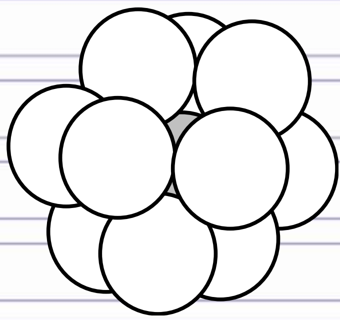
N° 101 – Octobre 2006

Feuille de Vigne

Irem de Dijon

- ✓ Une petite grammaire de la géométrie
- ✓ Somme de deux carrés
- ✓ L'affaire Grégory
- ✓ Autour d'un théorème méconnu



Revue Trimestrielle

Issn 0246-5752

Sommaire

MISE EN PAGE :
Françoise BESSE

COMITÉ DE RÉDACTION ET DE LECTURE :
Patrick GABRIEL
Sylvie LANAUD
Marie-Noëlle RACINE
Jean-François MUGNIER

RÉDACTEUR EN CHEF :
Patrick GABRIEL

DIRECTEUR DE LA PUBLICATION :
Patrick GABRIEL, Directeur de l'IREM

N° D'ENREGISTREMENT :
0411 B 07793

DÉPÔT LÉGAL :
n° 176 – 2ème semestre 2006

IMPRESSION :
Service Reprographie

FEUILLE DE VIGNE
Université de Bourgogne – UFR Sciences et Techniques
IREM
9 Avenue Alain Savary – BP 47870 – 21078 Dijon cedex
☎ 03 80 39 52 30 – Fax 03 80 39 52 39
@ : iremsecr@u-bourgogne.fr.
http://www.u-bourgogne.fr/irem

Editorial

Cent-un doit-il s'écrire avec un tiret ?

Peut-être cette question vous paraît-elle superflue, suspecte ? Vous risquez de changer d'avis en lisant l'article d'Alain Mascret, qui met très justement en évidence le problème de l'écriture *en français* des mathématiques (et pas seulement d'elles). Lorsqu'il y a bien longtemps (c'était au vingtième siècle), j'ai « reçu » pour la première fois un Inspecteur dans ma classe, il m'a expliqué que je ne devais pas embêter mes petits élèves de collège avec les notations, qui sont si compliquées en mathématiques ; que si l'on comprenait, en lisant « la droite [AB] », qu'il s'agissait de la droite (AB), il n'était pas la peine de faire de remontrances aux auteurs de cette expression contradictoire.

Mais on en est revenu. Et lorsque le professeur lit dans une copie « [AB] = [CD] », alors que les segments sont différents, il réagit ; les plus radicaux enlèveront 1 point sur 20 (il faudrait demander à Alain s'il en est), certains se contenteront de quelques remarques, voire d'une totale indifférence (ça m'étonnerait qu'Alain en soit !) Mais il semble quand même qu'il n'est pas vraiment possible d'avoir les idées claires sur des concepts sans en avoir une énonciation claire. Comment comprendre les subtilités du calcul vectoriel si l'on ne peut, dans l'écriture même, en distinguer les caractéristiques ? Sans même parler de classes d'équivalence de bipoints équipollents, nous n'avons pas intérêt à laisser passer des erreurs d'écriture qui trahissent une pensée floue. Le sujet est discuté dans les IREM, qui sont parmi les rares endroits où les acteurs de terrain (c'est à dire : nous) peuvent parler de leur pratique et refaire le monde de l'école… Tandis que les décisions reviendront toujours aux décideurs, bien évidemment. Mais on peut tout craindre après la récente polémique stérile sur la méthode d'apprentissage de la lecture, en particulier une attaque contre la dictature des maths[1] : chacun voit midi à sa porte.
S'il y en a un qui voit Midy à sa porte, c'est bien Emmanuel Moreau. Voyez comme des problèmes en apparence simples nous amènent à d'ambitieux développements ! Comme l'écrit Emmanuel, nous pouvons démontrer à nos élèves qu'ils ont à leur portée des résultats oubliés ou non encore trouvés. L'article montre aussi à quel point l'arithmétique est une source d'aventure intellectuelle. C'est aussi le cas du texte de Tristan Deray : on mord à l'hameçon de Fermat, mais, chacun s'en était douté : Euler était à l'affût. Les passionnés d'arithmétique se régaleront en parcourant l'ensemble des propositions sur la somme de deux carrés : du pur Euler, mâtiné de Fermat quand même.

Euler, qu'on retrouve dans le texte de Michel Lafond en tant que maître de l'espace, en compagnie d'un autre prince des mathématiques, le grand Gregory. Pour faire le pendant de tous ces arithméticiens, Michel nous entraîne dans un monde de ballons contigus, de cages polyédriques et d'entrelacs de cordes ; mais accrochez-vous quand même : le contenu est loin d'être enfantin ; Michel ne serait-il pas l'un de ces dictateurs dénoncés par le *Monde de l'éducation* ? Et il se double d'un tortionnaire, comme le sont également la plupart des auteurs de ce numéro, les lecteurs ont du remue-méninge en perspective ! Une seule solution pour faire face à cette tâche : soyons cent-un.

Bonne lecture !
Frédéric Métin.

[1] Ce qui m'embête fort, parce que j'avais parié récemment que le Ministre allait passer aux mathématiques et ça n'est pas encore venu ; pourquoi tarde-t-il ? Heureusement, il y a le numéro d'octobre du *Monde de l'Éducation*.

Bloc-notes

ACTIVITÉS 2006-2007

Actions de formation continue dont l'IREM est le responsable pédagogique

06A0073049 : Maths : Appropriation des contenus didactiques : *9432 Maths : Eclairages historiques sur la démonstration mathématique*	P. REGNARD	14/11/06 08/02/07	IREM
06A0073049 : Maths : Appropriation des contenus didactiques : *9432 Maths : L'espace, point de vue mathématique, économique, géographique...*	M.N. RACINE A. MASCRET S. LANAUD	30/11/06 12/04/07	IREM
06A0073050 Maths : L'Histoire des Maths comme outil didactique *9434 Maths: L'Histoire des Maths comme outil didactique*			
Groupe 1	F. METIN P. GUYOT	23/11/06 16/03/07	AUXERRE
Groupe 2	F. METIN P. GUYOT	29/11/06 15/02/07	CHALON
06A0073051 Maths : Utiliser les maths dans d'autres disciplines *9436 Maths : Utilisation des statistiques*	JEBRANE A. LABRUERE-CHAZAL C.	08/02/07 15/02/07	IREM

Journées de formations

Les enseignants intéressés par ces formations peuvent s'inscrire à l'IREM
(qui, sur demande, enverra une convocation sous réserve d'accord du chef d'établissement)
Les frais ne sont pas pris en charge par l'IREM

5 octobre 2006 Lieu : IREM, Faculté Sciences Mirande
Matin 9h10-12h : Accueil, Budget, politique d'achat, heures desco, plan de formation 2006-2007, questions diverses de fonctionnement de l'IREM.
Après-midi : 13h30 – 16H30
Présentation de tous les groupes de travail de l'IREM. Projets 2006-2007. Discussion et questions diverses.

16 novembre 2006 – 9h-17h Lieu : IREM, Faculté Sciences Mirande
Journée de formation organisée en collaboration avec l'IUFM de Bourgogne : **"FORMES ET SENS DES ENSEIGNEMENTS DE STATISTIQUES ET DE PROBABILITÉS" -** ***COURTEBRAS Bernard***, certifié au Collège de Saint Roch à Bourg-en-Bresse (01) – ***DUTARTE Philippe,*** agrégé au Lycée E. Branly à Créteil (94).

Objectifs de la formation :

Permettre aux participants de mieux connaître les problématiques de l'enseignement des probabilités et des statistiques dans le secondaire et le supérieur. Donner une vision comparative critique des différentes approches.

Développer la réflexion sur les aspects sociologiques, historiques et moraux de cet enseignement

Contenus :

"Induction statistique et citoyenneté"

Théorie de l'estimation par intervalles de confiance et des tests d'hypothèse, notions de risque. Illustration par des exemples dans le cadre des programmes de lycée (voire de collège dans le cadre des « thèmes de convergence »), ayant une forte signification « citoyenne » (interdisciplinaire) et montrant la nécessité d'une formation mathématique dans ces domaines pour « décrypter » le monde moderne.

Enseigner le calcul des probabilités...

A qui (Élèves du primaire ? Collégiens ? Lycéens (quelles séries ?), Élèves-techniciens, Élèves-ingénieurs, Étudiants) ? Et à quel moment d'un cursus ?

Quoi (quels savoirs et quels savoir-faire ?) et pour quoi faire (émancipation ou réussite aux évaluations et aux examens) ?

Comment ? (Différentes manières d'enseigner).

Ce que nous révèle l'histoire et l'analyse sociologique de l'enseignement de cette discipline...

Comment les élèves (lesquels ?) reçoivent cet enseignement ? Comment s'approprient-ils les connaissances et les savoir-faire probabilistes ? Repérage de certains obstacles et de certaines difficultés. Comment comprendre le pourquoi de certaines réussites dans cet apprentissage ?

Démarche pédagogique :

Exposés suivis de discussions et débats.

7 décembre 2006 Lieu : IREM, Faculté Sciences Mirande

Matin 9h-12h : Fonctionnement de l'IREM.

Après-midi : 13h30 – 16H30 - "QCM : outil de formation et d'évaluation ?" animé par D. Gardes

Depuis deux ans, le QCM peut être une forme d'exercice d'évaluation donné au bac en mathématiques. De nombreux QCM apparaissent dans les manuels, dans des sites mathématiques. Qu'évaluent-ils ? Est-ce une mode ?

Pour répondre à ces questions, nous essaierons de :

- recenser les différents types de QCM,
- repérer leurs différences et leurs similitudes,
- montrer que certains QCM permettent de développer certains comportements mathématiques difficilement travaillés lors d'exercices plus habituels.

25 janvier 2007 - 9h-17h Lieu : IREM, Faculté Sciences Mirande

Journée de formation organisée en collaboration avec l'IUFM de Bourgogne : ***DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES ET ENSEIGNEMENT : AU VU DES PROGRAMMES, QUELLES MATHEMATIQUES ENSEIGNER ? POURQUOI ? COMMENT ? – André PRESSIAT,*** *Maître de conférences de mathématiques à l'IUFM Orléans-Tours.*

Objectifs de la formation :

Promouvoir une approche co-disciplinaire des questions à étudier au collège et au lycée, tout en revalorisant la place et le rôle des mathématiques.

Améliorer la justification de l'étude des mathématiques enseignées, tant en ce qui concerne les secteurs "traditionnels" que ceux qui sont plus nouveaux.

Identifier les besoins mathématiques du professeur induits par l'évolution des moyens de calcul et de représentation.

Contenus :

Mettre en évidence l'intérêt d'un enseignement des mathématiques s'appuyant plus fortement sur les grandeurs (au collège, mais également au lycée).

Proposer des techniques (pour le professeur) pour justifier l'étude d'un secteur des mathématiques et pas seulement une “notion” figurant au programme.

Proposer des situations articulant l'emploi d'outils de calcul nouveaux (calculatrices et TICE) avec l'enseignement de techniques et leurs justifications théoriques.

Démarche pédagogique :

Mises en situation - Travaux de groupes. Exposés.

22 mars 2007 - 9h-17h Lieu : IREM, Faculté Sciences Mirande

<u>Journée de formation</u> organisée en collaboration avec l'IUFM de Bourgogne **: *L'APPRENTISSAGE DU RAISONNEMENT ET LE CALCUL MENTAL DU PRIMAIRE AU SECONDAIRE, Bernard ANSELMO,*** *certifié au Collège Marie Laurencin à Tarare (69)* **– *Richard CABASSUT,*** *Agrégé à l'IUFM de Strasbourg.*

Objectifs de la formation :

Avoir une meilleure connaissance des programmes de mathématiques de l'école primaire et du secondaire, des ruptures et continuités intra- ou inter cycles, des difficultés des élèves et de la place accordée à l'apprentissage du raisonnement et au calcul mental.

Avoir une meilleure connaissance de la place de l'apprentissage du raisonnement dans certains domaines : résolution de problèmes, les nombres, la géométrie, grandeurs et mesures.

Contenus :

Place du raisonnement, de l'argumentation et de la démonstration dans les textes officiels des programmes et documents d'accompagnement de l'école primaire et de l'enseignement secondaire.

Etude de situations d'apprentissage autour du raisonnement dans différents domaines, exemples de productions d'élèves (procédures et erreurs). Présentation de différents manuels scolaires et de la place qu'ils accordent à ces questions.

Réflexion sur les différents aspects du calcul mental : calcul réfléchi et automatique. Pourquoi, comment, et quand le mettre en place pour favoriser les apprentissages numériques et algébriques à l'école et au collège.

Démarche pédagogique :

- Présentation des problématiques sous forme d'exposés, suivis de débats,
- Travail en groupes sur l'étude de documents ou de situation suivi d'une restitution collective.

10 mai 2007 :

Matin : Intervention de Monsieur Jannin sur les machines à calculer.

Après-midi : Nombres et proportion dans la peinture (Musée des Beaux Arts)

✂---

IREM – ACTIVITES 2006-2007

Papillon à retourner à l'IREM (B.P. 47870 – 21078 Dijon cedex)

Nom : **Prénom :**

Etablissement :

Souhaite m'inscrire à

- ☐ 5 octobre 2006
- ☐ Journée du 16/11/06 (B COURTEBRAS & P. DUTARTE)
- ☐ ½ journée du 7 décembre 2006 : "***QCM : outil de formation et d'évaluation*** ?"
- ☐ Journée du 25/01/07 (A. PRESSIAT)
- ☐ Journée du 22/03/07 (B. ANSELMO & R. CABASSUT)
- ☐ Journée du 10/05/07 :
  - ☐ Matin : Intervention de Michel Jannin sur les machines à calcul.
  - ☐ Musée : Nombre et proportion dans la peinture (Visite du Musée des Beaux Arts).

☐ **Souhaite recevoir une convocation**

LES RALLYES

PENSEZ À VOUS INSCRIRE

Lycées : 24 janvier 2007
Collèges Côte d'Or et Saône et Loire (Bassins Montceau et Chalon) : 26 janvier 2007

LA BIBLIOTHÈQUE

Informatisation de la bibliothèque :

- La bibliothèque vous propose d'effectuer vos recherches à l'aide d'une base de données permettant de consulter sur place ainsi qu'à distance les références d'ouvrages et de périodiques dont elle dispose. Pour ce faire, connectez-vous au site de l'IREM de Dijon, partie «Documentation » et cliquez sur le lien.

- Vous pourrez interroger différentes bases par Auteur, Titre, Mot, Mot-clé, ... Les critères de sélection sont variés. Choisissez de préférence : « contient » et « débute par » qui sont les plus pertinents.

- Le fonds de publications des IREM est en cours d'enregistrement. Vous pourrez accéder à ces références au fur et à mesure de leur traitement en sélectionnant la base de « Littérature Grise » sur l'écran d'accès. Les nouveautés seront rentrées en priorité.

