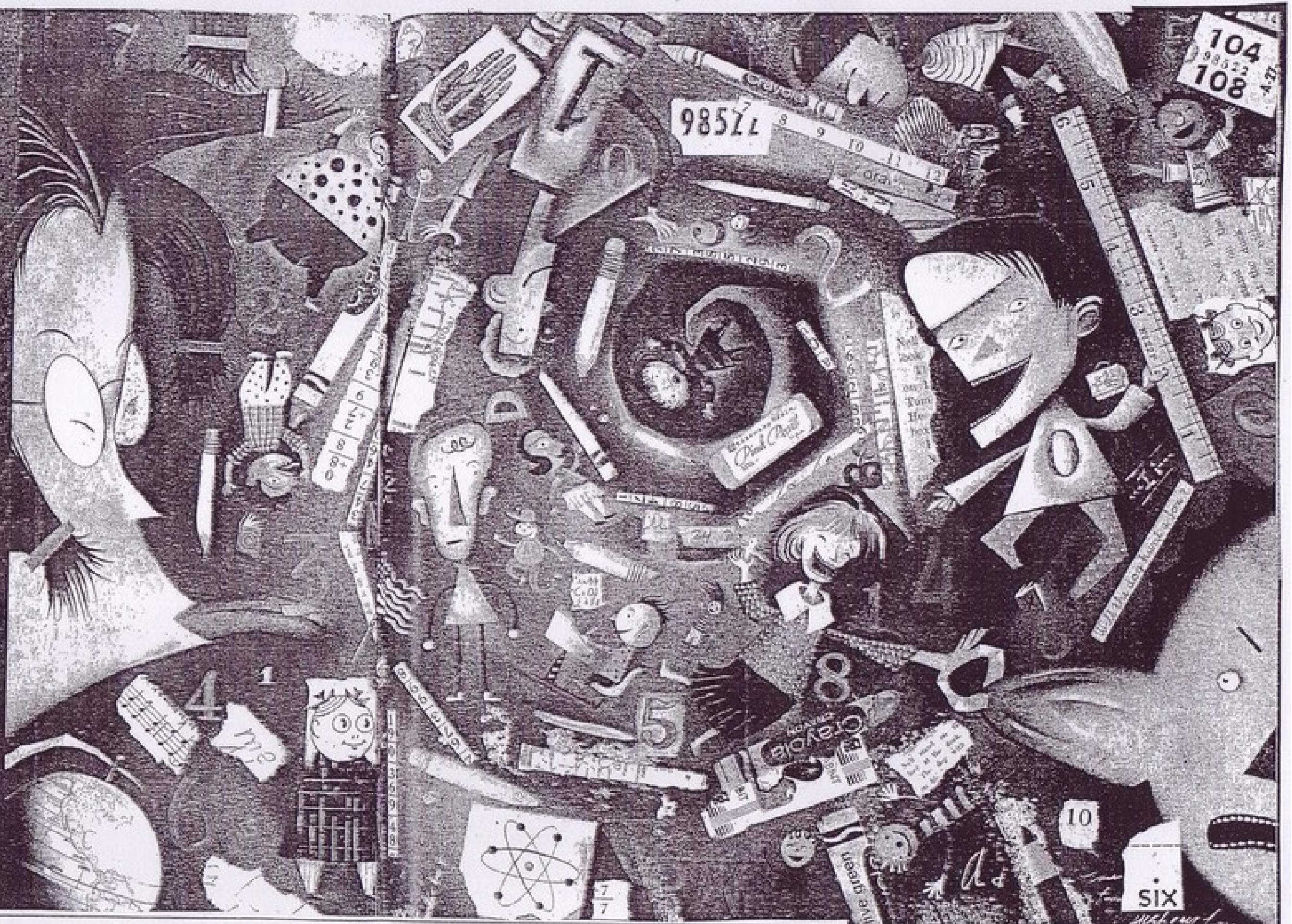
JE COMPTE à nouveau les 24 élèves de notre classe, mais cette fois 2 par 2.

Jacques gratte sa copie du bout du doigt.
- **Combien y a-t-il de doigts dans notre classe ?**

Kevin tire l'oreille d'Eric.
- **Combien y a-t-il d'oreilles dans notre classe ?**

Sandrine, la nouvelle, me tire la langue.
- **Combien y a-t-il de langues dans notre classe ?**

JE sens que je vais péter les plombs quand sonne l'heure de la cantine.



Le problème des rangées me tourne la tête. Depuis ce matin, je range les petites voitures dans mon garage, j'aligne les capsules de bière de ma collection, j'ordonne en rangées les dinosaures de mon autre collection.

- **J'ai remarqué que si je mets les dinosaures par rangées de 6, il en reste trois**
- **Si je les place par rangées de cinq, il n'en reste pas.**

Et voilà que j'invente des problèmes maintenant !

1. **si je les mettais par rangées de trois, en resterait-il ?**
2. **si je les mettais par rangées de deux, en resterait-il ?**
3. **Finalement, combien est-ce que je possède de dinosaures ? Je me souviens seulement que j'en ai un nombre inférieur à 50, mais proche de 50.**

La malédiction des maths m'est réellement tombée dessus !

Annexe 4

Malheureusement pour moi, **LE DEJEUNER** se compose de pizza et de tarte aux pommes. Chaque pizza est divisée en 8 parts égales. Chaque tarte est divisée en 6 parts égales. Vous voyez ce que ça implique ?

Des fractions.

① Si je veux 2 parts de pizza, dois-je réclamer :

a. 1/8
b. 2/8
c. 2 parts de pizza

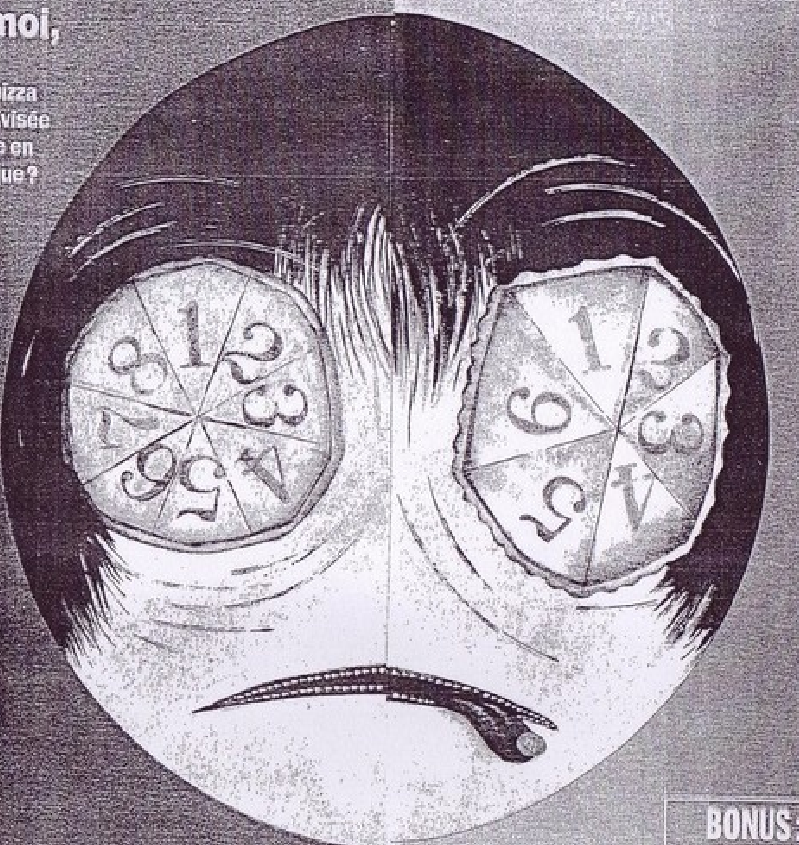
② Quel est l'autre moyen de réclamer 1/2 tarte aux pommes ?

a. 2/6
b. 3/6
c. fifty-fifty apple pie

③ Qu'est-ce qui est meilleur ?

a. 1/2 pizza
b. 1/2 tarte aux pommes

Comme nous n'avons pas encore étudié les fractions, je picore 12 radis 3 par 3 que je croque 2 par 2.