N'hésitez pas à contacter la documentaliste pour toute question, il vous sera également possible de procéder à des réservations

*Nouvelles acquisitions à la bibliothèque (*Actualisé le 11 octobre 2006)

Tout enseignant de l'Académie peut emprunter des ouvrages à la bibliothèque

Les ouvrages

▪ Statistique. Cours et problèmes. Série Schaum – 1993	Spiegel
▪ Probabilités. Cours et problèmes. Série Schaum – 1973	Lipschultz
▪ Formules ordinaires de probabilités et de statistiques – 1993	Frugier
▪ Probabilités fortuites. Exercices et problèmes – 1993	Frugier
▪ Mathematical modeling for the life sciences - 2005	Istas
▪ Martingales et chaînes de Markov – 2000	Baldi
▪ Probabilités. Master. Agrégation. Tome 2 - 2004	Ouvrard
▪ L'essentiel en théorie des probabilités – 2003	Jacod ; Protter
▪ Exercices de probabilités. Licence, Master...- 2005	Cottrel ; Genon-Catalot
▪ Weighing the odds. A course in probability and statistics - 2004	Williams
▪ Les casse-tête mathématiques de Sam Loyd - 1970	Gardner
▪ Oedipeland. La planète à énigmes – 1997	Cohen-Zardi ; Labidi
▪ Logique mathématique – 1971	Kleene
▪ Elemens de géométrie – 1987	Clairaut
▪ Rapport sur les progrès de la géométrie – 1870	Chasles
▪ TP et TD de topologie générale – 1973	Faisant
▪ Physique et physiciens – 1979	Massain
▪ Mathématiques et mathématiciens – 1959	Dedron ; Itard
▪ Panoramath 4. Panorama 2006 des compétitions mathématiques	Clément ; Criton
▪ L'induction statistique au lycée illustrée par le tableur- 2005	Dutarte
▪ A l'école des probabilités - 2006	Courtebras
▪ Clavius, une clé pour Euclide au XVIème s. – 2005	Rommevaux
▪ Géométrie différentielle et mécanique analytique – 1969	Godbillon

- Abrégé d'Histoire des mathématiques 1700-1900 T.2-1978 — Dieudonné
- Mystère des chiffres – 2003 — Ouaknin
- Stabilité structurelle et morphogenèse - 1972 — Thom
- La vie rêvée des maths - 2001 — Berlinski
- 15 ans de problèmes corrigés – 1994 — Franchini ; Jacquens
- Mathématiques. Deug Sciences T.4 – 1997 — Azoulay
- Mathématiques Spéciales : Analyse 2 - 1996 — Franchini ; Jacquens
- Maths. T.3 – 1987 — Liret ; Zisman
- Mathématiques 2ème année de Deug T.2 – 1987 — Kree ; Vauthier
- Mathématiques pour le Deug : Algèbre et géométrie – 2001 — Prochasson
- Mathématiques pour le Deug : Analyse – 2000 — Prochasson
- Analyse avec MAPLE – 2000 — Fredon
- Algèbre et géométrie avec MAPLE – 2001 — Fredon
- Acta Didactica Universitatis Comenianae, Mathematics. Issue 5 — Kostyrko
- Traité de géométrie : géométrie dans l'espace – 1922 — Rouché
- Mathématiques générales : Agrégation interne – 1991 — Tissier
- Exercices de mathématiques. T.3. Analyse II – 1980 — Serfati

L'IREM remercie chaleureusement Tristan DERAY, Robert FERACHOGLOU, Suzanne GUELORGET, Frédéric METIN, pour les dons d'ouvrages qu'ils ont faits à sa bibliothèque.

Production des IREM

- Information Mathématique du n°1 au n°18. Cd-Rom – 2005 — Aix-Marseille
- Des mathématiques en Sixième - 1996 — Inter-Irem
- Mathématiques en liaison avec des problèmes concrets. Volume 1 — Aix-Marseille
- Feuille de Vigne n°98 – 2005 — Dijon
- Pour un suivi en arithmétique de la Troisième à la Terminale — Toulouse
- Les systèmes planétaires dans la Grèce antique...- 1985 — Rouen
- Dessiner l'espace – 1989 — Nancy
- Quelles mathématiques faire vivre à l'école ? Quels outils pour les maîtres ? – 2005 Copirelem
- 50 problèmes (et plus si affinités). Pour les élèves de Sixième et Cinquième – 2005 — Lyon
- 50 problèmes (et plus si affinités). Pour les élèves de Quatrième et Troisième – 2005 — Lyon
- Mathématiques et surdité – 2005 — Lyon
- De l'arithmétique au collège ? – 2004 — Lyon
- Atelier scientifique - 2004 — Lyon
- Feuille de Vigne n°99 – 2006 — Dijon
- Extraits du traité des fluxions de Colin MacLaurin - 1975 — Paris Nord
- Le Hasard. Actes des journées académiques — Lille/IPR
- Apprentissages et consolidations en math. en Terminale STI / STL – 2005 — Limoges/CRDP
- Papiers – Crayons….Aborder la géométrie par le dessin - 2006 — Paris Nord
- Rallye Mathématique de Bourgogne – 2006 — Dijon
- Compte-rendu du rallye Mathématique des collèges de Côte d'Or – 2006 - — Dijon
- Quatre fragments d'histoire des mathématiques – 2006 — Toulouse
- Feuille de Vigne n°100 – 2006 — Dijon
- Histoire d'Aires – 2005 — Orléans
- « Prends ton temps ! » - 2006 — Besançon
- « L'ouvert » n°113 – juillet 2006 — Strasbourg
- Oral de mathématiques au Bac S – 2006 — Clermont
- Tableurs en 1ère L – 2006 — Clermont
- Enseigner les mathématiques en France, en Europe et ailleurs - 2006 — COPIRELEM
- J'aime faire des maths. Cahier d'exercices 6ème , 5ème SEGPA- 2006 — Aix – Marseille
- Mathématiques en liaison avec des problèmes concrets. T. II – 2006 — Aix – Marseille
- Multimédia et proportionnalité. MathEnPoche – 2006 — Rennes

Jeux et Problèmes

Michel LAFOND

JEU - 51

Ma montre avance d'une minute toutes les 44 minutes. Elle est à l'heure à midi.
A quelle heure (exacte) les deux aiguilles seront-elles de nouveau en coïncidence ?

PROBLÈME – 51

La somme des chiffres de 2^{67} = 147573952589676412928 est égale à 110.
Celle de 2^{103} = 10141204801825835211973625643008 est aussi égale à 110.

Démontrer que si les écritures décimales de 2^m et 2^n ont la même somme de chiffres, alors $m - n$ est un multiple de 6.

Solutions

JEU - 50

Un joueur A choisit 5 entiers naturels : $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X$.
Un joueur B essaie de deviner X.
Pour cela, B pose une question du genre $Q = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$.
A lui répond en lui donnant uniquement le résultat du produit scalaire :

$$a_1.x_1 + a_2.x_2 + a_3.x_3 + a_4.x_4 + a_5.x_5$$

Ensuite, B pose une autre question du genre $Q = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$.
A lui donne le résultat du produit scalaire : $b_1.x_1 + b_2.x_2 + b_3.x_3 + b_4.x_4 + b_5.x_5$...etc.
Quel est le nombre minimal de questions que B doit poser pour être certain de trouver X ?

Solution :

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X$ est le quintuplet de A que B doit deviner.
Il suffit pour cela à B de poser **2 questions** !

En effet, si la première question de B est $Q_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$ la réponse de A sera

$$R_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5.$$

B sait maintenant que chaque entier x_i est majoré par R_1.
Posons $M = R_1 + 1$. Chaque entier x_i est donc strictement majoré par M.

Si la deuxième question de B est $Q_2 = (1, M, M^2, M^3, M^4)$ la réponse de A sera

$$R_2 = x_1 + x_2 M + x_3 M^2 + x_4 M^3 + x_5 M^4.$$

B connaît R_2 et M. Il peut calculer les x_i ainsi : R_2 s'écrit $x_1 + k M$ avec $x_1 < M$.
x_1 est donc égal à R_2 modulo M. [reste de la division de R_2 par M].

Ensuite, $F = \dfrac{R_2 - x_1}{M} = x_2 + x_3 \quad M + x_4 \quad M^2 + x_5 \quad M^3 = x_2 + k' M$ avec $x_2 < M$.

x_2 est donc égal à F modulo M. [reste de la division de F par M].
Et ainsi de suite.
En fait B n'a qu'à déterminer l'écriture de R_2 en base M. Les 5 chiffres de cette écriture constituant le quintuplet cherché.

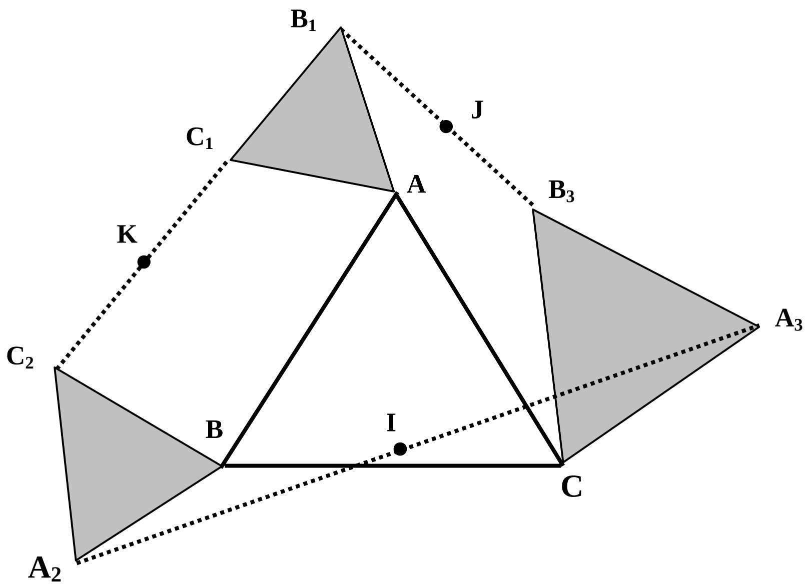
Ce n'est pas fini. Pour démontrer que 2 est bien le nombre minimal de questions à poser, il faut démontrer qu'on ne peut pas deviner un quintuplet arbitraire en une seule question !
Raisonnons par l'absurde en supposant que la question "miracle" Q = (a, b, c, d, e) permet de deviner un quadruplet arbitraire (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) par la seule connaissance de

$$R = a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 + d\,x_4 + e\,x_5.$$

Aucun des 5 nombres de la question n'est nul, car si par exemple $\boldsymbol{a}$ était égal à 0, B n'aurait aucun moyen pour distinguer entre les quintuplets (x_1, 0, 0, 0, 0) qui donneraient tous la même réponse : 0.
Mais puisque a et b ne sont pas nuls, B ne peut pas distinguer les quintuplets distincts (b, 0, 0, 0, 0) et (0, a, 0, 0, 0) qui donneraient tous la même réponse : $a.b$ à la question Q.
Il y a contradiction. 2 est bien le nombre minimal de questions à poser.

PROBLÈME - 50

ABC est un triangle équilatéral quelconque.
AB_1C_1 (dans le même ordre que ABC) est un triangle équilatéral quelconque.
BC_2A_2 (dans le même ordre que ABC) est un triangle équilatéral quelconque.
CA_3B_3 (dans le même ordre que ABC) est un triangle équilatéral quelconque.
I est le milieu de A_2A_3 J est le milieu de B_1B_3 K est le milieu de C_1C_2.
Démontrer que IJK est un triangle équilatéral.



Solution :

Soient a, b, c les affixes de A,B,C dans le plan complexe.
a_3, b_3, b_1, c_1, c_2, a_2 celles de A_3, B_3, B_1, C_1, C_2, A_2.

Posons $w = e^{\frac{\pi}{3}i}$. [w correspond à la rotation de $\pi/3$ dans le sens direct].
On a $b_3 = c + w\,(a_3 - c)$ $c_1 = a + w\,(b_1 - a)$ $a_2 = b + w\,(c_2 - b)$ (1)
Les affixes de I,J,K sont respectivement :

$$Z_i = \frac{1}{2}[a_2 + a_3] \qquad Z_j = \frac{1}{2}[b_1 + b_3] \qquad Z_k = \frac{1}{2}[c_1 + c_2] \qquad (2)$$

Pour démonter que IJK est équilatéral, il suffit de démontrer que $Z_k - Z_i = w\,(Z_j - Z_i)$
Vérifions donc que $2Z = Z_k - Z_i - w\,(Z_j - Z_i)$ est bien nul.

En utilisant (1) et (2), on obtient :
$2Z = a + c_2 - b - a_3 + w(b_1 - a - c_2 + b) - w\,[b_1 + c - b - a_3 + w(a_3 - c - c_2 + b)]$
En remarquant que $w^2 = w - 1$, il reste après simplifications :
$2Z = a - c + w\,(b - a)$ qui est nul car le triangle ABC est équilatéral. C.Q.F.D.

Une petite grammaire de la géométrie

Alain MASCRET, Collège La Champagne à Gevrey-Chambertin

Qui d'entre nous ne s'est plaint de trouver dans les copies des phrases n'ayant aucune signification ? Les « milieux d'une droite ou d'un cercle », les « points perpendiculaires ou parallèles » ne sont pas rares. Cependant, si l'on fait préciser à l'élève ce qu'il a voulu dire, par exemple en lui faisant faire une figure, la plupart du temps, il est capable de dessiner ce qu'il pense avoir décrit correctement. Dans ces conditions, lui faire modifier sa phrase est très difficile et souvent, il ne comprend pas ce que nous attendons de lui. Comment, dans ce cas, l'aider à résoudre son problème d'expression ?

Il lui faudrait un outil, si possible simple à utiliser, qui lui permette de détecter si les phrases qu'il écrit sont correctes ou non, par exemple un outil qui lui permette de choisir entre les phrases :

La droite (AB) passe par le point K. (1)
Le point K passe par la droite (AB). (2)
La droite (AB) passe par le segment [CD]. (3)

Ces trois phrases lui semblent a priori aussi correctes l'une que l'autre. La difficulté provient sans doute de l'utilisation du verbe *passer*, qui exprime le mouvement, alors que nos figures sont statiques. Nous utilisons le vocabulaire français en dehors de son contexte habituel. Un autre exemple est donné par le verbe *couper* :

La droite (AB) coupe le segment [CD]. (4)
Le point K coupe le segment [CD]. (5)

Une droite a le droit de couper quelque chose, mais pas un point ! Ce qui nous paraît naturel est loin de l'être pour nos élèves !

Comme nous le voyons les problèmes rencontrés ici sont d'ordre grammatical. Il s'agit de donner des règles strictes de formation des phrases, permettant d'éliminer les incorrectes et surtout d'en produire des correctes. Pour cela, nous allons repérer les phrases les plus utiles à la rédaction des problèmes de géométrie et préciser leur mode de fonctionnement.

Reprenons les exemples donnés ci-dessus. Les phrases (1), (2) et (3) se caractérisent par les mots *passe par*. Etudions le fonctionnement d'une phrase de ce type :

- Le sujet du verbe *passe* peut être une droite, un segment, une demi-droite, un cercle, un arc de cercle, une courbe quelconque, en tout cas pas un point. Nous désignerons cette catégorie de mots par le mot *courbe*.
- Derrière le mot *par* nous ne pouvons trouver qu'un point et jamais une *courbe*. Nous pouvons donc proposer la phrase type :

La courbe ***passe par*** *le point.* (6)

Dans cette phrase, le mot *courbe* pourra être remplacé par droite, demi-droite, segment, cercle mais pas par point. De même le mot *point* pourra être remplacé par n'importe quel mot désignant un point : milieu, centre sommet…

À ce niveau se pose le problème du choix du terme employé, et là encore l'élève a besoin d'être aidé. Voici, par exemple, une confusion fréquente :

La droite (AB) passe par le centre du segment [CD]. (7)
La droite (AB) passe par le milieu du segment [CD]. (8)

Quelle phrase faut-il écrire ? C’est le contexte qui permet de répondre. Ici, nous parlons de segment, il faut donc utiliser le mot milieu et non le mot centre, qui sera réservé au cercle, au parallélogramme, à la sphère et à la symétrie centrale.

Enfin, l’outil que nous allons mettre à la disposition de l’élève doit se contenter de guider sa réflexion et non la rendre inutile. Il serait relativement facile d’écrire un programme informatique qui analyserait les phrases qui lui seraient soumises, une sorte d’analyseur sémantique spécialisé dans la géométrie. Mais un tel logiciel, au lieu de tendre à l’autonomie de l’élève, risquerait au contraire de le rendre dépendant, en accomplissant le travail à sa place. D’autre part, sa mise en œuvre, nécessitant l’utilisation d’un ordinateur, serait trop lourde et par là même, peu efficace.

L’idéal est que l’élève puisse disposer à tout moment d’une aide, suffisamment simple pour qu’il ait envie de s’en servir. Ce sera une simple fiche de format A5. Cette fiche sera collée sur un carton et rangée dans son cahier. Il pourra s’y reporter chez lui, quand il rédigera ses exercices et ses devoirs, ainsi qu’en classe, y compris pendant les contrôles. Il y trouvera deux tableaux, le premier lui donnant une sélection de phrases types et le second lui permettant de choisir son vocabulaire en fonction du contexte.

Voici la fiche que j’utilise avec mes élèves, dès la sixième :

PETİTE GRAMMAİRE DE LA GÉOMÉTRİE

Phrases types :

Le point □ **est sur** la courbe □.
La courbe □ **passe par** le point □.
La courbe □ **coupe** la courbe □ au point □.
La courbe □ et la courbe □ **sont sécantes** au point □.
Le point □ **est l’intersection** des courbes □ et □.
La droite □ **est parallèle à** la droite □.
La droite □ **est perpendiculaire à** la droite □.

Le symbole □ doit être remplacé par le nom du point, de la courbe, ou de la droite.

Le mot	peut être remplacé par	quand on parle de
point	milieu ; extrémité	segment
	centre	cercle ; parallélogramme ; pavé ; symétrie ; sphère
	sommet	triangle ; quadrilatère , polygone ; angle
	pied	hauteur ; bissectrice
courbe	droite ; demi-droite segment ; cercle	
droite	médiatrice	segment
	bissectrice	angle
	médiane	triangle ; quadrilatère
	hauteur	triangle ; trapèze ; parallélogramme
	axe	symétrie ; cylindre
	diamètre	cercle
	côté	triangle ; quadrilatère ; polygone
	diagonale	quadrilatère ; polygone
demi-droite	côté	angle
segment	côté	triangle ; quadrilatère ; polygone
	arête	pavé ; prisme ; pyramide ; polyèdre
	médiane	triangle ; quadrilatère
	hauteur	triangle ; trapèze ; parallélogramme
	diamètre ; rayon	cercle ; cylindre ; sphère
	corde	cercle

Cette fiche a besoin d'être présentée et expliquée, si l'on veut que l'élève s'en serve. J'y consacre environ une semaine pendant laquelle nous faisons des exercices d'analyse de phrases et nous élaborons un mode d'emploi.

Soit, par exemple, à analyser la phrase :

La droite (AB) est perpendiculaire à l'extrémité E du segment [EF]. (9)

a) Tout d'abord, chercher le verbe. C'est le verbe qui permet de sélectionner dans le premier tableau la phrase type. Tous les mots en caractères gras dans la phrase type doivent se retrouver, aux flexions grammaticales près, dans la phrase à analyser.

b) Recopier la phrase type, quelques lignes au dessous de la phrase à analyser et indiquer par des flèches les remplacements de mots.

La droite (AB) est perpendiculaire à l'extrémité E du segment [EF]. (9)

La droite □ **est perpendiculaire** à la droite □. (10)

c) Utiliser le deuxième tableau de la fiche pour vérifier. Les flèches indiquent le sens de lecture : les verticales correspondent à la deuxième colonne du tableau et les horizontales à la troisième. Si les remplacements sont incorrects, il faut barrer les flèches correspondantes. Une seule flèche barrée suffit pour que la phrase soit incorrecte.

Voici un autre exemple, avec, cette fois, une phrase correcte :

Le centre O du cercle **c** *est sur le côté [AB] du triangle ABC.* (11)

Le point □ **est sur** la courbe □. (12)

Le mot « courbe » pointe sur le mot côté, bien que la fiche ne le permette pas de façon explicite. Ici, le remplacement se fait en deux temps :

courbe ⟶ *segment* ⟶ *côté*

Voyons maintenant quelques difficultés rencontrées par les élèves lors de l'utilisation de la fiche.

Tout d'abord, une mauvaise position des flèches.

La droite (AB) passe par le cercle de centre O. (13)

La courbe □ **passe par** le point □. (6)

Dans cet exemple, il est tentant de faire pointer la flèche qui part de « point », vers « centre », puisqu'un centre est un point et d'en conclure que la phrase est correcte. D'où la règle : *Les flèches qui partent des mots de la phrase type doivent toujours pointer le premier nom du groupe et non ses compléments.* Dans notre jargon, nous disons qu'il faut viser la « locomotive » et non les « wagons », car la notion de complément de nom n'est pas toujours très claire pour un élève de sixième.

Une autre règle analogue est qu'*une flèche horizontale ne doit jamais passer au-dessus du verbe,* sinon les « wagons » seraient mal accrochés.

La médiatrice de [AB] coupe le segment [CD] au point K. (14)

La courbe □ **coupe** la courbe □ au point □. (15)

Ici, seuls les crochets de la notation *[AB]* permettent de repérer qu'il s'agit d'un segment, tandis que devant *[CD]* se trouve écrit le mot *segment ;* ce qui peut inciter à tracer la flèche en pointillés et provoquer cette sorte d'erreur. Cependant, ce genre d'expression est courant et l'élève doit être capable de l'analyser.

Les phrases à plusieurs verbes posent aussi un problème. En effet, les phrases types n'en possèdent qu'un. La méthode consiste donc à « casser la phrase » en plusieurs morceaux qui seront analysables. En voici un exemple :

Le milieu du côté [AC] du triangle ABC est sur le cercle de centre O qui passe par E. (16)

deviendra :

Le milieu du côté [AC] du triangle ABC est sur le cercle de centre O (17)

Le point □ **est sur** la courbe □. (12)

et la proposition relative sera réécrite :

Le cercle de centre O passe par E (18)

La courbe □ **passe par** le point □. (6)

Enfin, toutes les phrases types possibles ne sont pas sur la fiche, par manque de place. En voici quelques unes qui auraient pu s'y trouver :

La courbe □ et la courbe □ **se coupent** au point □. (19)
La droite □ et la droite □ **sont parallèles**. (20)

La droite □ et la droite □ **sont perpendiculaires**. (21)

Mais il est facile de faire dériver la phrase (19) de la phrase (15) ou encore de celle qui la suit sur la fiche. De même, les phrases (20) et (21) apparaissent comme une autre forme des deux dernières phrases types de la fiche. De telles transformations ne gênent pas les élèves.

On pourrait peut-être regretter l'absence d'une phrase type construite autour du verbe être seul. En effet, de telles phrases se rencontrent souvent, en particulier dans les définitions et les théorèmes. En voici deux exemples :

Le centre du cercle **c** *est le milieu du diamètre [AB].* (22)

Un rectangle est un parallélogramme qui a un angle droit. (23)

L'important est ici de faire remarquer aux élèves que, de chaque côté du verbe être, doit se trouver un « objet » de même nature : un point dans le cas de la phrase (22), un quadrilatère dans celui de la phrase (23). La formalisation de telles phrases conduirait à la phrase type :

L'objet □ **est** l'objet □. (24)

dont le degré d'abstraction dépasse largement les possibilités d'un élève moyen de sixième. De plus, son fonctionnement serait différent des autres phrases types. D'une part, n'importe quel mot pouvant être mis à la place du mot *objet,* son remplacement n'apporterait aucune contrainte qui pourrait permettre de rejeter les phrases incorrectes. D'autre part vérifier que chacun des deux objets est de même nature conduirait à placer une flèche au-dessus du verbe être, contrairement à notre deuxième règle et introduirait certainement plus de confusion que de clarté.

Le centre du cercle **c** *est le milieu du diamètre [AB].* (22)

L'objet □ **est** l'objet □. (24)

Les inconvénients de l'introduction d'une telle phrase type dépassent donc largement les avantages qu'on peut espérer en obtenir. D'ailleurs, ce genre de phrases pose peu de problèmes aux élèves. Dans la phrase (22), les risques d'incorrections proviennent essentiellement des mots *milieu* et *centre*, et l'utilisation de la fiche permet de les éviter.

Telle qu'elle est, ma *petite grammaire de la géométrie* est certainement très imparfaite. En particulier, la liste des mots qu'on y trouve pourrait être complétée et améliorée. Cependant, je la crois capable de rendre service aux élèves. L'expérience montre que très peu ne parviennent pas à l'utiliser. L'élève qui fait l'effort de s'en servir, même s'il a des difficultés en français, peut contrôler les phrases qu'il rédige et produire des textes compréhensibles. Petit à petit, il prendra de bonnes habitudes de rédaction et pourra finalement s'en passer, ce qui est le but à atteindre.

Somme de deux carrés

Tristan DERAY, Lycée Hilaire de Chardonnet à Chalon s/Saône

Travaillez, prenez de la peine :
C'est le fonds qui manque le moins…
(Jean de la Fontaine, le laboureur et ses enfants) *

Fermat affirmait être le premier à avoir «fermement démontré» que :

- *Tout nombre premier surpassant d'une unité un multiple de 4 est somme de deux carrés.*
- *Tout nombre premier qui dépasse d'une unité un multiple de 3 est somme d'un carré et du triple d'un autre carré.*

Ainsi par exemple : $5 = 2^2 + 1^2$ et $13 = 3^2 + 2^2$ ou $7 = 2^2 + 3.1^2$ et $13 = 1^2 + 3.2^2$

Euler reçut en héritage l'arithmétique de Fermat et s'attacha à donner les démonstrations que les marges trop étroites ne permettaient pas de consigner un siècle plus tôt.
En digne héritier il sut enrichir le legs comme nul autre au siècle des Lumières, si ce n'est dans le crépuscule de celles-ci, Legendre et Lagrange qui toutefois reçurent peut-être davantage l'héritage transmis et enrichi par Euler lui-même que celui de Fermat.
Si l'arithmétique avait été regardée davantage comme une activité ludique de l'esprit que comme une discipline à part entière, les travaux d'Euler, plus que ceux de quiconque, mirent fin à cette idée en introduisant l'arithmétique au cœur des mathématiques, et au carrefour de nombreux domaines. Euler laissait à ses successeurs un immense continent à explorer dont il avait bâti de ses mains, sur les rivages, des ports et des voies d'accès dans les terres inconnues, sans doute à l'image des Tsars qu'il servait et qui avaient fait jaillir Saint-Pétersbourg du néant des marais de la Néva.

Il proposa ainsi deux théorèmes en écho à Fermat[1] :

Théorème 1 : *Un nombre premier p s'écrit de manière unique sous la forme $x^2 + y^2$ si et seulement si p est de la forme $4n+1$*

Théorème 2 : *Un nombre qui admet deux ou plusieurs représentations en somme de deux carrés, n'est pas premier mais est le produit d'au moins deux facteurs.*

Euler n'eut que peu de peine à établir le second théorème :

Soit N un entier tel que $N = a^2 + b^2$ et $N = c^2 + d^2$ (a, b, c, d positifs).
Supposons $a > b$ et $c > d$; comme les représentations sont distinctes, on a $a \neq c$ et $b \neq d$.
Supposons : $a > c$, *et* $b < d$ *; posons* $a = c + x$ *et* $d = b + y$**.
Nous avons $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, *donc* $2cx + x^2 = 2by + y^2$.
$2cx + x^2 = 2by + y^2$ *est divisible par x et par y, posons alors* $2cx + x^2 = 2by + y^2 = xyz$, *donc*

$$c = \frac{yz - x}{2} \qquad b = \frac{xz - y}{2} \qquad a = \frac{yz + x}{2} \qquad d = \frac{xz + y}{2}$$

* Note de l'éditeur.
** Note de l'éditeur : Euler ne dit pas ici que x, y, z sont entiers ! …
[1] De numeris, qui sunt aggregata duorum quadrtorum – Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 1752.

donc $N = a^2 + b^2 = \dfrac{x^2z^2 + y^2 + y^2z^2 + x^2}{4}$ *et* $N = \dfrac{\left(y^2 + x^2\right)\left(1 + z^2\right)}{4}$

Si $x^2 + y^2$ n'est pas divisible par 4, alors cette somme est elle-même un diviseur de N.

Et si $x^2 + y^2$ est divisible par 4, ou un nombre composé quelconque, alors certains de ses facteurs sont des diviseurs de N.

Comme $x = a - c$ et $y = d - b$, le nombre $N = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ admet pour diviseur $(a - c)^2 + (d - b)^2$, ou le quart de cette valeur et, puisque nous pouvons intervertir a et b, c et d entre eux, les facteurs de N sont $\left(a - d\right)^2 + \left(c - b\right)^2$ ou puisque a, b, c, d peuvent être pris négatifs, nous pouvons avoir pour diviseurs $\left(a \pm c\right)^2 + \left(d \pm b\right)^2$ ou $\left(a \pm d\right)^2 + \left(c \pm b\right)^2$, soit encore le quart de ces valeurs.

Ainsi lorsqu'un nombre admet deux représentations en sommes de carrés, il est nécessairement composé.

Il poursuit :

Corollaire 1 : *Lorsque $N = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ est composé, alors $N = \left(p^2 + q^2\right)\left(r^2 + s^2\right)$ avec*

$$a = pr + qs \qquad b = ps - qr \qquad c = ps + qr \qquad d = pr - qs$$

On en déduit $a - d = 2qs$ et $c - b = 2qr$ donc $\dfrac{r}{s} = \dfrac{c - b}{a - d}$. Si la fraction $\dfrac{c - b}{a - d} = \dfrac{r}{s}$ est rendue irréductible ; alors $r^2 + s^2$ est le diviseur de N.

Corollaire 2 : *De manière analogue lorsque l'on intervertit les nombres a, b et c, d lorsque l'on rend irréductible les fractions $\dfrac{a \pm c}{b \pm d}$ ou $\dfrac{a \pm d}{b \pm c}$ alors la fraction irréductible $\dfrac{r}{s}$ permet de trouver le diviseur $r^2 + s^2$ du nombre **N** proposé.*

Corollaire 3 : *Bien que plusieurs diviseurs puissent se déduire de ces formules, seuls deux conviennent lorsque le nombre se décompose en une somme de deux carrés.*

Par exemple si $N = 85 = 9^2 + 2^2 = 7^2 + 6^2$, les formules précédentes $\dfrac{9 \pm 7}{6 \pm 2}$, $\dfrac{9 \pm 6}{7 \pm 2}$ mènent après réduction aux fractions $\dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{1} + \dfrac{5}{3}$ et $\dfrac{3}{1}$, parmi lesquelles seules les deux premières conviennent et donnent les diviseurs $2^2 + 1 = 5$ et $4^2 + 1 = 17$. Si la décomposition en somme de carrés se fait avec des nombres de parité différente, les numérateurs et dénominateurs doivent également être de parité différente, ce qui permet d'éliminer les fractions dont les numérateur et dénominateur sont impairs.

La démonstration du théorème 1 est bien plus délicate et se fait en plusieurs étapes ; la première basée sur la méthode de descente de Fermat consiste à montrer que si p est un nombre premier impair divisant une somme de carrés $x^2 + y^2$ premiers entre eux, alors p est une somme de carrés.

Le deuxième point de la démonstration consiste alors à montrer que si p est de la forme $4n + 1$, alors p divise une somme de carrés premiers entre eux.

Suivons Euler dans la démonstration de sa première étape.

Proposition 1 *: Soit p un nombre premier somme de deux carrés. Si le produit pq est somme de deux carrés, alors q est somme de deux carrés.*

Si $pq = a^2 + b^2$; si $p = c^2 + d^2$ est un nombre premier, alors c et d sont premiers entre eux. On a $q = \dfrac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}$; comme q est entier, $a^2 + b^2$ est divisible par $c^2 + d^2$.