L'après-midi, chaque matière pose un problème.

LA GEOGRAPHIE

pose un problème de poids et mesures :

Le fleuve Mississippi est long de 4 000 kilomètres.

Un M&M's est long d'un centimètre.

Sachant qu'il y a 100 centimètres dans un mètre et 1 000 mètres dans un kilomètre :

① Evaluez le nombre de M&M's qui seraient nécessaires pour mesurer le fleuve Mississippi.

② Evaluez le nombre de M&M's que vous mangeriez s'il vous fallait mesurer le fleuve Mississippi à l'aide de M&M's.

BONUS : Peut-on épeler Mississippi sans M&M's ?

Je n'arrive plus à digérer les pizzas et les tartes. Je somnole en classe quand tout à coup, me voilà propulsé dans un cauchemar.

Il y a des tartelettes qui voltigent autour de moi. En les comptant le tournis augmente. Il y en a 20.

Le boulanger me dit : tu vas les placer dans des boites. Bing, je reçois cinq boites sur la tête. Il y en a deux jaunes et trois vertes.

Le boulanger continue : il faut utiliser toutes les boites et les boites d'une même couleur doivent contenir le même nombre de tartelettes. Tu peux, si tu veux, partager les tartelettes en deux ou en trois parts égales, mais pas plus.

Je me mets au travail, mais j'hésite car il y a plusieurs façons.

Tout ça augmente mon mal de cœur. Je vais vomir si tu ne m'aides pas…

Premier saut pour ... cabri ou ayez le déclic

Jean-François MUGNIER, Collège J. Mercusot, Sombernon

***Mots clés** : cabri, logiciel de géométrie, géométrie, 6ème, initiation, notions fondamentales, symétrie axiale, colorier, polygone, perpendiculaire.*

Pour ceux de nos collègues qui n'ont pas encore pu ou voulu se « lancer » avec un logiciel de géométrie, voici une très modeste façon de commencer en 6e. Elle ne réclame aucune compétence particulière en informatique. Si CABRI est installé sur chaque poste, chaque élève peut travailler de façon autonome, à son rythme. On peut placer 2 élèves par poste sans problème... sauf classe particulièrement difficile !

Il existe plusieurs versions de CABRI 2, dont une "W" pour Windows XP qui permet les « copier/coller » dans Word ou Open Office, par exemple. La version précédente, qui fonctionne sous DOS, ne copiera vos figures, qu'avec W98. Mais pour les élèves, cela n'a pas d'incidence.

Si votre établissement n'est pas assez riche, je vous conseille de télécharger **gratuitement** le logiciel « Déclic » qui est très semblable à Cabri, avec même certains avantages pour le professeur. Par exemple une meilleure qualité de figures puisqu'elles sont en « vectoriel » et non en image. Les droites sont de vrais traits droits et non des escaliers ! Pour les figures du Collège, celui-ci me semble bien plus pratique que Géoplan qui oblige à donner un nom à chaque objet créé, alors que Cabri/Déclic sont plus conviviaux (avec la souris).

Ceci n'entraîne pas du tout que l'on y perde en rigueur ! Par exemple, pour définir une droite, il est nécessaire de montrer deux points déjà créés (mais pas obligatoirement nommés). Une droite peut aussi être définie par un point et sa direction, ce qui permet de la faire tourner. Intéressant pour que les figures ne soient pas toujours dans la position canonique.

Les fiches ci-après sont écrites **pour Cabri**. Si vous optez pour Déclic, il faudra faire de légères adaptations. Au bout de trois figures, on s'est habitué et on trouve même des avantages à Déclic !

Pour ce faire, voici quatre petits "trucs" qui vous rendront service avec Déclic.

1- Mode "aspect" :

Un clic droit fait passer en mode "aspect" qui permet de définir l'épaisseur du trait, la couleur, le codage, etc.

Le logiciel indique souvent "AMBIGU" car plusieurs objets sont trop proches. Un clic **droit** ouvre une fenêtre : "Levez l'ambiguïté". On sélectionne l'objet voulu et "sa" fenêtre-aspect s'ouvre ; il reste à faire ses choix.

2- Colorier l'intérieur :

Il n'est pas évident de trouver comment colorier l'intérieur d'un polygone tracé.

Quand le polygone est créé, il faut faire un clic **droit** pour passer en mode "aspect". Ensuite, on va près d'un sommet. S'affiche alors "ambigu" car le logiciel ne sait pas si on souhaite sélectionner le sommet ou le polygone. Clic gauche, la fenêtre "ambiguïté" apparaît. On sélectionne alors "polygone"-OK.

Dans le menu, on peut alors changer la couleur et la trame de remplissage. Attention à ne pas confondre avec la couleur du trait qui est celle du tour !

3- Nommer automatiquement :

Pour ne pas avoir à cliquer sur les points pour les nommer, il faut aller dans "Édition" puis "Préférences" et de sélectionner "nommer les points" dans "préférences générales". C'est recommandé si l'on souhaite l'utiliser avec des élèves. Dès qu'un point est créé, le menu permettant de le **nommer** s'affiche. De même, lorsqu'on crée un polygone, un menu s'affiche pour nommer chaque sommet. Puis un menu final permet de nommer le polygone si on le souhaite. Mais surtout, on peut gérer immédiatement les problèmes de remplissage de sa surface.

4- Nommer des images par une transformation :

Toujours dans "Édition" "Préférences", il peut être aussi intéressant de sélectionner "nommer les images". Ceci permet de nommer automatiquement les images sous la forme A' pour celle de A ou A'' pour celle de A', etc.
D'ailleurs, je vous invite à visiter toutes les options des "Préférences", on peut y déterminer son papier millimétré avec une vaste gamme de possibilités. Dans l'onglet "Export", il est bon de cocher "Croix", sinon les points ne sont pas marqués par un taquet sur la figure exportée.

LES FICHES (2 séances)

La première fiche : découverte du logiciel.

Il est bon d'expliquer aux élèves la signification du sigle CA.BR.I : **ca**hier de **br**ouillon **i**nteractif.
Cahier de brouillon signifie que l'on peut se tromper, effacer (clic et "Suppr"), recommencer, mais aussi et surtout que l'on va pouvoir modifier l'aspect de la figure en faisant bouger les éléments libres en les prenant dans la "main" (clic gauche en laissant appuyé) et en les déplaçant à la souris. Ceci est très intéressant pour constater les invariants…
Interactif est très important. Les élèves n'y sont pas sensibles dès le départ, il faudra qu'ils se fassent « piéger » plusieurs fois pour y faire vraiment attention ensuite. Cela signifie que Cabri leur « parle » et qu'ils doivent lire attentivement ce qui s'inscrit à l'écran avant de cliquer. Par exemple mettre un point libre ne produit pas le même effet que "point SUR cet objet".
Cette fiche permet de découvrir les notions fondamentales et l'organisation logique des menus déroulants de Cabri. Points, segments, droites, cercles (en rappelant qu'un cercle a un centre et un rayon). Les élèves les plus rapides iront voir les demi-droites, les perpendiculaires et parallèles, etc.

La série suivante : premiers pas en géométrie.

Construction 1 : reprise en main du logiciel qui permet de revoir les fondamentaux et de « bouger » la figure.

Construction 2 : objectifs identiques avec un peu plus de subtilité. Il faut expliquer comment obtenir une nouvelle page : "Fichier", "Nouveau", "Ne pas enregistrer". Par exemple, point **sur** un segment, permet de voir un point lié et les limites d'un déplacement. L'intersection est : point sur **deux** objets… mais Cabri le devine même avec "Point" en écrivant le mot « intersection », pas Déclic !