Le nombre $c^2\left(a^2 + b^2\right)$ est divisible par $c^2 + d^2$, et la différence $a^2c^2 + b^2c^2 - a^2c^2 - a^2d^2$ c'est-à-dire $c^2(a^2 + b^2) - a^2(c^2 + d^2)$ l'est aussi, donc $b^2c^2 - a^2d^2$ l'est elle-même.

Comme c^2+d^2 *est un nombre premier, qui divise* $b^2c^2-a^2d^2=(bc+ad)(bc-ad)$*, l'un des deux facteurs est nécessairement divisible par* c^2+d^2.

Soit $bc\pm ad = mc^2+md^2$.
Posons : $b = mc + x$ *et* $a=\pm md+y$.
En substituant ces valeurs dans $bc \pm ad$*, il vient :* $mc^2+cx+md^2\pm dy = mc^2+md^2$
D'où $cx \pm dy = 0$, *donc* $\frac{x}{y}=\pm\frac{d}{c}$.

Comme d et c sont des nombres premiers entre eux, on a nécessairement $x = nd$ *et* $y = \pm nc$*, donc* $a = \pm md \pm nc$ *et* $b = mx + nd$*. On obtient ainsi les valeurs de a et b pour lesquelles* $pq = a^2 + b^2$ *est divisible par le nombre premier* $p = c^2 + d^2$.

En substituant ces valeurs de a *et* b *dans pq, on a :*
$pq=m^2d^2-2mncd+n^2c^2+m^2c^2+2mncd+n^2d^2$
Soit : $pq=(m^2+n^2)(c^2+d^2)$
Comme $p=c^2+d^2$*, alors* $q=m^2+n^2$ *et la proposition est démontrée.*

Euler déduit quelques corollaires de cette proposition.

Corollaire 1 : *Si la somme de deux carrés est divisible par un nombre premier , lui–même somme de deux carrés, le quotient qui en résulte est également somme de deux carrés.*
Si la somme de deux carrés est divisible par l'un des nombres premiers suivants : 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41, 73, … alors le quotient de la somme par ce nombre est somme de deux carrés.

Euler établit alors la proposition suivante :

Proposition 2 : *Si le produit* pq *est somme de deux carrés et si le facteur* q *n'est pas somme de deux carrés, alors si le facteur* p *est premier, il n'est pas somme de deux carrés, et s'il n'est pas premier, il possède des facteurs premiers qui ne sont pas sommes de deux carrés.*

Puis,

Proposition 3 : *Si la somme de deux carrés premiers entre eux* a^2+b^2 *est divisible par un nombre p, alors il est possible de trouver une somme de deux carrés* c^2+d^2*, divisible par p, telle que la somme* c^2+d^2 *soit inférieure à* $\frac{1}{2}p^2$.

Démonstration : *Soit* a^2+b^2 *divisible par le nombre p ; comme a et b sont premiers entre eux, on peut écrire :* $a=mp\pm c$ *et* $b=np\pm d$ *avec* $0<c,d<\frac{1}{2}p$.
On a alors $a^2+b^2=m^2p^2\pm 2mcp+c^2+n^2p^2\pm 2ndp+d^2$
Comme cette expression est divisible par p, alors nécessairement d^2+c^2 *l'est aussi.*
Comme $c,d<\frac{1}{2}p$ *alors* $c^2+d^2<\frac{1}{2}p^2$

Proposition 4 : *La somme de deux carrés premiers entre eux n'est divisible par aucun nombre qui ne soit lui–même somme de deux carrés.*

Démonstration **:** *Soit a, b deux entiers premiers entre eux.*
Supposons que $a^2 + b^2$ soit divisible par l'entier p.
Supposons que p ne soit pas somme de deux carrés.

D'après la proposition 3, il existe c et d tels que : $\begin{cases} c^2 + d^2 < \frac{1}{2} p^2 \\ \text{et } c^2 + d^2 \text{ divisible par } p \end{cases}$

Posons $c^2 + d^2 = pq$

D'après ce qui précède, comme p n'est pas somme de deux carrés, si q ne l'est pas, il possède des facteurs premiers r qui ne se décomposent pas en somme de carrés.

On a $pq < \frac{1}{2} p^2$ et donc $q < \frac{1}{2} p$ et donc $r < \frac{1}{2} p$.

$c^2 + d^2$ est divisible par r ; donc il existe deux nombres e et f tels que $e^2 + f^2$ soit divisible par r, et tels que $e^2 + f^2 < \frac{1}{2} r^2 \quad \left(< \frac{1}{8} p^2 \right)$.

Comme r n'est pas somme de deux carrés, on peut continuer ainsi et trouver une somme de deux carrés divisible par un nombre qui n'est pas somme de deux carrés.
On aboutit ainsi nécessairement à une contradiction car le procédé ne peut continuer indéfiniment.

Euler doit ensuite établir le deuxième point de sa démonstration :

Si p est de la forme $4n+1$, alors p divise une somme de carrés premiers entre eux.

Dans son étude il affirme ne pouvoir l'établir, et se contente simplement d'une «*tentative de démonstration*».

Soit p un nombre premier de la forme $4n+1$, a et b deux entiers quelconques non divisibles par p ; alors nous avons d'après le petit théorème de Fermat $a^{4n} - b^{4n}$ divisible par p. Comme $a^{4n} - b^{4n} = (a^{2n} + b^{2n})(a^{2n} - b^{2n})$, l'un des facteurs $a^{2n} - b^{2n}$ ou $a^{2n} + b^{2n}$ l'est également.

Euler, sans pouvoir le démontrer, affirme toutefois :

«il est possible de trouver des valeurs de a et b telles que $a^{2n} - b^{2n}$ ne soit pas divisible par p, et dans ce cas nécessairement $a^{2n} + b^{2n}$ l'est.»

En posant $p = a^n$ et $q = b^n$; on obtiendra donc une somme de carrés divisibles par $4n+1$ sans que p et q ne le soient eux-mêmes.
Maintenant si « p^2 et q^2 ont un diviseur commun, alors $p^2 + q^2 = m^2(r^2 + s^2)$, avec m^2 non divisible par p ; donc la somme $(r^2 + s^2)$ admet parmi ses diviseurs (eux-mêmes somme de deux carrés) le nombre p (qui est donc somme de deux carrés).

Ainsi à défaut de le montrer de façon générale, Euler illustre son idée par quelques exemples :

Si $4n+1=5$, $n=1$; l'expression $a^2 - 1$ est divisible par 5 si pour a on choisit une valeur telle que le reste de la division de a par 5, soit l'un des résidus des carrés associés à 5, à savoir les valeurs 1 et 4.

De même si $4n+1=13$, c'est-à-dire si $n=3$, les restes des carrés dans la division par 13, sont

1, 4, 9, 3, 12, 10

d'où si l'on substitue à a l'une des valeurs restantes 2, 5, 6, 7, 8, 11; l'expression $a^6 - 1$ ne sera pas divisible par 13, donc $a^6 + 1$ le sera.

De même si $4n+1=17$, c'est-à-dire si $n=4$, les restes des carrés dans la division par 17, sont

1, 4, 9, 16, 8, 2, 15, 13 ...

d'où si l'on substitue à a l'une des valeurs restantes 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14 alors l'expression a^8-1 ne sera pas divisible par 17, donc a^8+1 le sera.

Euler en vient enfin à son ultime proposition :

Proposition : *Si un nombre de la forme $4n+1$ se décompose de façon unique en une somme de deux carrés premiers entre eux, alors ce nombre est premier.*

Démonstration : *Si le nombre n'est pas premier, il se décompose en facteurs qui sont somme de deux carrés, on aura : $4n+1=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$, que l'on peut écrire sous la forme :*

$$4n+1=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$

$$4n+1=(ad+bc)^2+(ac-bd)^2$$

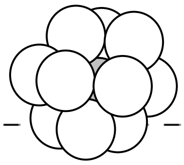
Ces carrés sont différents sauf si ac + bd = ad + bc ou ac + bd = ac + bd.
Dans le premier cas, ac + bd - ad – bc = 0 donc $(a-b)(c-d)=0$ donc $a=b$ ou $c=d$ mais alors a^2+b^2 ou c^2+d^2 est un nombre pair, ce qui n'est pas possible car il diviserait $4n+1$ (impair).
Dans l'autre cas b=0 ou d=0, et nous avons $4n+1=a^2(c^2+d^2)$ ou $4n+1=(a^2+b^2)c^2$ et dans ce cas $4n+1$ n'est pas somme de deux carrés premiers entre eux (et admet au moins deux décompositions).
Par conséquent, si $4n+1$ est composé, alors il admet au moins deux décompositions différentes.

Corollaire 1 : *On peut ainsi lorsqu'un nombre est de la forme $4n+1$, utiliser cette propriété pour affirmer que le nombre est premier lorsqu'il n'admet qu'une représentation comme somme de deux carrés, sans avoir à essayer de le diviser par les nombres premiers inférieurs à sa racine carrée comme il est d'usage de le faire.*
Ainsi par exemple le nombre 73 admet l'unique représentation en somme de deux carrés 73 = 64 + 9, il est donc premier.

Si l'exemple est ici évident il l'est déjà moins dans un autre mémoire se proposant d'établir ou de rejeter la primalité du nombre 1 000 009.

(à suivre)

L'affaire Grégory



Michel LAFOND,

Un problème célèbre et plus que tricentenaire est le problème du nombre maximal de sphères qu'on peut mettre en contact avec une sphère centrale donnée. Bien entendu, toutes les sphères ont le même rayon qu'on prendra égal à 1.

On peut expérimenter avec des balles de ping-pong ou des boules en polystyrène qu'on trouve de différentes tailles dans le commerce.

I. LES FAITS HISTORIQUES

Ce problème est très ancien puisqu'en 1694 une controverse opposait Isaac Newton et l'astronome écossais David Gregory.

(Gregory est celui de la formule $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ dite de Gregory-Leibnitz).

Newton pensait qu'on ne pouvait mettre que 12 boules autour de la boule centrale, alors que Gregory supposait sans le démontrer qu'on pouvait en mettre une $13^{\text{ème}}$.

C'est Newton qui avait raison, mais les premières démonstrations ne datent que de 1874 (Bender ; Hoppe) puis 1875 (Günther) suivies de démontrations plus courtes et plus rigoureuses : 1953 (Schütte et Van der Waerden) puis 1956 (John Leech).

II. PLAÇONS D'ABORD 12 BOULES

- Considérons dans l'espace, deux carrés horizontaux de côtés 2, symétriques par rapport à un point Ω de sorte que la distance de Ω aux 8 sommets des deux carrés soit égale à 2 (Figure 1).

Ces 8 sommets sont sur la sphère de centre Ω et de rayon 2 qu'on notera (Σ). On dira dans la suite qu'on place une sphère en M pour dire qu'on considère la sphère unité de centre M.

A partir de la figure 1, si on place la sphère centrale en Ω, et 8 sphères aux sommets des deux carrés, ces sphères seront toutes tangentes à la sphère centrale.

Considérons maintenant un point A situé sur la sphère (Σ), dans le plan horizontal passant par Ω (équateur de Σ), et équidistant de deux sommets consécutifs B et C du carré supérieur. (Voir Figure 2).

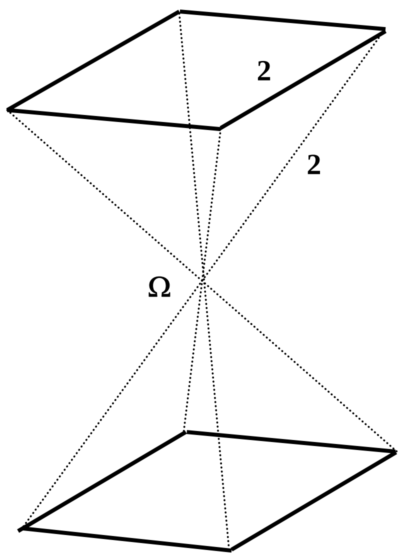


Figure 1

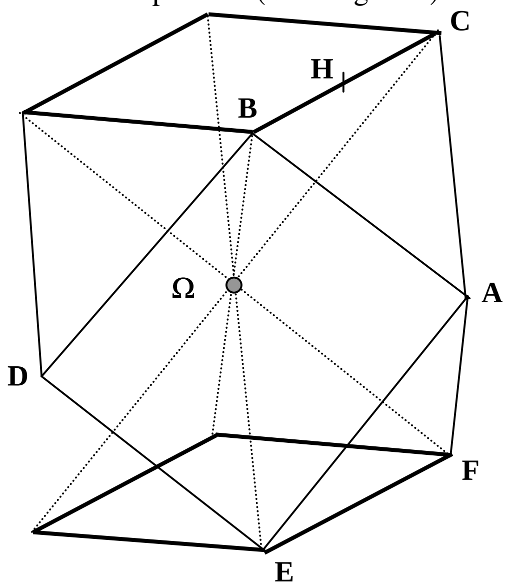


Figure 2

Dans la figure 1, chacune des deux pyramides est à base carrée avec ses 8 arêtes de mesure 2. Un petit peu de Pythagore montre que la hauteur d'une telle pyramide mesure $\sqrt{2}$.
Coupons la figure 2 par le plan vertical ΩAH où H est le milieu de [BC].
On obtient la figure 3 dans laquelle $HK = \sqrt{2}$ donc $AH = \sqrt{3}$.

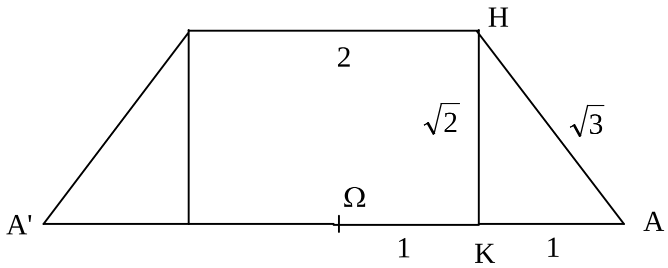


Figure 3

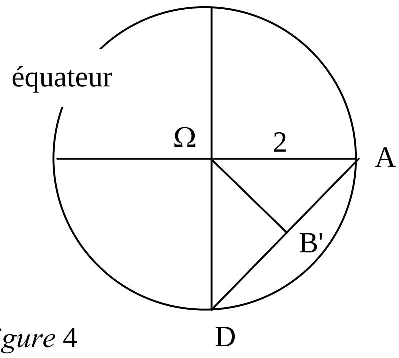
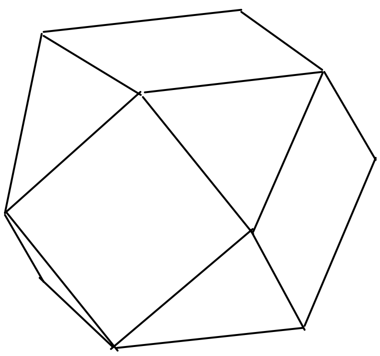


Figure 4

Dans le triangle rectangle (ABH) de la figure 2, on a $AB^2 = AH^2 + BH^2 = 3 + 1 = 4$. Donc $AB = 2$.
Par symétrie A est donc à la distance 2 de B,C,E,F.
Ce qu'on a fait pour le point A, on le refait pour les trois autres points cardinaux de l'équateur (Si A est l'est, le sud D est visible dans la figure 2).
L'équateur vu du dessus dans la figure 4 montre que la distance $\Omega B'$ de Ω à AD vaut $\sqrt{2}$.
Ce qui prouve que B est à la verticale de B' (et de E). Voir Figures 2 et 4.
Le quadrilatère (ABDE) est donc un carré de côté 2, puisque ses diagonales sont perpendiculaires, se coupent en leur milieu B' et puisque l'angle en B est droit $[AD^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8 = AB^2 + BD^2]$
Lorsque la figure 2 est complète on arrive au fameux cuboctaèdre dont on voit une représentation dans la figure 5 :



Le cuboctaèdre

Figure 5

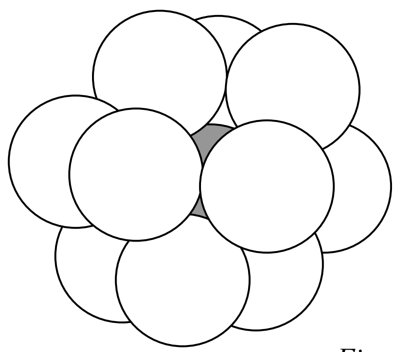


Figure 6

Ce polyèdre fait partie des polyèdres archimédiens : les faces sont des polygones réguliers, (donc les arêtes sont égales) et de chaque sommet, en tournant, on voit les mêmes polygones dans le même ordre. Ainsi dans le cuboctaèdre, de chaque sommet on voit un triangle, un carré, un triangle, un carré.
On le note traditionnellement $\mathbf{(3\ .\ 4)^2}$ pour abréviation de (triangle-carré-triangle-carré).
Les 5 solides de Platon sont évidemment archimédiens.