Construction 3 : certains élèves ne font que la commencer. Outre points, segments, droites, perpendiculaire, l'objectif est de tracer de nombreux cercles et de considérer leurs points d'intersection. Elle permet de faire la distinction entre milieu et centre mais un rappel oral du professeur n'est pas superflu pour attirer l'attention sur ce distinguo ! Vous avez certainement constaté que la confusion* avait la vie dure !

Construction 4 : Pour les élèves plus lents, la construction 3 sera reprise au cours d'une autre séance, viendra ensuite la 4. Elle montre tout l'intérêt d'un logiciel puisque les simples déplacements amènent à se poser des questions et à conjecturer des propriétés. Là, les points ne sont plus aussi libres et l'interactivité devient vraiment ludique. Bien sûr, le professeur devra faire une synthèse pour aider les élèves à formuler correctement les choses aperçues. Et il faudra y revenir…

Pour ma part, j'aborde la symétrie axiale (par le pliage) très tôt dans l'année, dès que l'on revoit les perpendiculaires. En effet la bonne définition (au collège) des perpendiculaires ne vient-elle pas du pliage ; c'est l'équerre en papier ! Les angles droits sont une conséquence et non un pré requis comme on le trouve encore dans beaucoup de livres, mais moins qu'avant quand même…

Deux droites sont perpendiculaires si le pliage sur l'une superpose les deux demi-droites de l'autre.

Deux droites sont perpendiculaires si l'une est un axe de symétrie pour l'autre.

Puis (et non avant) :

Deux droites perpendiculaires limitent 4 secteurs droits.

Le degré viendra après et n'a pas besoin des perpendiculaires.

* À propos des confusions de vocabulaire, je pense que les années de 6e et 5e sont fondamentales pour mettre celui-ci en place avec les expressions appropriées. Pour cela, je « joue » de temps en temps (lorsque l'occasion se présente bien) à l'animateur TV avec mes élèves en lançant les débuts d'expressions :

➢ Le milieu d'un … … … ? ? ?
— segment, répondent les chœurs.
➢ Le centre d'un … … … ? ? ?
— cercle, répondent les chœurs.
➢ La médiatrice d'un … … … ? ? ?
— segment, répondent les chœurs.
➢ La perpendiculaire à … … … ? ? ?
— une droite, répondent certains…
➢ … ? ? ?
— contenant un point, ajoutent les meilleurs !
➢ Etc. Parallèle, rayon, diamètre, bissectrice, côté, arête, surface, volume, … avec de curieuses réponses parfois !

De fiches de synthèses « Des mots pour le dire » sont bien utiles plus tard.

***CA** hier de **BR** ouillon **I** nteractif **

Élève : . . . .   **6** .

*CABRİ me permet de connaître les objets géométriques **de base** et leur environnement.*

*** Interactif** signifie que CABRI vous "parle" donc vous devez **bien LIRE** ce qu'il vous écrit pour pouvoir lui **répondre** correctement.
Vous pouvez aussi l'interroger … et il vous répondra (juste !).
☝ **Donc <u>je regarde</u> bien** ce que CABRI affiche lorsque j'approche **le pointeur** d'un objet.

<u>Fonctionnement :</u> → 1 clic **bref** signifie « je réponds **<u>oui</u>** » à la proposition de CABRI.
→ Un appui **continu** sur la touche **gauche** de la souris permet de <u>dérouler</u> le menu d'un bouton ou de <u>déplacer</u> un objet saisi dans la "main". ✌

expliqué oralement

Les points

- Dérouler le MENU et observer les **3** sortes de points possibles.
- Choisir [Point] puis marquer **cinq** points sur l'écran. On peut en nommer un.
- Aller sur [Aspect]. **Modifier** l'aspect de 4 de ces points : ou • ou o ou . **.**
- Revenir en pointeur. Montrer un point. Cliquer, il clignote. Appuyer sur [Suppr].

Les segments

- Choisir [Segment]. Placer un segment par : 1 clic + déplacement + 2e clic.
- Revenir en pointeur. Montrer le segment. Cliquer, il clignote. Appuyer sur [Suppr].
  Il ne reste plus que **ses 2** extr . . . . . s.   ← ***Compléter***
- Revenir sur [Segment] puis placer un autre segment **en montrant** bien **2** des **points** qui sont encore à l'écran.
- **Déplacer** le segment en le prenant dans la "main" (on laisse appuyé).
- **Déplacer** chacune de ses extrémités. Observer et comparer les 2 manières de déplacer.
- Supprimer une des extrémités. ☹ ! ?
- Supprimer TOUS les points de l'écran. Voici un écran tout neuf !

Les droites

- Choisir [Droite]. Placer une droite ; elle est définie par un <u>point</u> et sa <u>direction</u> (orientation).
- Saisir la droite pour la déplacer. Observer …
- Saisir le point rouge pour le déplacer. Observer
- Supprimer le point … Ah !   *Ça tourne ? Ça ne tourne pas ?*

<u>2e possibilité :</u>

- Placer 2 points **A** et **B** . ← Utiliser [Nommer], montrer le point (•) et taper en majuscule : ⇧ **et** A.
- Demander la droite (**AB**) → en montrant successivement chacun de ces 2 points.
- Saisir puis déplacer : soit **A**, soit **B**, soit la droite. Observer …
- Nettoyer l'écran par : [Fichier], [Nouveau], [Ne pas enregistrer].

Le cercle

Compléter

Un cercle est défini par son <u>c . . . . e</u> et son <u>r . . . n</u> .

<u>Voyons les 2 possibilités (il y en aura une 3e plus tard) :</u>

- Choisir [Cercle]. Cliquer une fois dans l'écran puis écarter le pointeur puis cliquer une 2e fois.
- ✓ Peut-on déplacer son centre ? Peut-on modifier le rayon du cercle ?
- ❖ Revenir en pointeur. Montrer le cercle, il clignote. Faire [Suppr]. Que reste-t-il ?
- Placer deux points **O** et **A**. Choisir [Cercle]. Montrer **O** (clic) puis montrer **A** (clic).   *Attention !*
- ✓ Observer ce qui se passe lorsqu'on déplace **O** ou **A** …
- ❖ Effacer l'écran.

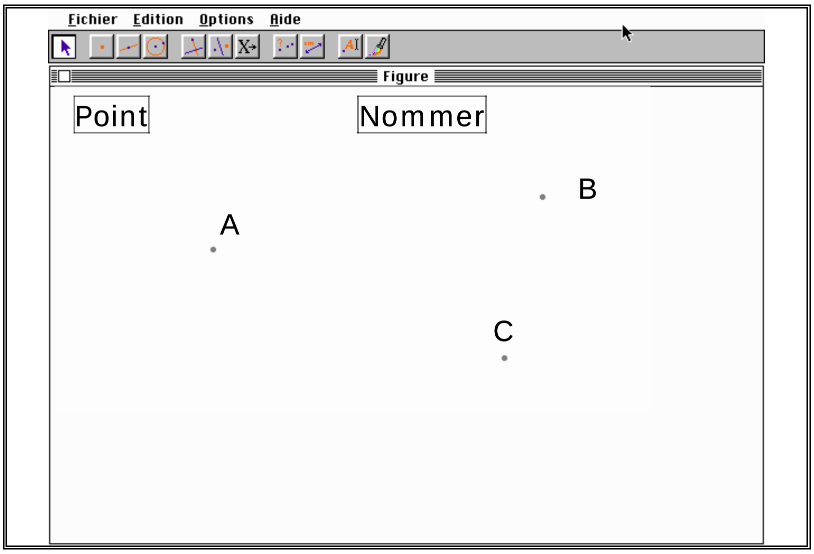
S'il vous reste du temps, goûtez de la **<u>demi-droite</u>**, des **<u>perpendiculaires</u>** et **<u>parallèles</u>** puis déplacez un peu pour … voir … et observer … et prendre bonne note pour l'avenir !

Vous avez bien travaillé, vous pourrez faire de la géométrie avec CABRI … À plus tard …

CABRI premières utilisations

Dès qu'un point a été créé, si on tape **immédiatement** son NOM, il s'écrit, sans qu'il soit nécessaire de "cliquer" sur NOMMER .

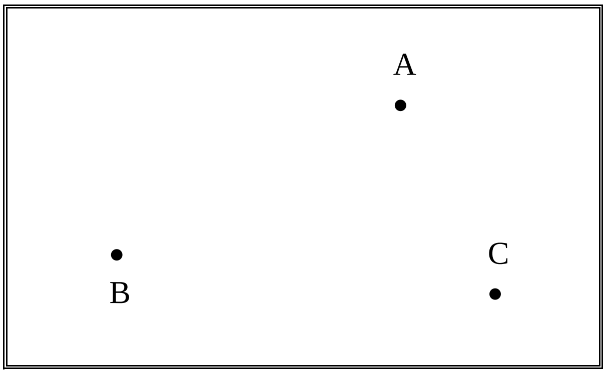
CONSTRUCTION 1



Placer 3 points **A**, **B** et **C**, quelconques.
Faire tracer la droite **(AB)** .
Tracer la **perpendiculaire à** la droite (AB) contenant le point **C.**
Tracer la **parallèle à** la droite (AB) contenant le point **C.**
Prendre dans la main le point A et **le déplacer**.
Prendre dans la main le point B et le déplacer.
Prendre dans la main le point C et le déplacer.
Prendre dans la main la droite (AB) et la déplacer.

CONSTRUCTION 2

Placer 3 points **A**, **B** et **C**, quelconques.
Faire tracer les **segments** [AB] , [AC] et [BC].
Placer un point **P** sur le segment [AB].
Tracer la parallèle à la droite (BC) contenant le point **P.**
Cette droite **coupe** le côté [AC] au point **R.**
Tracer la demi-droite [BR) .
Prendre dans la main successivement les points A, B, C et P et les déplacer…



CONSTRUCTION 3

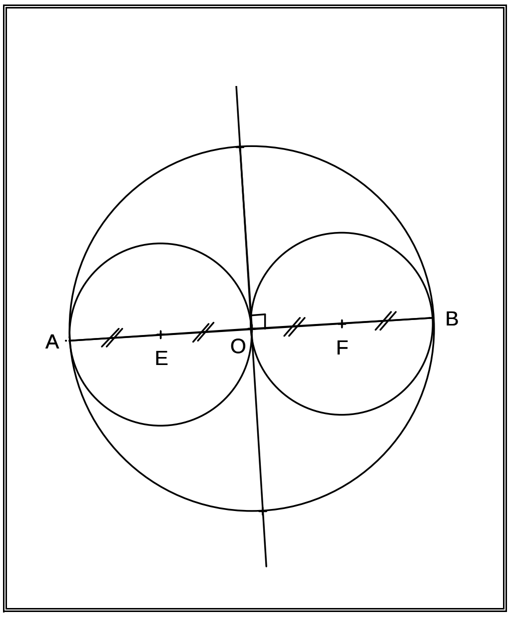
Placer 2 points **A** et **B**, quelconques.
Tracer le **segment** [AB].
Demander le milieu **O** du segment [AB].

Tracer le cercle de centre O et contenant le point A.
Demander le milieu **E** du segment [AO].
Demander le milieu **F** du segment [OB].

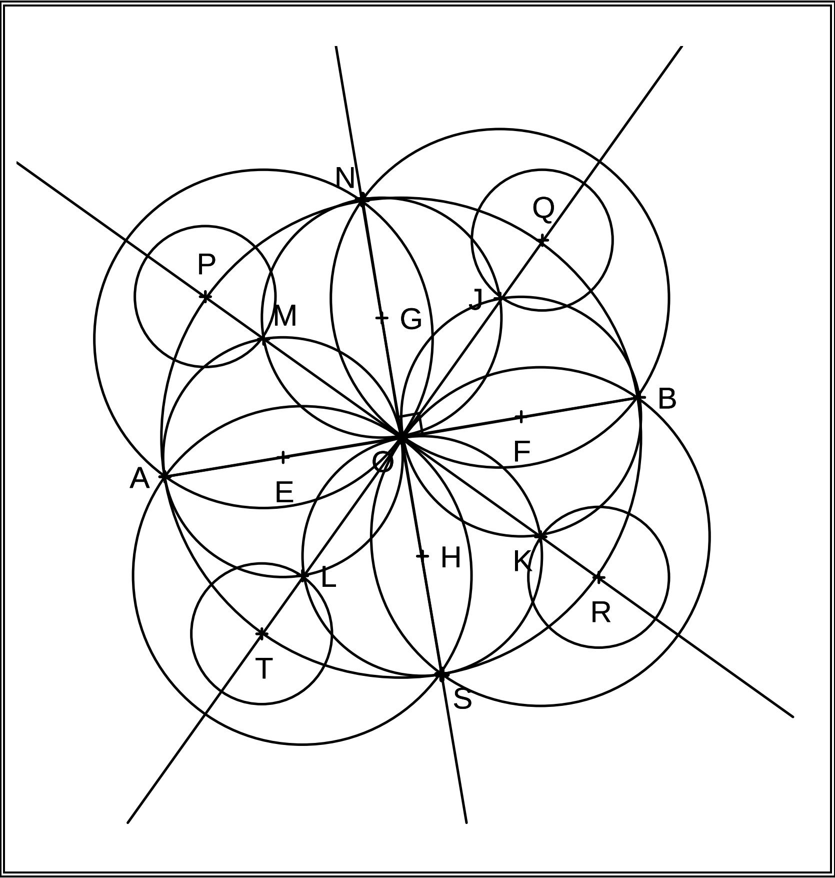
Tracer le cercle de centre E et contenant le point A.
Tracer le cercle de centre F et contenant le point B.

Demander la perpendiculaire à la droite (AB), contenant le point O.
Appeler **N** et **S** ses points d'intersection avec le 1er cercle.
Demander le milieu **G** du segment [ON].
Tracer le cercle de centre G et contenant le point N.
Demander le milieu **H** du segment [OS].
Tracer le cercle de centre H et contenant le point S.

Demander la feuille suivante pour continuer…



SUITE de la construction 3



Continuer en essayant d'obtenir la figure ci-contre

Il faut définir les points :
J, K, L et M.

Puis les points P, Q, R et T en traçant deux droites.

Puis tracer 2 fois quatre cercles :

- quatre "petits",
- quatre "gros".

CONSTRUCTION 4

- Placer 2 points **A** et **B** .
- Placer une droite (**d**) .
- Demander le **symétrique** du point **A** par rapport à l'**axe** (d).

↳ Pour cela, montrer le point A puis la droite (d), en cliquant dessus.

Le nommer $\mathbf{A_1}$.

- Faire de même avec B. Le nommer $\mathbf{B_1}$.
- Tracer les segments [AB] et $[A_1B_1]$.

Déplacer A , B ou (d) … Observer …

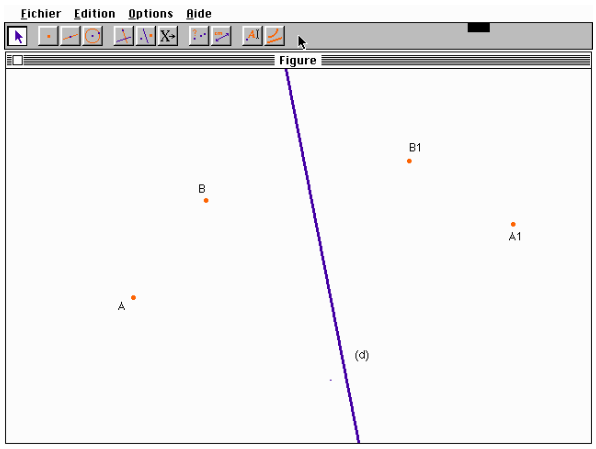
Déplacer A ou/et B pour amener le segment [AB] **sur** le segment $[A_1B_1]$.