Les 12 sommets du cuboctaèdre sont tous sur la sphère (Σ) de centre Ω et de rayon 2, et les calculs précédents montrent que si on place 12 sphères unité aux 12 sommets du cuboctaèdre, elles seront toutes tangentes à la sphère centrale sans empiètement ($AD > 2$).
Plus précisément, chacune des 12 sphères est tangente à 4 autres, et à la sphère centrale.
Ce qu'on obtient ressemble à la figure 6.
Il y a de la "place perdue" par le fait que les sphères en A et D, par exemple, ne sont pas tangentes.
Ce placement des 12 sphères n'est donc pas unique, et on pourrait espérer remplacer le cuboctaèdre par une figure avec plus de triangles et moins de carrés, car la configuration de trois sphères tangentes deux à deux (et à la sphère centrale) est un optimum local en ce qui concerne la place perdue.

- Une autre manière de placer les 12 boules est de considérer l'icosaèdre régulier dont l'arête est 2.

On calcule que son diamètre est $\sqrt{10+2\sqrt{5}} \approx 3{,}804\ldots$

Si on place 12 sphères unité aux 12 sommets de cet icosaèdre, chacune sera tangente à 5 voisines, et dans l'espace central, on a la place de mettre une sphère de diamètre 3,804…- 2 = 1,804… < 2.

A fortiori, on peut donc placer 12 sphères unité au contact d'une sphère unité.

Newton et Gregory connaissaient évidemment l'icosaèdre, probablement le cuboctaèdre, et savaient donc qu'en placant 12 boules autour d'une boule il restait un peu de place disponible…

III. CE QU'IL FAUT SAVOIR POUR L'ÉTUDE DE LA 13ÈME BOULE

Les démonstrations d'impossibilité sont parfois compliquées, mais celle de Leech est accessible. Je l'ai trouvée dans un livre de l'IREM de Besançon : "Jeux de formes, formes de jeux" de Bernard Bettinelli paru en 1984. J'ai détaillé tous les calculs et j'ai rectifié l'erreur page 329 concernant l'aire d'un pentagone du réseau de Leech, (c'est le point le plus délicat de la démonstration).

John Leech est célèbre pour avoir trouvé un empilement très dense de sphères en dimension **24** dans lequel chaque sphère est en contact avec 196560 autres sphères ! Ça ne lui a sûrement pas posé de problème pour redescendre bêtement à notre dimension 3.

Cette démonstration est très intéressante dans la mesure où elle fait appel à de nombreux domaines des mathématiques. Pour la comprendre, en plus des cellules grises, on a besoin de deux choses :

a) Les 2 relations d'Euler sur les graphes de la sphère.

b) Le calcul de l'aire d'un triangle sphérique.

1) Les relations d'Euler

Notons dans la suite (S) la sphère de rayon 1 centrée en Ω.

Soit un graphe (G) sur (S) : c'est-à-dire un ensemble non vide de points de la sphère appelés sommets et un ensemble d'arcs non orientés (chaque arc relie un couple de sommets). Les arcs ne se croisent pas, et le graphe est connexe. Dans un tel graphe il y a : s sommets, f faces et a arêtes.

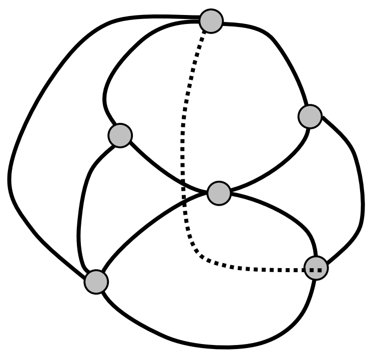
Une face est un polygone (sphérique) dont les sommets et les côtés font partie du graphe.

Si f_3 est le nombre de faces triangulaires, f_4 le nombre de faces quadrangulaires, f_5 le nombre de faces pentagonales etc… alors :

La première relation d'Euler dit que $\boldsymbol{s + f - a = 2.}$ **(E1)**

La seconde relation d'Euler dit que $\boldsymbol{2a = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \ldots}$ **(E2)**

La démonstration est en annexe 1)



Exemple :

Sur le graphe ci-contre (imaginer qu'il est tracé sur 1a sphère (S))

On a : $s = 6$ sommets, $f = 7$ faces et $a = 11$ arêtes.

L'arête en pointillés est sur la calotte non visible de (S).

(E1) dit que : $s + f - a = 6 + 7 - 11 = 2.$

Et comme le graphe contient 6 triangles et 1 quadrilatère,

(E2) dit que $22 = 2a = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \ldots = 3 \times 6 + 4 \times 1$

2) L'aire d'un triangle sphérique

Un triangle sphérique est un domaine de (S) limité par trois grands cercles.

La figure 7 ci-dessous montre le triangle sphérique (ABC). Il possède 3 angles α, β, γ.

α est l'angle des tangentes en A aux deux grands cercles qui passent par A, ou ce qui revient au même, l'angle des deux plans [ACA'] et [ABA'] dont l'intersection AA' est un diamètre de la sphère (S).

En fait, A et B déterminent (sur le grand cercle unique qui passe par A et B) deux arcs. Et de même pour B et C. Il y a donc en réalité plusieurs triangles qui pourraient revendiquer le nom (ABC).

Pour s'y retrouver, il faut dans la détermination des angles, orienter les demi-tangentes aux arcs de la frontière, et considérer l'angle qui "regarde" vers l'intérieur du domaine souhaité. (Voir figure 8).
Dans ces conditions, sur une sphère de rayon *R :*

Le triangle sphérique d'angles α, β, γ (en radians) a une aire égale à $(\alpha + \beta + \gamma - \pi) R^2$. (T)

La démonstration est en annexe 2.

Remarquons que la peau d'une orange coupée en 8 détermine un triangle sphérique dont les trois angles sont droits ! Ce triangle mérite bien de s'appeler triangle rectangle !

Son aire vaut $(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\pi)R^2 = \frac{\pi}{2}R^2$ soit le huitième de l'aire totale de la sphère : $4\ \pi R^2$.

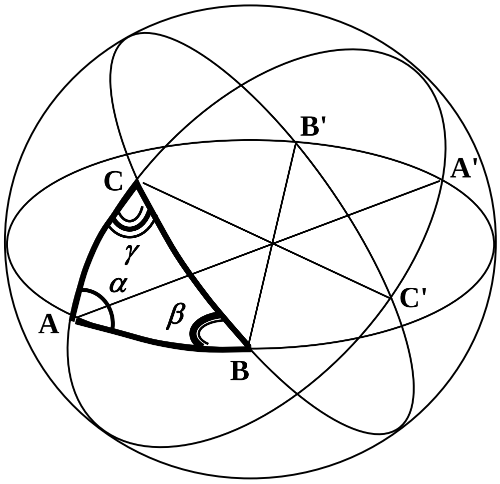


Figure 7

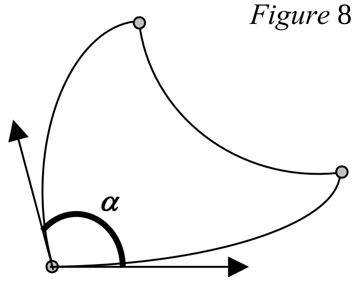


Figure 8

<u>Comment calculer les angles α, β, γ</u> ?
Dans la suite, on n'aura besoin de calculer que les aires de triangles sphériques <u>isocèles</u> des deux types ci-dessous :

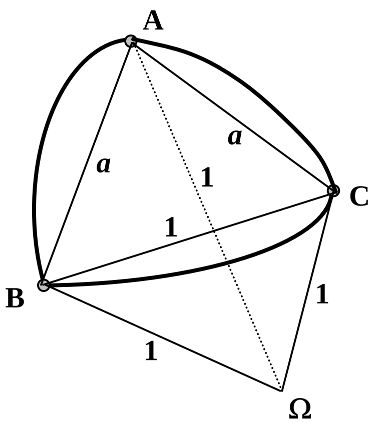


Figure 9

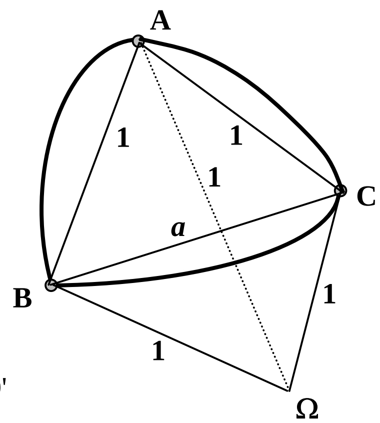


Figure 9'

Si X et Y sont deux points de (S), la distance euclidienne entre X et Y (la corde) sera notée XY, mais la distance sur la sphère (S), c'est à dire l'arc de grand cercle passant par X et Y (il s'agira toujours du petit arc) sera notée ((*XY*)). Puisque le rayon de (S) est 1, ((*XY*)) est aussi l'angle sous lequel depuis Ω on voit XY. Entre XY et ((*XY*)), on a la relation ((*XY*)) $= 2\,Arc\sin(\frac{XY}{2})$.

Les résultats ci-dessous découlent de la formule (A) démontrée en annexe 3) :

Dans la figure 9, l'aire du triangle sphérique (ABC) de côtés (a, a, 1) est

$$F_1\,(a) = Arc\cos\left(1-\frac{2}{a^2(4-a^2)}\right)+2\,Arc\cos\frac{2-a^2}{a\sqrt{12-3a^2}}-\pi \qquad \text{(A1)}$$

[Faire $b = a$ et $c = 1$ dans (A)].

Dans la figure 9', l'aire du triangle sphérique (ABC) de côtés (1, 1, a) est

$$F_2\,(a) = Arc\cos\frac{3-2a^2}{3}+2\,Arc\cos\frac{a}{\sqrt{12-3a^2}}-\pi \qquad \text{(A2)}$$

[Faire $b = 1$ et $c = 1$ dans (A)].

Bien sûr, il faut $a < 2$. Mais les valeurs de a qui interviendront dans la suite seront toutes inférieures à 2 et de toutes façons, la mesure a d'une corde de (S) ne peut pas dépasser le diamètre de (S) : 2.

IV. L'IMPOSSIBILITÉ DE PLACER PLUS DE 13 BOULES

Soit un amas de plusieurs sphères unité, toutes en contact avec la sphère centrale unité (S). La première chose à faire est de se ramener à un problème à 2 dimensions en remplaçant chaque boule de l'amas par son point de contact avec (S). On obtient ainsi les sommets d'un graphe (G) sur (S).
Pour avoir les arcs du graphe, relions deux sommets si et seulement si les sphères concernées sont tangentes. La figure 10 ci-dessous, montre en coupe un arc (XY) du graphe.

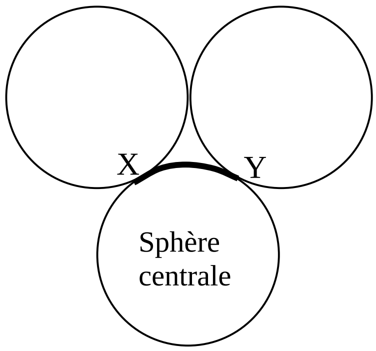


Figure 10

Dans le graphe (G), une face est un triangle lorsque trois sphères de l'amas sont tangentes deux à deux. La face triangulaire est un triangle (XYZ) sphérique "équilatéral" qu'on notera (Δ).
Le centre Ω de (S) et les centres des trois sphères forment un tétraèdre régulier de côté 2, donc X, Y, Z et Ω forment un tétraèdre régulier unité. Par suite, les trois arcs de (Δ) mesurent $\frac{\pi}{3}$.

La formule (A2) avec $a = 1$ donne **aire (Δ)** $= 3 \times Arc\cos(\frac{1}{3}) - \pi$ = **0,5512...**

Il est clair que aire (Δ) = 0,5512... est l'aire minimale d'un triangle du graphe.
Si dans le graphe (G) une face est un quadrilatère, son aire vaut au minimum 2 × aire(Δ).
Si dans le graphe (G) une face est un pentagone, son aire vaut au minimum 3 × aire(Δ) etc.
D'après les formules (E1) et (E2) d'Euler,

$2\,s - 4 = 2\,a - 2\,f \qquad\qquad 2\,a = 3\,f_3 + 4\,f_4 + 5\,f_5 + \ldots$

donc $2\,s - 4 = 3\,f_3 + 4\,f_4 + 5\,f_5 + \ldots - 2\,(f_3 + f_4 + f_5 + \ldots) = f_3 + 2\,f_4 + 3\,f_5 + \ldots$ (E3)

Or l'aire de (S) est la somme des aires des faces de (G), donc d'après les minorations ci-dessus,

$$4\,\pi \geq \text{aire}\,(\Delta) \times f_3 + 2\ \text{aire}\,(\Delta) \times f_4 + 3\ \text{aire}\,(\Delta) \times f_5 + \ldots$$

qui s'écrit $4\,\pi \geq \text{aire}\,(\Delta)\,[f_3 + 2 \times f_4 + 3 \times f_5 + \ldots] = \text{aire}\,(\Delta) \times (2\,s - 4)$ d'après (E3)

on en tire $2\,s - 4 \leq \frac{4\pi}{aire(\Delta)} \leq \frac{4\pi}{0{,}552} \leq 22{,}8$ d'où $s \leq 13{,}4$.

Cela prouve que (G) ne peut pas avoir plus de 13 sommets, donc qu' **il n'y a pas plus de 13 boules autour de (S).**

V. L'IMPOSSIBILITÉ DE PLACER LA 13ÈME BOULE

Pour le démontrer, il faut affiner la représentation graphique précédente.
Leech a eu en 1956 l'idée suivante : La majoration précédente $s \leq 13{,}4$ est insuffisante, et pour diminuer 13,4 il faut augmenter les aires des faces du graphe (G). Pour cela, il faut augmenter les longueurs de certains arcs, et une manière d'y parvenir est de relier entre eux des sommets qui ne l'étaient pas avant.

Comme dans IV, on remplace chaque boule de l'amas par son point de contact avec (S). On obtient ainsi les sommets d'un graphe (G') sur (S). Mais pour avoir les arcs de (G'), relions deux sommets si et seulement si l'arc de grand cercle qui les joint ne dépasse pas $Arc\cos(\frac{1}{7})$ = **1,427..**

(G') a donc les mêmes sommets que (G), mais ses arcs (XY) relient les sommets X et Y si et seulement si $((XY))$ est compris entre $\frac{\pi}{3} = 1{,}047...$ (minimum qui se produit en cas de contact des sphères) et $Arc\cos(\frac{1}{7}) = 1{,}427...$ (maximum par définition).

Il va falloir minorer les aires des triangles, des quadrilatères et des pentagones du graphe (G') de Leech. Il faudra jouer fin, car c'est la clé du succès de la démonstration.