Il y a plusieurs solutions …

Amener **B** sur $\mathbf{A_1}$.
OU Amener **A** sur $\mathbf{A_1}$.

☺ ☺ ☺

Écrivez vos remarques.



suite orale

Chenilles, papillons, sphinx et autres mammifères

Michel LAFOND

Vous avez sûrement entendu parler du "théorème du papillon". Or ce genre de papillon a fait des petits, car sous ce nom, on trouve maintenant plusieurs théorèmes qui ont en commun une figure plane évoquant vaguement un papillon.

Comme pour le rallye mathématique de Bourgogne, il semble y avoir une version collèges et une version lycées.

1. VOICI D'ABORD UN PETIT THEOREME DU PAPILLON, QU'ON APPELLERA DONC

Théorème de la chenille :

Si ABCD est un quadrilatère concave tel que AB et CD se coupent en O, alors les triangles AOD et COB ont même aire si et seulement si AC est parallèle à BD.

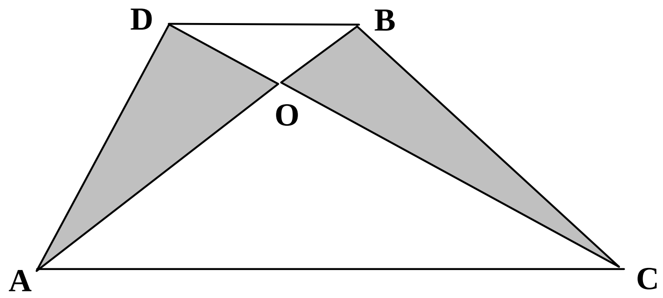


Figure 1

La démonstration est rapide : (Figure 1 ci-dessus)
Les triangles AOD et COB ont des aires égales si et seulement si les triangles ABD et CDB ont des aires égales, ce qui a lieu (à cause de leur base commune BD) si et seulement si leurs hauteurs issues de A et de C sont égales, c'est-à-dire si et seulement si AC est parallèle à BD.

2. L'ENONCE QUE JE CONSIDERE COMME LE "VRAI" THEOREME DU PAPILLON EST : (Figure 2)

Théorème du papillon : (Figure 2)

Si dans un cercle, AB est une corde de milieu I, et si CD et EF sont deux autres cordes passant par I, alors :
Aile 1 : Si FC et DE coupent AB respectivement en M et N alors I est milieu de MN.
Aile 2 : Si FD et EC coupent AB respectivement en P et Q alors I est milieu de PQ.

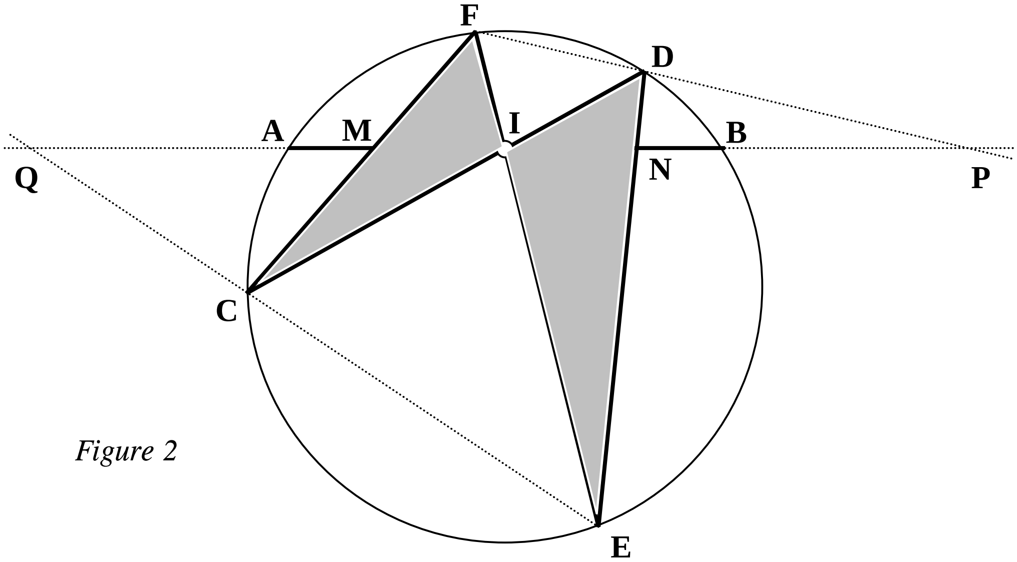


Figure 2

On trouve ce théorème énoncé comme ci-dessus :

- dans "Redécouvrons la géométrie" de Coxeter et Greitzer (DUNOD) et,
- sous le nom de "Butterfly theorem" dans l'encyclopédie de Weisstein.

Les références sont donc sérieuses.

3. REMARQUES

Coxeter indique que Horner (celui de la méthode de Horner pour les racines de polynômes) en a proposé une démonstration dès 1815, mais que, comme d'habitude les Chinois connaissaient déjà ce résultat.

Une coïncidence troublante est qu'il existe un papillon nocturne nommé "géomètre" de la famille des géométridés !

En général, on ne cite dans le théorème du papillon qu'une aile sur les deux, mais pourquoi mutiler cette pauvre bête ?

Revenons à nos moutons :

4. VOICI UNE DEMONSTRATION TRES SIMPLE TROUVEE SUR INTERNET (Figure 3 ci-après)

Elle n'utilise que les propriétés élémentaires des angles inscrits et des triangles semblables.
Elle ne concerne que l'aile 1, mais se généralise sans problème à l'aile 2.

Soient K le milieu de CF, H le milieu de DE.
Les triangles FCI et DEI sont semblables (leurs angles sont égaux).

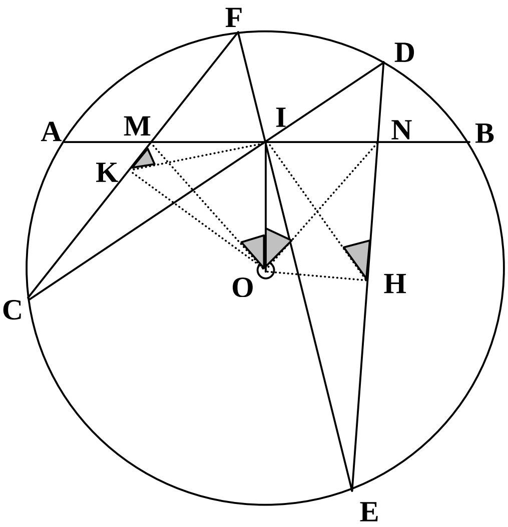


Figure 3

Donc $\frac{FC}{FI} = \frac{DE}{DI}$ ce qui entraîne $\frac{FK}{FI} = \frac{DH}{DI}$ (la moitié des rapports précédents).
Les triangles FKI et DHI sont donc eux aussi semblables d'où l'égalité des angles FKI et DHI en grisé sur la figure.
Les quadrilatères OIMK et OINH étant inscriptibles à causes des angles droits en K,I et H, on en déduit l'égalité des angles FKI et MOI d'une part, et celle des angles DHI et NOI d'autre part, d'où par transitivité l'égalité des angles MOI et NOI donc des segments IM et IN.