1) Les minorations

Nous admettrons facilement que les aires minimales sont obtenues pour les "chaînes" de sphères, c'est-à-dire les configurations où chaque sphère est en contact avec la suivante (collier fermé).

- Pour un triangle, pas de changement par rapport au graphe (G), on a vu que aire $(\Delta) =$ **0,5512**...
est l'aire minimale d'un triangle.
- Pour un quadrilatère Q = (ABCD) :

Dans le cas particulier où (ABCD) est un carré, (ΩABCD) est une pyramide à base carrée dont les 8 arêtes mesurent 1. Les diagonales de la base mesurent $\sqrt{2}$.

Mais AC = $\sqrt{2}$ implique $((AC)) = \frac{\pi}{2} = 1{,}570... > Arc\cos(\frac{1}{7})$.

Si (ABCD) n'est pas un carré, c'est un losange de côté 1, et l'une des diagonales disons AC est supérieure à $\sqrt{2}$, $((AC))$ sera supérieur à $\frac{\pi}{2}$ donc à $Arc\cos(\frac{1}{7})$, donc <u>A,C ne sont pas reliés dans (G').</u>

[Cela prouve au passage, que les arêtes de (G') ne se croisent pas].

De plus AC > $\sqrt{2}$ implique BD $< \sqrt{2}$ donc $((BD))$ est inférieur à $\frac{\pi}{2}$. Mais $((BD))$ est supérieure à $Arc\cos(\frac{1}{7})$, sinon B, D seraient reliés et dans le graphe de Leech, Q ne serait pas un quadrilatère mais la réunion de deux triangles !

L'aire minimale d'un quadrilatère sera donc celle du quadrilatère dont les arcs sont ceux de la figure 11 et dont les cordes sont celles de la figure 11' :

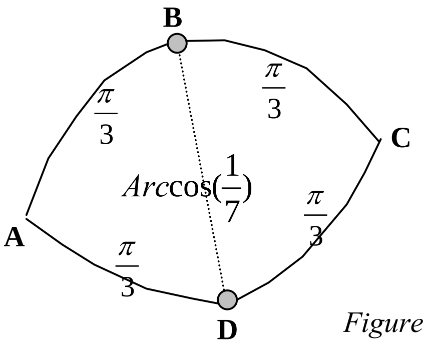


Figure 11

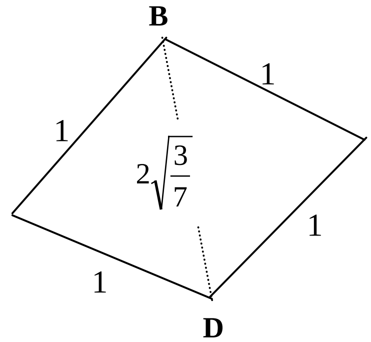


Figure 11'

La valeur $2\sqrt{\frac{3}{7}}$ de la corde BD dans 11' vient de la relation $((XY)) = 2\,Arc\sin(\frac{XY}{2})$.

Ici, $\alpha = ((XY)) = Arc\cos(\frac{1}{7})$ implique $\cos(\alpha) = \frac{1}{7} = 1 - 2\sin^2(\frac{\alpha}{2})$ d'où $\sin(\frac{\alpha}{2}) = \sqrt{\frac{3}{7}}$.

Par ailleurs la fonction $F_2 : a \to Arc\cos\frac{3-2a^2}{3} + 2\,Arc\cos\frac{a}{\sqrt{12-3a^2}} - \pi$

qui donne l'aire du triangle sphérique de côtés (1, 1, a) est croissante sur le domaine $[2\sqrt{\frac{3}{7}}\ ;\ \sqrt{2}]$

qui est celui des valeurs de la corde BD puisque ((*BD*)) varie de $Arc\cos(\frac{1}{7})$ à $\frac{\pi}{2}$.

L'aire minimale d'un quadrilatère est donc obtenue en faisant $a = 2\sqrt{\frac{3}{7}}$ dans la formule A2 et en multipliant par 2 (Voir figure 11'). On trouve :

$$\text{Aire (Q)} \geq 2[Arc\cos(-\frac{1}{7}) + 2\,Arc\cos(\frac{1}{2}) - \pi] = 4\,Arc\cos(\frac{1}{2}) - 2Arc\cos(\frac{1}{7}) = 1{,}333892...$$

- Pour un pentagone :

On admet que l'aire minimale d'un pentagone P = (ABCDE) est obtenue dans un des cas symétriques de la figure 12 où le seul paramètre est a :

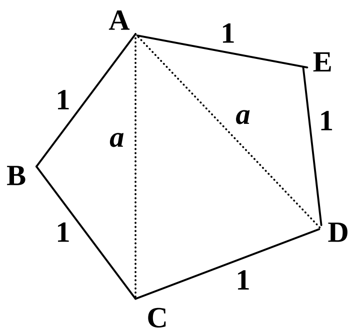


Figure 12

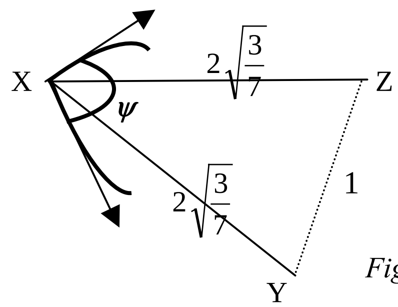


Figure 13

AC et AD ne sont pas des arcs de (G') puisque P est un pentagone. Donc $a > 2\sqrt{\frac{3}{7}}$.

L'aire de P vaut $F(a)$ = aire (ACD) + 2 aire (ABC) = $F_1(a) + 2\,F_2(a)$.
Une étude graphique montre que F est maximale lorsque P est régulier (alors a = 1,618… et $F(a)$ = 2,633…) et que F est minimale lorsque $a = 2\sqrt{\frac{3}{7}}$ (alors $F(a)$ = 2,2262…)

En résumé :

Dans le graphe de Leech, l'aire d'un triangle est minorée par 0,551, celle d'un quadrilatère est minorée par 1,333 et celle d'un pentagone est minorée par 2,226.

2) Démonstration par l'absurde de l'impossibilité de placer la 13ème boule :

Supposons 13 boules placées, donc s **= 13**.

On procède comme dans IV : on a vu que d'après les formules (E1) et (E2) d'Euler,

$$2\,s - 4 = 3\,f_3 + 4\,f_4 + 5\,f_5 + \ldots - 2\,(f_3 + f_4 + f_5 + \ldots) = f_3 + 2\,f_4 + 3\,f_5 + \ldots \quad \text{(E3)}$$

L'aire de (S) est la somme des aires de toutes les faces de (G'), donc d'après les minorations ci-dessus,

$$4\,\pi \geq \text{aire}\,(\Delta) \times f_3 + 2\ \text{aire}\,(Q) \times f_4 + 3\ \text{aire}\,(P) \times f_5 + \ldots$$

qui se minore ainsi : $4\,\pi \geq 0{,}551\,f_3 + 1{,}333\,f_4 + 2{,}226\,f_5 + \ldots$

et qu'on transforme en $4\,\pi \geq 0{,}551\,[f_3 + 2 \times f_4 + 3 \times f_5 + \ldots] + 0{,}231\,f_4 + 0{,}573\,f_5 + \ldots$

ou encore : $4\,\pi \geq 0{,}551\,(2\,s - 4) + 0{,}231\,f_4 + 0{,}573\,f_5 + \ldots$

$s = 13$; $2\,s - 4 = 22$ donc $4\,\pi \geq 0{,}551 \times 22 + 0{,}231\,f_4 + 0{,}573\,f_5 + \ldots$

ou $0{,}231\,f_4 + 0{,}573\,f_5 + \ldots \leq 4\,\pi - 0{,}551 \times 22 < 0{,}445$.

On en déduit $0{,}231\,f_4 < 0{,}445$ donc $f_4 < 2$ autrement dit f_4 vaut 0 ou 1.

- Si $f_4 = 0$ alors il reste $0{,}573\,f_5 + \ldots < 0{,}445$ donc f_5 , f_6 etc. sont tous nuls.
  (Il est clair que les minorations de aire (f_n) forment une suite croissante)
- Si $f_4 = 1$ alors $0{,}231 + 0{,}573\,f_5 + \ldots < 0{,}445$ implique $0{,}573\,f_5 + \ldots < 0{,}214$ donc f_5 , f_6 etc. sont tous nuls.

Ainsi les faces de (G') sont ou bien uniquement des triangles, ou bien des triangles avec un seul quadrilatère.

Premier cas : (G') n'a que des triangles. Donc $f = f_3$.

D'après (E2) $2\,a = 3\,f$ et d'après (E1) $s + f = a + 2$ donc $2\,s + 2\,f = 2\,a + 4 = 3\,f + 4$

D'où $f + 4 = 2\,s = 26$ soit $f = 22$ et $a = s + f - 2 = 33$.

(G') aurait donc 13 sommets, 33 arêtes et 22 faces (triangulaires exclusivement).

Mais un angle au sommet d'un graphe de Leech, (tel ψ de la figure 13) est minimal avec les données de la figure 13 (XY et XZ maximaux, YZ minimal, que YZ soit on non un arc de (G')).

Dans l'annexe 3, la formule 3-1 : $\sin(\frac{\psi}{2}) = \frac{1}{a\sqrt{4-a^2}}$ permet le calcul de la mesure de ψ :

$a = 2\sqrt{\frac{3}{7}}$ donne $\psi = Arc\sin(\frac{7\sqrt{3}}{24}) = 1{,}059\ldots > \frac{2\pi}{6}$. Donc il y a au plus 5 arcs aboutissant à un sommet de (G'). On dit que **l'ordre d'un sommet quelconque de (G') est inférieur ou égal à 5**.

Cela entraîne que le nombre total d'arêtes ne peut dépasser $\frac{5s}{2} = 32{,}5 < 33$ ce qui est absurde.

Deuxième cas : (G') n'a que des triangles et un seul quadrilatère. Donc $f = f_3 + f_4$ et $f_4 = 1$

D'après (E2) $2\,a = 3\,f_3 + 4$ et $f_3 = f - 1$

D'après (E1) $2\,s + 2\,f = 2\,a + 4 = 3\,(f - 1) + 4 + 4 = 3\,f + 5$ donc $f = 2\,s - 5 = 21$ d'où $a = 32$.

(G') possèderait donc 13 sommets, 32 arêtes, 21 faces triangulaires et un quadrilatère.

Soit x le nombre de sommets d'ordre 5 de (G'). Les autres sont d'ordre au plus 4. Le double dénombrement des arêtes donne : $64 = 2\,a \leq 5\,x + 4\,(13 - x) = x + 52$ d'où $x \geq 12$.

Ainsi il y a dans (G') 12 ou 13 sommets d'ordre 5.

Si x était égal à 13, tous les sommets de (G') seraient d'ordre 5 ce qui entraînerait $2\,a = 5\,s = 65$; c'est impossible. Donc (G') a 12 sommets d'ordre 5 et un sommet d'ordre 4 puisque le dénombrement des arêtes donne $64 = 2\,a = 5 \times 12 + 4$.

Le sommet d'ordre 4 appartient ou non au quadrilatère, soient deux cas à étudier :

a) Le sommet d'ordre 4 appartient au quadrilatère Q. (En gris dans la figure 14).

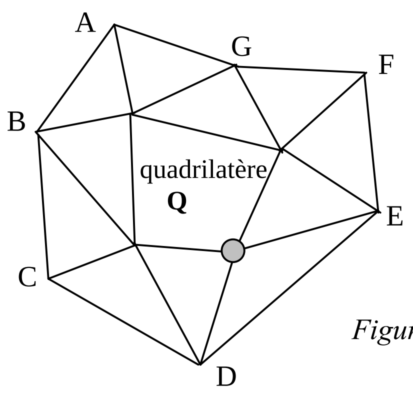


Figure 14

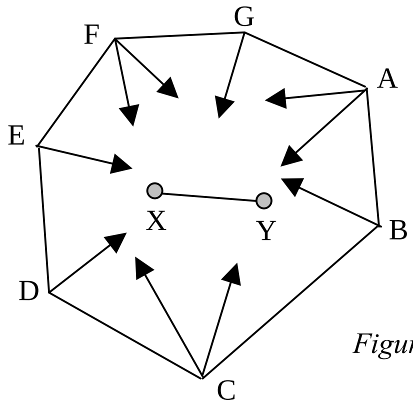


Figure 14'

La figure 14 montre ce que l'on voit nécessairement autour du quadrilatère Q. Elle contient 11 sommets, 22 arêtes et 12 faces. Il manque 2 sommets, 10 arêtes et 9 faces triangulaires qui sont "de l'autre côté" de la sphère. Si on retourne celle-ci, on voit le reste du graphe sur la figure 14'.
X, Y sont les deux sommets manquants, et de A,B,C,D,E,F,G partent au total 10 arcs pour que ces sept sommets soient bien d'ordre 5 (Seul le sommet grisé est d'ordre 4). Hélas, en comptant l'arête XY cela fait 11 arêtes, soit une de trop. C'est impossible.

b) Le sommet d'ordre 4 n'appartient pas au quadrilatère Q. (Figure 15)

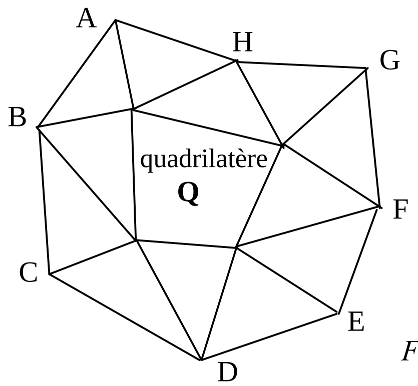


Figure 15

La figure 15 montre ce que l'on voit nécessairement autour du quadrilatère Q dont les 4 sommets sont d'ordre 5. Elle contient 12 sommets, 24 arêtes et 13 faces. Il manque 1 sommet, 8 arêtes et 8 faces triangulaires qui sont "de l'autre côté" de la sphère. Ces 8 arêtes devraient toutes aboutir au sommet manquant invisible X. C'est impossible, X étant d'ordre inférieur ou égal à 5.

Rien à faire, la 13ème boule ne tient pas, vive Newton !

ANNEXES

1) Les formules d'Euler

Un graphe (G) sur la sphère possède $\boldsymbol{s}$ sommets, $\boldsymbol{f}$ faces et $\boldsymbol{a}$ arêtes.
f_3 est le nombre de faces triangulaires, f_4 le nombre de faces quadrangulaires, f_5 le nombre de faces pentagonales etc.

a) Il faut prouver $\boldsymbol{s + f - a = 2.}$ **(E1)**

(E1) est vraie si (G) est réduit à un sommet ($s = 1$ $f = 1$ $a = 0$). Dans ce cas $Z = s + f - a = 2$.
Or la quantité Z est invariante lors des deux opérations suivantes de la figure 16 :
- à gauche, ajout d'une arête pendante (en gras) , s et a augmentent chacun de 1.
- à droite, ajout d'une arête fermante (en gras) , a et f augmentent chacun de 1.

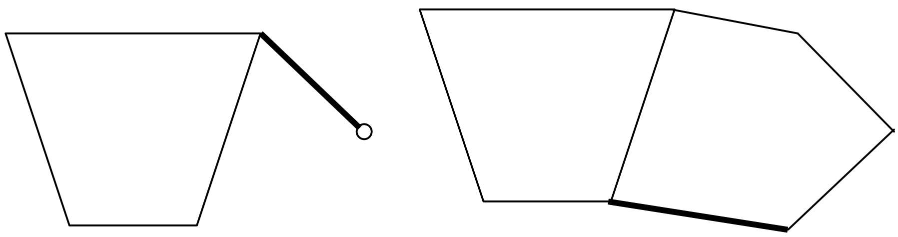


Figure 16

Il suffit donc en partant d'un sommet de (G) de construire le graphe de proche en proche par adjonction d'arêtes en connection avec ce qu'on avait.

b) Il faut prouver $\boldsymbol{2a = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \ldots}$ **(E2)**

On suppose bien sûr que (G) a au moins une face, donc deux faces car on est sur une sphère. Chaque arête de (G) est commune à deux faces, et une face triangulaire contribue pour 3 arêtes, une face quadrangulaire contribue pour 4 arêtes, etc. (E2) en découle immédiatement.

2) Calcul de l'aire d'un triangle sphérique

Tout est dans la figure 7 qu'il faut bien lire.
Appelons <u>tranche(α)</u> la portion de la sphère définie par l'angle α, c'est à dire la partie de (S) limitée par les plans ACA' et ABA'.

L'aire de tranche(α) est évidemment égale à $4\pi \times \dfrac{\alpha}{2\pi} = 2\alpha$.

Ainsi : aire (ABC) + aire (A'BC) = 2 α.
De même : aire (ABC) + aire (AB'C) = 2 β et aire (ABC) + aire (ABC') = 2 γ.

Ajoutons membre à membre :

3 aire (ABC) + aire (A'BC) + aire (AB'C) + aire (ABC') = 2 α + 2 β + 2 γ.

Transformons et utilisons la symétrie pour écrire aire (ABC') = aire (A'B'C) :

2 aire (ABC) + [aire (ABC) + aire (A'BC) + aire (AB'C) + aire (ABC')] = 2 α + 2 β + 2 γ.
2 aire (ABC) + [aire (ABC) + aire (A'BC) + aire (AB'C) + aire (A'B'C)] = 2 α + 2 β + 2 γ.

Un peu de vision dans l'espace montre que le crochet est précisément l'aire de l'hémisphère nord : 2 π.

En divisant par 2, on a bien : $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ pour l'aire du triangle sphérique d'angles α, β, γ sur la sphère unité, avec multiplication par R^2 sur une sphère de rayon R.
Cette formule est due à Albert Girard 1595-1632.

3) Les formules de calcul

Il faut calculer l'aire, donc les angles du triangle sphérique (ABC) en gris dans la figure 17 (on voit les cordes du triangle, les arcs de la sphère, eux, sont invisibles) . Ω est le centre de la sphère unité.
Les côtés du triangle ABC mesurent a, b, c qui sont tous compris entre 1 et 2.

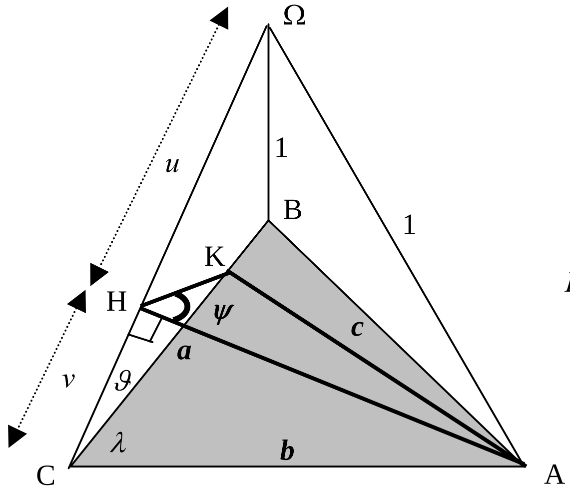


Figure 17

Calculons par exemple l'angle ψ des plans ΩAC et ΩBC. Le plan perpendiculaire à ΩC passant par A coupe ΩC en H et BC en K. ψ est la mesure de l'angle AHK.

Posons $\mathrm{H}\Omega = u$; $\mathrm{HC} = v$ et notons ϑ la mesure de l'angle ΩCB et λ celle de l'angle BCA.

On a : $\mathrm{AH}^2 = 1 - u^2 = b^2 - v^2$ et $u + v = 1 = \Omega\mathrm{C}$. On tire $u^2 - v^2 = 1 - b^2$ donc $u - v = 1 - b^2$.
D'où $\mathrm{CH} = v = \frac{1}{2}b^2$ et $\mathrm{AH}^2 = \frac{b^2}{4}(4-b^2)$. Cela donne $\mathrm{AH} = \frac{b}{2}\sqrt{4-b^2}$.

Dans le triangle (ΩBC) : $\cos(\vartheta) = \frac{a}{2}$ et dans (CHK) : $\tan(\vartheta) = \frac{2\,\mathrm{HK}}{b^2}$.

De $1 + \tan^2(\vartheta) = \frac{1}{\cos^2(\vartheta)} = \frac{4}{a^2}$ on tire $\tan(\vartheta) = \frac{\sqrt{4-a^2}}{a} = \frac{2\,\mathrm{HK}}{b^2}$ d'où $\mathrm{HK} = \frac{b^2\sqrt{4-a^2}}{2a}$.

Dans (CHK), Pythagore donne $\mathrm{CK} = \sqrt{\mathrm{CH}^2 + \mathrm{HK}^2} = \frac{b^2}{a}$.

Dans (ABC), Al Kashi donne : $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos(\lambda)$ d'où $\cos(\lambda) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

Dans (KCA) Al Kashi donne : $\mathrm{AK}^2 = \mathrm{KC}^2 + b^2 - 2\,b\,\mathrm{KC}\cos(\lambda)$ d'où après simplifications $\mathrm{AK} = \frac{bc}{a}$.
Enfin dans (KHA) le même Al Kashi donne : $\mathrm{AK}^2 = \mathrm{HK}^2 + \mathrm{AH}^2 - 2\,\mathrm{HK.AH}\cos(\psi)$ d'où, en remplaçant AK, HK, AH par leurs valeurs et en simplifiant :

$$\cos(\psi) = \frac{2(a^2+b^2-c^2) - a^2b^2}{ab\sqrt{4-a^2}\sqrt{4-b^2}}.$$

Il suffit de permuter circulairement a, b, c pour avoir les deux autres angles et ensuite, appliquer la formule d'Albert Girard de l'annexe 2 pour avoir l'aire du triangle sphérique (ABC) de côtés a, b, c :

Formule de calcul de l'aire de (ABC), de côtés a, b, c :

$$\text{Aire (ABC)} = \text{Arccos}\ \frac{2(a^2+b^2-c^2)-a^2b^2}{ab\sqrt{4-a^2}\sqrt{4-b^2}} + \text{Arccos}\ \frac{2(b^2+c^2-a^2)-b^2c^2}{bc\sqrt{4-b^2}\sqrt{4-c^2}} + \text{Arccos}\ \frac{2(c^2+a^2-b^2)-c^2a^2}{ca\sqrt{4-c^2}\sqrt{4-a^2}} - \pi$$

BIBLIOGRAPHIE

"Jeux de formes, formes de jeux", de Bernard Bettinelli (IREM de Besançon 1984).

"Les mathématiques aujourd'hui", Bibliothèque POUR LA SCIENCE, Belin : L'article "Les empilements de sphères" page 53.

Les dessins ont tous été réalisés avec le logiciel WORD 97, et la barre d'outils nommée "Dessin".
On peut ajouter cette barre en cliquant sur "Affichage" puis sur "Barre d'outils" et en cochant "Dessin".

Autour d'un résultat méconnu,

le théorème de Midy (1836)

Emmanuel MOREAU, Lycée Davier à Joigny

$\frac{1}{7} = 0.142857\,142857\,142857\,142857.........$, ce que l'on note $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$.
On scinde la période 142857 en deux et on obtient les deux nombres 142 et 857.
On ajoute ces deux nombres :

$$142 + 857 = 999\,.$$

On obtient un nombre qui n'est formé que de 9. L'analogue de ce résultat reste vrai pour tout nombre de la forme m/p, p premier différent de 2 et de 5 et m premier avec p, si la longueur de la "période"du développement décimal de m/p est un nombre pair. C'est le théorème de Midy.

Scindons maintenant la période en trois, on obtient les trois nombres 14, 28 et 57, ajoutons :

$$14 + 28 + 57 = 99$$

Ce dernier résultat, qui est vrai pour tout nombre de la forme $1/p$ dont la longueur de la période est divisible par 3 (p premier), n'a été découvert et prouvé qu'en janvier 2004.

Ces propriétés amusantes sont tout à fait à la portée de nos élèves de Terminale S qui font de l'arithmétique.
Nous consacrerons les deux premiers paragraphes de cet article à des démonstrations de ces résultats, telles qu'elles pourraient être exposées en classe de Terminale (I et II).
Il nous sera alors facile de généraliser (III.1) : si le développement décimal de la fraction m/p, où p est premier, est périodique et que l'on peut scinder la période en d nombres de s' chiffres, c'est-à-dire si l'on peut écrire

$$\frac{m}{p} = u_0.\overline{u_1 u_2\ ...\ u_d}$$

alors $u_1 + u_2 + ... + u_d = k \times (10^{s'} - 1)$ avec $1 \le k \le d - 1$.
Dans la partie III.2 nous nous intéressons aux valeurs que peut prendre k pour une fraction donnée (nous donnons dans certain cas un encadrement meilleur que le précédent).
Nous terminons l'article (IV) en formulant une conjecture portant sur l'ordre de grandeur moyen de la longueur de la période d'une fraction de la forme m/p.

I. DÉMONSTRATIONS DU THÉORÈME DE MIDY.

I.1. La division usuelle : formalisation et conséquences.

Le théorème de Midy énonce une propriété des chiffres de la "période" (terme qu'il nous faudra définir) du développement décimal d'un nombre de la forme m/p. Regardons comment apparaissent ces chiffres lorsqu'on effectue la division de m par p.
Nous pouvons sans perte de généralité supposer $0 < m < p$.
Effectuons par exemple la division de 2 par 7 :

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{20} & \ \ 7 \\ \cline{2-2} \mathbf{6} & 0.\mathbf{3} \end{array}$$

2 est plus petit que 7, on met donc un zéro derrière le 2 et on dit « en 20 il y a 3 fois 7 et il reste 6 », ce qui revient à effectuer la division euclidienne de 20 par 7 :

$$\mathbf{20} = \mathbf{3} \times 7 + \mathbf{6}$$

On obtient ainsi le premier chiffre après la virgule $a_1 = \mathbf{3}$ et un reste $r_1 = \mathbf{6}$.
On pose $r_0 = m = \mathbf{2}$, on a ainsi effectué la division euclidienne de $10\,r_0$ par 7.

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{20} & \ \ 7 \\ \cline{2-2} \mathbf{6}0 & 0.\mathbf{38} \\ \mathbf{4} & \end{array}$$

On met un zéro derrière le 6 :
« En 60 il y a 8 fois 7 et il reste 4 ».
On effectue donc la division euclidienne de $60 = 10r_1$ par 7 : $60 = \mathbf{8} \times 7 + \mathbf{4}$.
On obtient ainsi le second chiffre après la virgule $a_2 = \mathbf{8}$ et un nouveau reste $r_3 = \mathbf{4}$.

La suite (a_i) des chiffres qui apparaissent après la virgule et la suite (r_i) des restes sont donc obtenues par divisions euclidiennes successives :

$$\begin{aligned} & r_0 = m \\ & 10r_0 = a_1 p + r_1 \\ & 10r_1 = a_2 p + r_2 \\ & \dots\dots\dots\dots\dots \\ & 10r_n = a_{n+1} p + r_{n+1} \end{aligned}$$

Ces suites sont donc définies par récurrence de la façon suivante :

$$\begin{cases} r_0 = m \\ a_{n+1} \textit{ et } r_{n+1} \textit{ sont respectivement le quotient et le} \\ \textit{reste de la division euclidienne de } 10r_n \textit{ par } p. \end{cases}$$

Remarque : On peut préférer à cette présentation volontairement "naïve" la présentation faite dans le Terracher-Ferachoglou 2002, ex 109 p 364.

I.2. Premières conséquences.

Cette introduction faite, on peut amener les élèves à établir quelques résultats généraux :

A **a)** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $r_n = m10^n \mod p$.

On remarquera que les entiers r_n vérifiant $0 \le r_n \le p-1$, cette relation détermine complètement la valeur de r_n.

b) En déduire que si p est un nombre premier différent de 2 et différent de5, alors $r_n \neq 0$ pour tout n.

On considère dans tout ce qui suit un nombre premier p différent de 2 et différent de5.

c) Soit s le plus petit entier non nul tel que $10^s = 1 \mod p$.

Montrer que s existe et que $s \le p-1$.

d) Montrer que pour tout $n \ge 0$ on a $r_{n+s} = r_n$ et que pour tout $n \ge 1$ on a $a_{n+s} = a_n$.

Interpréter ce dernier résultat.

Commentaires et réponses

a) La relation est vraie pour $n = 0$ car $r_0 = m = m \mod p$.

Supposons cette relation vraie à un rang n quelconque.

On a $10r_n = a_{n+1}p + r_{n+1}$, on en déduit $r_{n+1} = 10r_n - a_{n+1}p$ donc $r_{n+1} = 10 \times 10^n - 0 \mod p$. On a donc bien $r_{n+1} = 10^{n+1} \mod p$.

b) $r_n = 0 \Rightarrow r_n = 0 \mod p \Rightarrow 10^n = 0 \mod p$

On en déduit que p divise $10^n = 2^n \times 5^n$, donc $p = 2$ ou $p = 5$.

Par conséquent si p n'est égal ni à 2 ni à 5 alors $r_n \neq 0$ pour tout n.

c) D'après le théorème de Fermat on a $10^{p-1} = 1 \mod p$ donc il existe bien un plus petit entier s vérifiant $10^s = 1 \mod p$ et on a $s \le p-1$.

Remarque : il ne nous est pas indispensable ici de prouver que s divise $p-1$, mais il serait dommage d'aborder ce sujet sans démontrer cette intéressante propriété.

On peut consulter à ce sujet le Terracher-Ferachoglou 2002, ex 75 p 391.

d) $r_{n+s} = m \times 10^{n+s} = m \times 10^n \times 10^s = m \times 10^n = r_n \mod p$

On en déduit d'après la remarque faite à la question a) que $r_{n+s} = r_n$.

D'autre part a_{n+1} dépend uniquement de r_n (p est fixé) donc $r_{n+s} = r_n \Rightarrow a_{n+1+s} = a_{n+1}$.

Ceci étant vrai pour tout $n \ge 0$, on a $a_{n+s} = a_n$ pour tout $n \ge 1$.

Interprétation : le développement décimal de m/p est périodique, et ceci dès la virgule.

Les résultats obtenus à l'issue de cette question d) nous autorise à poser la définition suivante :

Définition : Si p est un nombre premier différent de 2 et différent de5 et si m est un entier premier avec p, on appelle période de m/p le nombre $a_1a_2 ..... a_s$ formé des s premières décimales de m/p (le chiffres a_i étant juxtaposés et non multipliés), où s est le plus petit entier non nul vérifiant $10^s = 1 \mod p$.

On remarque que $1/p$ et m/p ont des périodes de même longueur.

I.3. Première démonstration du théorème de Midy.

On peut ainsi conduire les élèves vers une démonstration :

B On suppose dans ce qui suit que le plus entier non nul s tel que $10^s = 1 \bmod p$ est pair et on pose $s = 2s'$.

a) Montrer que $10^{s'} = -1 \bmod p$.

Indication : p divise $10^{2s'} - 1 = (10^{s'} - 1)(10^{s'} + 1)$

b) Montrer que pour tout $n \geq 0$ on a $r_n + r_{n+s'} = 0 \bmod p$.

En déduire que $r_n + r_{n+s'} = p$.

c) Soit x un réel quelconque.

Montrer que si x n'est pas entier alors $E(x) + E(10 - x) = 9$.

$E(x)$ désigne la partie entière d'un réel x.

d) Justifier que pour tout $n \geq 1$ on a $a_n = E\left(\dfrac{10r_{n-1}}{p}\right)$.