- Pour comparer, voici la démonstration de Coxeter, bien plus technique, utilisant à fond les triangles semblables (Figure 4) :

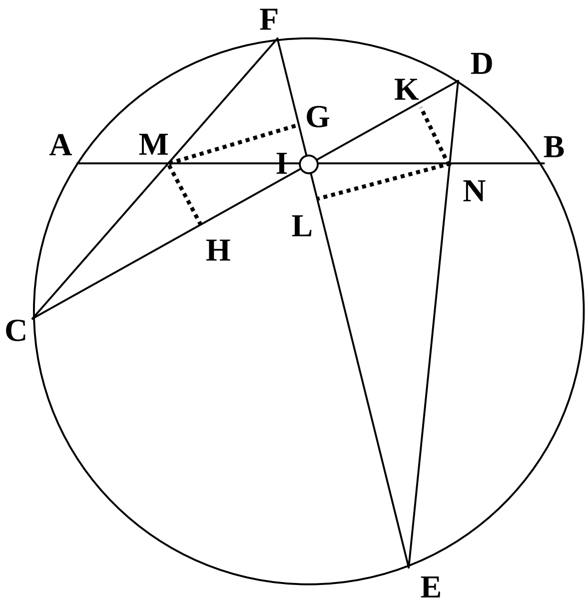


Figure 4

M se projette en H sur CD, en G sur FE.
N se projette en K sur CD, en L sur FE. On pose IA = IB = x.
On a $\frac{IM}{IN} = \frac{MG}{NL}$ (car les triangles IMG et INL sont semblables).
On a $\frac{IM}{IN} = \frac{MH}{NK}$ (car les triangles IMH et INK sont semblables).

On a $\frac{MG}{NK}=\frac{MF}{ND}$ (les triangles MGF et NKD sont semblables car les angles inscrits en F et en D sont égaux).

On a $\frac{MH}{NL}=\frac{MC}{NE}$ (car les triangles HMC et LNE sont semblables).

On en déduit (en utilisant une propriété bien connue des cordes concourantes d'un cercle) :

$$\frac{IM^2}{IN^2}=\frac{MG}{NL}\times\frac{MH}{NK}=\frac{MG}{NK}\times\frac{MH}{NL}=\frac{MF}{ND}\times\frac{MC}{NE}=\frac{MF\times MC}{ND\times NE}=\frac{MA\times MB}{NB\times NA}=\frac{(x-MI)(x+MI)}{(x-NI)(x+NI)}=\frac{x^2-MI^2}{x^2-NI^2}.$$

En examinant les deux bouts, on arrive facilement à $IM^2 = IN^2$ d'où IM = IN.

Là encore, pas de problème pour l'aile 2 de la démonstration, seules les lettres changent.

- Il existe aussi une démonstration très intéressante mais longue, utilisant l'analytique, qui démontre les deux ailes en même temps, une autre qui utilise la géométrie projective ! et bien d'autres encore paraît-il.

Je pense que ce grand nombre de démonstrations est le signe d'un "bon" théorème.

5. Mais ce n'est pas tout ! La famille s'agrandit encore avec la naissance du petit dernier theoreme qu'on ne sait pas trop comment appeler

Le sphinx étant un grand papillon, voici donc :

Théorème du sphinx : (Figure 5 ci-dessous)

Si dans un cercle, AB est une corde de milieu I, et si CD et EF sont deux autres cordes coupant AB respectivement en K et L avec I milieu de KL, alors :

Aile 1 : Si FC et DE coupent AB respectivement en M et N alors I est milieu de MN.

Aile 2 : Si FD et EC coupent AB respectivement en P et Q alors I est milieu de PQ.

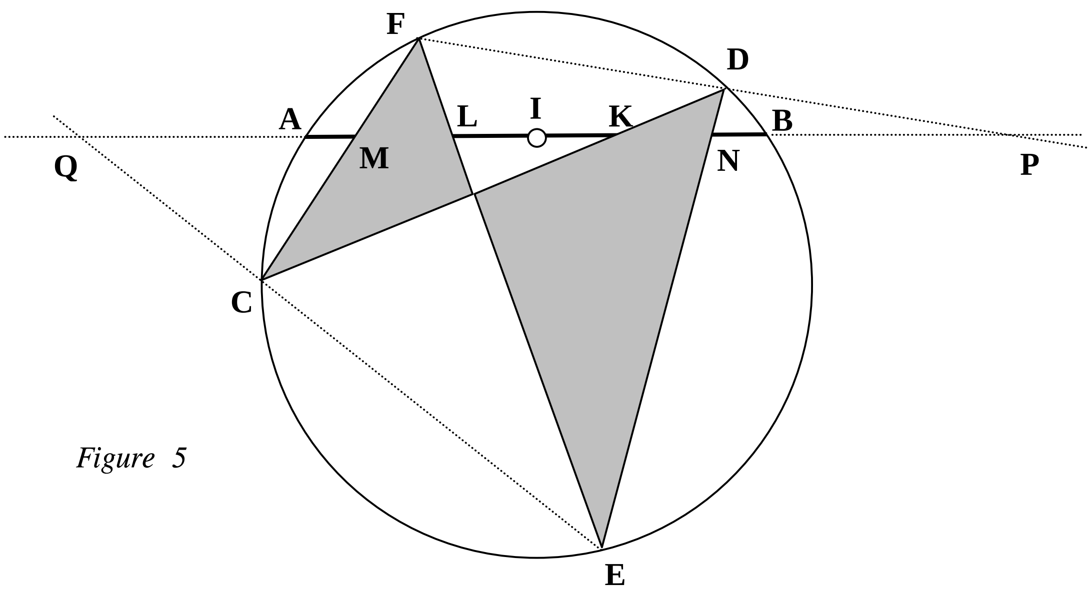


Figure 5

Je n'ai pas essayé de démontrer cette généralisation, mais sans doute, des lecteurs voudront bien s'attaquer à cette énigme du sphinx, que j'ai trouvée dans un numéro récent de MATHEMATICS MAGAZINE. (Octobre 2005).

Somme de deux carrés

(suite)

La primalité de 1 000 009

Léonhard EULER
(Utrum hic numerus 1000009 sit primus nec ne inquiritur
Nova Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae 1797)

Tristan DERAY, Lycée Hilaire de Chardonnet, Chalon-sur-Saône

Comme le nombre est d'évidence somme de deux carrés ; à savoir 1000^2+3^2*, la question est donc de savoir s'il peut être décomposé en deux carrés de plus d'une façon* (voir le début de l'article dans la Feuille de Vigne n° 101, pages 15 à 19). *En effet, s'il ne peut l'être, il sera possible d'affirmer que le nombre est premier, par contre s'il existe une autre décomposition, il ne sera pas premier, et il sera alors possible de déterminer ses diviseurs. Si l'on considère le carré* x^2*, il faut donc rechercher s'il existe un autre carré, à savoir 1 000 009 -* x^2*, en dehors des cas* $x=3$ *et* $x=1000$*. Nous le ferons de la manière suivante :*

Si le carré choisi se termine par 9, l'autre carré doit nécessairement être divisible par 5, et même en réalité par 25. Par conséquent l'expression $1000009-x^2$ *doit être divisible par 25, et il est évident que l'on doit avoir* $x=25a+3$ *; on a alors l'expression* $1000000-6\times 25a-25^2a^2$ *qui divisée par 25 donne* $40000-6a-25a^2$*, qui doit lui–même être également un carré.*

À ce stade deux cas peuvent être envisagés. Selon que a *est un nombre pair ou un nombre impair. Dans le premier cas, si* $a=2b$ *et en divisant par 4, l'expression qui en résulte doit également être un carré :* $A=10000-3b-25b^2$.
Dans l'autre cas, en prenant $a=4c+1$*, on est conduit à l'expression elle-même carrée d'un entier :* $B=39969-224c-400c^2$ *qui peut effectivement être un carré impair ; par ailleurs, si l'on prend, dans ce cas toujours,* $a=4d-1$*, la formule qui s'en déduit est* $C=39981+176d-400d^2$ *qui divisée par 8 donne pour reste 5 et qui ne peut en aucun cas être un carré. Nous devons donc étudier les deux expressions A et B.*

Décomposition de $B=39969-224c-400c^2$

Donnons ici à la lettre c successivement toutes les valeurs positives et négatives 0, 1, 2, 3, … et puisque l'expression $400c^2\pm 224c$ *est soustraite de la valeur 39969 pour les différentes valeurs positives ou négatives de c, notons les différents nombres devant être soustraits dans deux colonnes et les différences successives entre ceux–ci.*

c	$400c^2-224c$	*Différence*	*c*	$400c^2+224c$	*Différence*
0	*0*		*0*	*0*	
1	*176*	*176*	*1*	*624*	*624*
2	*1152*	*976*	*2*	*2048*	*1424*
3	*2928*	*1776*	*3*	*4272*	*2224*
4	*5504*	*2576*	*4*	*7296*	*3024*

Il est évident d'après ce tableau que les différences augmentent, dans les deux cas, de 800.

Ces différences sont alors continuellement soustraites d'un nombre donné 39 969 ; par commodité on le fera sur deux colonnes ; de sorte que l'on pourra voir si le nombre résultant est un carré.

39969 176	39969 624
39793 976	39345 1424
38817 1776	37921 2224
37041 2576	35697 3024
34465 3376	32673 3824
31089 4176	28849 4624
26913 4976	24225 5424
21937 5776	18801 6224
16161 6576	12577 7024
9585 7376	5553
2209*	

Parmi tous ces nombres, le seul carré qui apparaît est $2209 = 47^2$*. De là, on peut en déduire que le nombre proposé n'est pas premier mais possède des diviseurs, même s'il apparaît dans l'étude « table de nombres premiers jusqu'à un million et au-delà »* (Euler avait publié une étude conduisant à une table des nombres premiers inférieurs à 1 000 000). *Pour trouver ses diviseurs, il faut remarquer que ce carré est engendré par la valeur* $c = -10$ *; d'où l'on déduit celle de* $a = -39$ *; et évidemment celle de* $x = 25a + 3 = -972$ *; on a alors :* $1000009 - x^2 = 55225 = 235^2$.

Par conséquent, nous avons les deux décompositions $1000^2 + 3^2 = 972^2 + 235^2$ *; d'où* $1000^2 - 235^2 = 972^2 - 3^2$ *; d'où il résulte* $(1000-235)(1000+235) = (972-3)(972+3)$ *; c'est-à-dire* $1235 \times 765 = 969 \times 975$.

On a alors $\dfrac{1235}{975} = \dfrac{969}{765}$*. En simplifiant, il vient alors* $\dfrac{19}{15}$*, et alors il est possible de conclure que le nombre étudié possède un diviseur commun avec la somme des carrés* $19^2 + 15^2$*, à savoir 293. En fait, on trouvera que* $1000009 = 293 \cdot 3413$.

Il apparaît ainsi qu'une erreur avait été faite dans la table mentionnée précédemment, dans laquelle tous les nombres premiers entre 1000000 et 1002000 sont donnés, sans doute la raison de l'erreur est–elle que le diviseur 293 avait été oublié.

Décomposition de $A = 10000 - 3b - 25b^2$

Cette expression vaut le centième de $1000009 - x^2$*, et deux cas doivent être distingués dans l'étude de sa décomposition selon que b est un nombre pair ou impair. Dans le premier cas, il est évident que si b n'est pas lui–même "pairement pair" (c'est-à-dire de la forme* $2k$*, avec* k *pair) l'expression donnée ne peut pas être un carré. Il faut donc avoir* $b = 4c$ *; et l'expression qui vient après divisée par 4 est* $2500 - 3c - 100c^2$ *; et il n'est pas difficile de voir qu'il ne s'agit jamais d'un carré, sauf dans le cas où*

$c=0$. Tout d'abord, il est clair que ce ne sera pas un carré si $c=\pm1$, et de manière analogue, ce ne sera pas un carré si $c=\pm2$. Pour $c=\pm3$, notre expression donne $2500-900\pm9=1600\pm9$; qui ne peut être un carré. De plus, si l'on suppose que $c=\pm4$, on aura $2500-1600\pm12=900\pm12$ qui ne sera certainement pas un carré. Si l'on prend $c=\pm5$; on s'aperçoit vite qu'il ne s'agit pas d'un carré, car on obtient $2500-2500\pm15=0\pm15$.

Dans le second cas, pour lequel b est un nombre impair, on prend tout d'abord $b=4d+1$; l'expression qui en résulte est $9972-212d-400d^2$, qui divisée par 4 donne $2493-53d-100d^2$ qui dans le cas $d=0$; n'est d'évidence pas un carré. Si l'on prend ensuite $d=\pm1$ qui donne 2393 ± 53 ; on n'obtient pas de carré. Dans le cas $d=\pm2$, il vient 2093 ± 106. Dans le cas $d=\pm3$, il vient 1593 ± 159 ; et aucun carré n'apparaît ; ni dans le cas $d=\pm4$; qui donne 893 ± 212. Dans le cas $d=-5$, il vient $-7+265$. Pour un nombre de la forme $4d-1$, on obtient $9978+188d-400d^2$ qui doit être un nombre pair ; mais comme il n'est pas divisible par 4, il ne peut donc être un carré.

Suivant cette méthode, avec les nombreux calculs qui ont été faits, nous nous proposons d'examiner un autre nombre qui peut s'écrire comme somme de deux carrés, à savoir $1000081=1000^2+9^2$ et nous cherchons à savoir s'il peut être décomposé en somme de deux carrés d'une autre manière. Comme dans le cas précédent, l'un ou l'autre de ces carrés doit être divisible par 5. Par conséquent l'un est posé égal à x^2 ; et nous voyons que la différence $1000081-x^2$ doit être un carré divisible par 5 ou par 25.

Posons $x=25y+9$, ce qui mène à l'expression $1000000-18\times25y-25y^2$ qui, une fois divisée par 25, donne $40000-18y-25y^2$. Si y est pair, alors il s'écrit $y=2a$; en divisant à nouveau l'expression par 4, il vient : $A=10000-9a-25a^2$. Si y est impair ; il peut s'écrire soit $y=4b+1$ qui conduit à l'expression $B=39957-272b-400b^2$ qui est un nombre impair et donne alors un reste égal à 5 si on le divise par 8, elle ne peut donc pas être un carré, par conséquent la formule qui donne B est à laisser. Soit y est impair ; et peut encore s'écrire $y=4c-1$, l'expression à laquelle on arrive dans ce cas est $B=39993+128c-400c^2$; le nombre 39993 donne pour reste 1 quand on le divise par 8 ; examinons ce cas maintenant.

Décomposition de $C=39993+128c-400c^2$

Il est évident que les nombres de la forme $400c^2\pm128c$ doivent être retranchés du nombre 39993 ; et ces calculs sont simplifiés comme dans le cas précédent en prenant les différences entre les autres nombres ; pour les valeurs positives ou négatives de c. On les consigne dans le tableau suivant :

c	$400c^2-128c$	*différence*	*c*	$400c^2+128c$	*différence*
0	*0*		*0*	*0*	
1	*272*	*272*	*1*	*528*	*528*
2	*1344*	*1072*	*2*	*1856*	*1328*
3	*3216*	*1872*	*3*	*3984*	*2128*

Par conséquent nous soustrayons ces différences, qui vont en croissant de 800, du nombre donné 39993. Le calcul nous donne :

39993 *272*	*39993* *528*
39721 *1072*	*39465* *1328*
38649 *1872*	*38137* *2128*
36777 *2672*	*36009* *2928*
34105 *3472*	*33081* *3728*
30633 *4272*	*29353* *4528*
26361 *5072*	*24825* *5328*
21289 *5872*	*19497* *6128*
15417 *6672*	*13369* *6928*
8745 *7472*	*6441*
1273	

Il est clair qu'aucun carré n'apparaît ici.

Décomposition de $A = 10000 - 9a - 25a^2$

A la place de a *, on introduit un nombre pair tel que* $a = 4e$ *; de sorte qu'en divisant l'expression par 4, nous obtiendrons* $2500 - 9e - 100e^2$*. Ainsi, les nombres de la forme* $100e^2 \pm 9e$ *devront être soustraits du nombre donné (2500) ; comme l'indique la table suivante ; dans laquelle le nombre* e *peut être soit positif soit négatif.*

e	$100e^2 - 9e$	*différence*	$100e^2 + 9e$	*différence*
0	*0*		*0*	
1	*91*	*91*	*109*	*109*
2	*382*	*291*	*418*	*309*
3	*873*	*491*	*927*	*509*

Ensuite nous devrons soustraire ces différences, qui vont croissantes de 200, du nombre donné 2500, de la manière suivante :

2500 *91*	*2500* *109*
2409 *291*	*2391* *309*
2118 *491*	*2082* *509*
1627 *691*	*1573* *709*
936 *891*	*864*
45	

Aucun carré n'apparaît ; hormis 2500, qui conduit à un carré au delà de 1000^2.

Maintenant si a est un nombre impair, tout d'abord de la forme $4f+1$, notre formule deviendra $9966-236f-4f^2$, qui n'est pas un multiple de quatre et ne peut donc être un carré. Si nous posons $a=4f-1$, l'expression obtenue est $9984+164f-400f^2$ qui est un multiple de quatre, et qui divisée par quatre donne $2496+41f-100f^2$. Les nombres de la forme $100f^2 \pm 41f$ sont alors soustraits du nombre donné, et pour f positif ou négatif, on aura :

f	$100f^2-41f$	*différence*	f	$100f^2+41f$	*différence*
0	*0*		*0*	*0*	
1	*59*	*59*	*1*	*141*	*141*
2	*318*	*259*	*2*	*482*	*541*
3	*777*	*459*	*3*	*3984*	*541*

Les différences sont ensuite nécessairement soustraites du nombre donné :

2496 *59*	*2496* *141*
2437 *259*	*2355* *341*
2178 *459*	*2014* *541*
1719 *659*	*1473* *741*
1060 *859*	*732*
201	

Comme dans tous ces calculs, aucun carré ne ressort ; il est certain que le nombre 1000081 ne peut être décomposé en carré que d'une unique manière, et est donc un nombre premier. Il est indiqué dans la table citée précédemment, et il est à remarquer la grande facilité des calculs par lesquels il a été possible d'établir la propriété.

Cependant, il est regrettable que cette méthode ne puisse pas être utilisée pour n'importe quel nombre ; mais est limitée aux nombres qui non seulement sont somme de deux carrés, mais qui se terminent par 1 ou 9 ; puisque alors l'autre carré sera divisible par 5.

Toutefois, il est clair que tous les nombres de la forme $4n+1$ se terminant soit par 1, soit par 9 se prêtent parfaitement à cette méthode de recherche ; si nous savons qu'un tel nombre peut être décomposé en somme de deux carrés, l'un d'eux est nécessairement divisible par 5. En suivant alors la méthode décrite précédemment, si l'on montre que le nombre donné ne se laisse décomposer en somme de deux carrés que d'une seule façon, alors on pourra affirmer qu'il est premier ; mais si par contre il peut être décomposé en somme de deux carrés de diverses façons, il sera alors possible d'en trouver des diviseurs comme il a été vu plus haut. Cependant, s'il apparaît que le nombre donné ne peut pas être décomposé en somme de deux carrés, alors c'est une preuve qu'il n'est pas premier, même si ses facteurs ne peuvent être déterminés, et l'on peut conclure qu'il admet au moins deux diviseurs, dont l'un est de la forme $4n-1$.

Si un nombre impair est de la forme $4n+1$, il admet toujours une décomposition en somme de deux carrés.

- Si cette décomposition est unique, il est premier.
- S'il existe plusieurs décompositions, il est composé (et l'on sait trouver des diviseurs grâce à la décomposition en somme de deux carrés)

Si un nombre impair est de la forme $4n-1$, et s'il n'admet pas de décomposition en somme de carrés, alors il est composé (même si l'on ne sait pas a priori trouver de diviseurs).

Comme Fermat ne s'était pas arrêté au problème de la représentation d'un entier en somme de deux carrés, mais s'était encore intéressé aux nombres du type x^2+3y^2 ; Euler reprit à son compte ces recherches sur la représentation de nombres par des « formules » X^2+NY^2 (ou plus généralement sous la forme mx^2+ny^2) posant la question de savoir quels sont les nombres premiers admettant une représentation sous la forme a^2+Nb^2 (*a* et *b* entiers) et plus généralement encore sur les valeurs entières pour lesquelles l'unicité de la représentation d'un entier premier avec $N=mn$, entraînait sa primalité.

En 1778, il écrivait à son collègue Béguelin de l'Académie de Berlin dont les travaux portaient sur la représentation des entiers comme somme de deux carrés :

« *... j'ai remarqué que plusieurs autres formules semblables de la forme* nx^2+y^2 *sont douées de la même propriété, & que, pourvu qu'on donne à la lettre n des valeurs convenables, telles que, par exemple 2, 3, 4, 5 , 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13 &c. on en tire toujours des nombres premiers ; ou bien, qu'à l'exclusion des valeurs suivantes de n 11, 14, 17, 19, 20, 23, 26, 27 &c. La formule* nx^2+y^2 *donne toujours des nombres premiers ; car le nombre 15 par exemple quoique contenu d'une seule façon dans la formule* $11x^2+y^2$, *est un nombre composé. Il en est ainsi des autres nombres que je viens d'exclure ; au lieu que ceux que j'ai nommé valeurs convenables, donnent sûrement pour premier, tout nombre qui est contenu d'une seule façon dans la forme* nx^2+y^2*...* »

Il proposait alors une liste de 65 nombres entiers dits idoines répondant à la question.

Au soir de sa vie, Euler ne se contentait pas d'avoir découvert un nouveau continent, il y avait pris pied et invitait ses successeurs à poursuivre son oeuvre. Le fin sillon tracé par Fermat, devenait sous le labeur d'Euler un champ fertile dans lequel le jeune Lagrange allait faire une riche moisson, et ce dernier ne se méprenait pas recevant le legs, il écrivait au vieux mathématicien de Saint-Pétersbourg : « Il me semble qu'il n'y ait que Fermat et vous qui vous soient occupés avec succès de ces sortes de recherches, et si j'ai été assez heureux pour ajouter quelque chose à vos découvertes, je ne le dois qu'à l'étude que j'ai faite de vos excellents ouvrages. » Peu avant d'écrire ces lignes, Lagrange avait publié un mémoire *« Recherches Arithmétiques* » dans les Annales de l'Académie de Berlin (1773) ayant « ...pour objet les nombres qui peuvent être représentés par la formule $Bt^2+Ctu+Du^2$... » Il donnait alors un cadre général aux nombreuses recherches d'Euler, celui de l'étude des formes quadratiques binaires que Gauss viendrait parachever avec l'excellence qui s'attache à son nom dans ses *Recherches Arithmétiques*.

...
Un trésor est caché dedans.
Je ne sais pas l'endroit ; mais un peu de courage
Vous le fera trouver : vous en viendrez à bout.
Remuez votre champ dès qu'on aura fait l'oût :
Creusez, fouillez, bêchez; ne laissez nulle place
Où la main ne passe et repasse.»

MISE EN PAGE :
Françoise BESSE

COMITE DE REDACTION ET DE LECTURE :
Patrick GABRIEL
Marie-Noëlle RACINE
Alain MASCRET
Frédéric METIN

REDACTEUR EN CHEF :
Patrick GABRIEL

DIRECTEUR DE LA PUBLICATION :
Patrick GABRIEL, Directeur de l'IREM

N° D'ENREGISTREMENT :
0411 B 07793

DEPOT LEGAL :
n° 177 – 1er semestre 2007

IMPRESSION :
Service Reprographie

FEUILLE DE VIGNE
Université de Bourgogne – UFR Sciences et Techniques
IREM
9 Avenue Alain Savary – BP 47870 – 21078 Dijon cedex
☎ 03 80 39 52 30 – Fax 03 80 39 52 39
@ : iremsecr@u-bourgogne.fr.
http://www.u-bourgogne.fr/irem