En déduire que pour tout $n \geq 1$ on a $a_n + a_{n+s'} = 9$.

e) On considère les deux nombres $u_1 = a_1 a_2 \ldots a_{s'}$ *et* $u_2 = a_{s'+1} a_{s'+2} \ldots a_{2s'}$, obtenus en juxtaposant (et non en multipliant) les chiffres $a_1, \ldots, a_{s'}$ *et* $a_{s'+1}, \ldots, a_{2s'}$.

Que vaut $u_1 + u_2$?

f) On donne :

$1/7 = 0.\overline{142857}$

$1/11 = 0.\overline{09}$; $2/11 = 0.\overline{18}$; $3/11 = 0.\overline{27}$ ...

$1/13 = 0.\overline{076923}$

$2/13 = 0.\overline{153846}$

$1/17 = 0.\overline{0588235294117647}$

$1/101 = 0.\overline{0099}$

$1/21 = 0.\overline{047619}$

$1/707 = 0.\overline{001414427157}$

Vérifier (pour vous-même) que pour chacune des fractions ci-dessus le nombre $u_1 + u_2$ s'écrit avec le seul chiffre 9.

Ceci n'est pas vrai pour les deux derniers exemples, expliquer pourquoi dans votre copie.

Commentaires et réponses

a) p ne divise pas $10^{s'} - 1$ sinon $10^{s'} = 1 \bmod p$, ce qui contredit le caractère minimal de $2s'$.

p divise donc $10^{s'} + 1$, d'où $10^{s'} = -1 \bmod p$.

b) $r_n + r_{n+s'} = m(10^n + 10^{n+s'}) = m(10^n + 10^n \times 10^{s'}) = m(10^n - 10^n) = 0 \bmod p$

De plus $0 < r_n + r_{n+s'}$ d'après la question A-b) et $r_n + r_{n+s'} \leq 2p - 2 < 2p$ donc $r_n + r_{n+s'} = p$.

c) On a pour tout x : $x - 1 < E(x) \leq x$ donc $8 < E(x) + E(10 - x) \leq 10$.

De plus $E(x) + E(10 - x)$ est un entier donc $E(x) + E(10 - x)$ est égal à 9 ou à 10. Mais si x n'est pas entier on a $E(x) < x$ donc $E(x) + E(10 - x) < x + 10 - x = 10$, on en déduit

$$E(x) + E(10 - x) = 9$$

d) Pour tout $n \geq 1$, a_n est le quotient dans la division euclidienne de $10r_{n-1}$ par *p, a_n* est donc le plus grand entier inférieur ou égal à $\dfrac{10r_{n-1}}{p}$, on a donc bien $a_n = E\left(\dfrac{10r_{n-1}}{p}\right)$.

On en déduit que $\qquad a_{n\,+}\, a_{n+s'} = \left(\dfrac{10r_{n-1}}{p}\right) + E\left(\dfrac{10r_{n+s'-1}}{p}\right)$.

Or $r_{n-1} + r_{n+s'-1} = p$ d'après la question B-b) donc $\qquad a_n + a_{n+s'} = \left(\frac{10r_{n-1}}{p}\right) + E\left(\frac{10r_{n+s'-1}}{p}\right)$.

On pose $x = \frac{10r_{n-1}}{p}$. x n'est pas entier car p ne divise pas 10 et p ne divise pas r_{n-1} (d'après A-b))

donc $\qquad a_n + a_{n+s'} = E(x) + E(10 - x) = 9$

Et ceci pour tout $n \geq 1$.

e) Il n'y a qu'à effectuer naïvement l'addition.

On obtient $9 \ldots\ldots 9 = 10^{s'} - 1$.

f) 21 et 707 ne sont pas premiers.

21 est un nombre de la forme $3p$ où p est un nombre premier différent de 2 et de 5.

On peut montrer que dans ce cas, si $1/p$ a une période paire et si m est premier avec $3p$, alors $\frac{1}{3p}$ a une période de même longueur et si on écrit $\frac{1}{3p} = 0.\overline{u_1 u_2}$ on a $u_1 + u_2 = k \times 3\ldots3$ où k est égal à 1, à 2 ou à 3.

L'essentiel de la démonstration tient au fait que la période de $1/p$ est divisible par 9, donc par 3 (voir III.1).

I.4. Deuxième démonstration du théorème de Midy.

On conserve les hypothèses précédentes : m/p a une période de longueur paire $2s'$ et on pose :

$$\frac{m}{p} = 0,\overline{u_1 u_2}\,.$$

avec $u_1 = a_1 a_2 \ldots\ldots a_{s'}$ et $u_2 = a_{s'+1} a_{s'+2} \ldots\ldots a_{2s'}$, les chiffres a_i étant juxtaposés.

On a alors : $\qquad \frac{10^{s'} m}{p} = u_1,\overline{u_2 u_1}\,.$

Or $10^{s'} + 1 = 0 \bmod p$ d'après la question B-a) donc $\frac{m}{p} + \frac{10^{s'} m}{p} = \frac{\left(10^{s'} + 1\right) m}{p}$ est entier, on en déduit que $0,\overline{u_1 u_2} + 0,\overline{u_2 u_1}$ est entier.

Or cette somme est strictement comprise entre 0 et 2, on en déduit que $0,\overline{u_1 u_2} + 0,\overline{u_2 u_1} = 1$.

On pourrait presque écrire : « Donc $0,\overline{u_1 u_2} + 0,\overline{u_2 u_1} = 0,\overline{999}$, donc $u_1 + u_2 = 9 \ldots\ldots 9 = 10^{s'} - 1$ »

Mettons-y quelque peu les formes :

On a $\qquad 0,\overline{u_1 u_2} = u_1(10^{-s'} + 10^{-3s'} + 10^{-5s'} + \ldots\ldots) + u_2(10^{-2s'} + 10^{-4s'} + \ldots\ldots)$

Et $\qquad 0,\overline{u_2 u_1} = u_2(10^{-s'} + 10^{-3s'} + 10^{-5s'} + \ldots\ldots) + u_1(10^{-2s'} + 10^{-4s'} + \ldots\ldots)$

D'où $\qquad 0,\overline{u_1 u_2} + 0,\overline{u_2 u_1} = (u_1 + u_2) \times 10^{-s'} \times (1 + 10^{-s'} + 10^{-2s'} + 10^{-3s'} + \ldots\ldots) = 1$

On en déduit que $\frac{(u_1 + u_2)}{1 - 10^{-s'}} 10^{-s'} = 1$ d'où finalement $u_1 + u_2 = \frac{1 - 10^{-s'}}{10^{-s'}} = 10^{s'} - 1$, ce qui est précisément le théorème de Midy.

II - UNE GÉNÉRALISATION IGNORÉE PENDANT 167 ANS.

$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$

La période de $1/7$ est de longueur divisible par 2 mais aussi par 3 et l'on peut, sur le modèle précédent, former à partir de 142857 trois nombres de même longueur : 14, 28 et 57. Or $14+28+57=99$.
Ce n'est qu'en janvier 2004 qu'un étudiant de l'université de Yale, Brian Ginsberg, a remarqué et prouvé ce résultat. À citer en exemple pour que nos élèves fassent l'effort de débusquer les propriétés oubliées …
Les questions qui suivent doivent être précédées de l'exposé de la seconde preuve du théorème de Midy.

C Le nombre p est un nombre premier différent de 2 et différent de 5.

On suppose que le développement décimal de $1/p$ a une période de longueur s divisible par 3. On pose $s=3s'$.

On a donc : $\frac{1}{p} = 0,\overline{a_1 \,.....\, a_{s'}a_{s'+1} \,.....\, a_{2s'}a_{2s'+1} \,.....\, a_{3s'}}$

On pose : $\begin{cases} u_1 = a_1 \,.....\, a_{s'} \\ u_2 = a_{s'+1} \,.....\, a_{2s'} \\ u_3 = a_{2s'+1} \,.....\, a_{3s'} \end{cases}$

… les chiffres a_i étant ici juxtaposés et non multipliés. On a ainsi : $\frac{1}{p} = 0,\overline{u_1u_2u_3}$

a) Montrer que p divise $1+10^{s'}+10^{2s'}$. On rappelle que $s=3s'$ est le plus petit entier non nul tel que p divise $10^{3s'}-1$.

b) En déduire que $0,\overline{u_1u_2u_3}+0,\overline{u_2u_3u_1}+0,\overline{u_3u_1u_2}$ est entier.

A priori, quelles sont les valeurs possibles de cet entier ?

On veut montrer que $0,\overline{u_1u_2u_3}+0,\overline{u_2u_3u_1}+0,\overline{u_3u_1u_2}=1$.

c) Montrer que $r_0+r_{s'}+r_{2s'}=0 \mod p$. (Comme précédemment, la suite (r_n) est la suite des restes qui apparaissent dans la division usuelle de 1 par p).

En déduire que $r_0+r_{s'}+r_{2s'}=p$.

d) On a $a_1+a_{s'+1}+a_{2s'+1} = E\left(\frac{10}{p}\right)+E\left(\frac{10r_{s'}}{p}\right)+E\left(\frac{10r_{2s'}}{p}\right)$.

Montrer que $a_1+a_{s'+1}+a_{2s'+1} \le 10$.

e) En déduire que $0,\overline{u_1u_2u_3}+0,\overline{u_2u_3u_1}+0,\overline{u_3u_1u_2} \le 1.3$ puis que

$0,\overline{u_1u_2u_3}+0,\overline{u_2u_3u_1}+0,\overline{u_3u_1u_2}=1$

f) En déduire que $u_1+u_2+u_3 = 9\,...\,9 = 10^{s'}-1$.

g) Quelques exemples. On donne :

$\frac{1}{13} = 0,\overline{076923}$

$\frac{1}{43} = 0,\overline{023255813953488372093}$

$\frac{1}{91} = 0,\overline{010989}$

$\frac{3}{7} = 0,\overline{428571}$

Calculer $u_1+u_2+u_3$ dans chacun de ces cas. Le dernier exemple appelle une remarque que vous formulerez.

h) Le nombre p est désormais un nombre premier tel que le développement décimal de $1/p$ a une période de longueur s divisible par 4. On écrit :

$$\frac{1}{p}=0,\overline{u_1u_2u_3u_4}$$

Montrer que $u_1+u_2+u_3+u_4=2\times 9\,....\,9=2\times(10^{s'}-1)$ où $4s'=s$.

Commentaires et réponses

a) La méthode est analogue à celle utilisée pour résoudre la question B-a). On part de l'identité $10^{3s'}-1=(10^{s'}-1)(1+10^{s'}+10^{2s'})$.

p divise $10^{3s'}-1$ par définition de $s=3s'$ et p ne divise pas $10^{s'}-1$ car $s'<s$.

On en déduit que p divise $1+10^{s'}+10^{2s'}$.

b) $$\frac{1}{p}=0.\overline{u_1u_2u_3}\ ;\ \frac{10^{s'}}{p}=u_1.\overline{u_2u_3u_1}\ \text{ et }\ \frac{10^{2s'}}{p}=u_1u_2.\overline{u_3u_1u_2}\,.$$

On ajoute : $$\frac{1+10^{s'}+10^{2s'}}{p}=0.\overline{u_1u_2u_3}+u_1.\overline{u_2u_3u_1}+u_1u_2.\overline{u_3u_1u_2}\,.$$

Or $\dfrac{1+10^{s'}+10^{2s'}}{p}$ est entier d'après la question précédente, donc $0.\overline{u_1u_2u_3}+0.\overline{u_2u_3u_1}+0.\overline{u_3u_1u_2}$ est entier.

Ces trois nombres sont strictement compris entre 0 et 1 donc $0.\overline{u_1u_2u_3}+0.\overline{u_2u_3u_1}+0.\overline{u_3u_1u_2}$ est égal à 1 ou à 2.

c) On sait que pour tout entier naturel n on a $r_n=10^n \bmod p$ (question A-a) donc :

$$r_0+r_{s'}+r_{2s'}=1+10^{s'}+10^{2s'}=0 \bmod p \text{ d'après la question C-a).}$$

Or $r_0=1$, $r_{s'}\le p-1$ et $r_{2s'}\le p-1$ donc $1\le r_0+r_{s'}+r_{2s'}\le 2p-1$.

L'entier $r_0+r_{s'}+r_{2s'}$ étant un multiple de p, on a donc $r_0+r_{s'}+r_{2s'}=p$.

d) Pour tout x on a $E(x)\le x$ donc $a_1+a_{s'+1}+a_{2s'+1}\le \dfrac{10(1+r_{s'}+r_{2s'})}{p}=10$.

e) a_1 est le premier chiffre de $0.\overline{u_1u_2u_3}$ donc $0.\overline{u_1u_2u_3}\le\dfrac{a_1+1}{10}$.

De même $0.\overline{u_2u_3u_1}\le\dfrac{a_{s'+1}+1}{10}$ et $0.\overline{u_3u_1u_2}\le\dfrac{a_{2s'+1}+1}{10}$, on en déduit :

$$0.\overline{u_1u_2u_3}+0.\overline{u_2u_3u_1}+0.\overline{u_3u_1u_2}\le\frac{a_1+a_{s'+1}+a_{2s'+1}+3}{10}\le\frac{13}{10}=1.3$$

Or on sait (question b) que $0.\overline{u_1u_2u_3}+0.\overline{u_2u_3u_1}+0.\overline{u_3u_1u_2}$ est égal à 1 ou à 2, on en déduit que $0.\overline{u_1u_2u_3}+0.\overline{u_2u_3u_1}+0.\overline{u_3u_1u_2}=1$.

f)
$$0.\overline{u_1u_2u_3}=u_1(10^{-s'}+10^{-4s'}+\dots)+u_2(10^{-2s'}+10^{-5s'}+\dots)+u_3(10^{-3s'}+10^{-6s'}+\dots)$$
$$0.\overline{u_2u_3u_1}=u_2(10^{-s'}+10^{-4s'}+\dots)+u_3(10^{-2s'}+10^{-5s'}+\dots)+u_1(10^{-3s'}+10^{-6s'}+\dots)$$
$$0.\overline{u_3u_1u_2}=u_3(10^{-s'}+10^{-4s'}+\dots)+u_1(10^{-2s'}+10^{-5s'}+\dots)+u_2(10^{-3s'}+10^{-6s'}+\dots)$$

D'où en ajoutant :

$$1=(u_1+u_2+u_3)(10^{-s'}+10^{-2s'}+\dots)=(u_1+u_2+u_3)10^{-s'}\times\frac{1}{1-10^{-s'}}=(u_1+u_2+u_3)\frac{1}{10^{s'}-1}$$

Et donc finalement : $u_1 + u_2 + u_3 = 10^{s'} - 1 = 9\,...\,9$.

g) $7 + 69 + 23 = 99$

$232558 + 1395348 + 8372093 = 9999999$

$1 + 9 + 89 = 99$

$42 + 85 + 71 = 198 = 2 \times 99$

On constate sur ce dernier exemple que le résultat prouvé pour un nombre de la forme $1/p$ n'est pas valable pour un nombre de la forme m/p, même si m et p sont premiers entre eux. On peut néanmoins, partant de la question C-b) ($0.\overline{u_1u_2u_3} + 0.\overline{u_2u_3u_1} + 0.\overline{u_3u_1u_2}$ est égal à 1 ou à 2) et s'inspirant des questions qui suivent, montrer qu'une fraction m/p dont la longueur de la période est divisible par 3 s'écrit : $\dfrac{m}{p} = 0.\overline{u_1u_2u_3}$ avec $u_1 + u_2 + u_3 = 10^{s'} - 1$ ou $u_1 + u_2 + u_3 = 2 \times (10^{s'} - 1)$

Nous prouverons un résultat plus général dans ce qui suit (III.1).

h) La partie B montre que si $1/p$ a une période de longueur divisible par 2 alors on peut écrire $1/p = 0.\overline{u_1u_2}$ avec $u_1 + u_2 = 9...9$.

La partie C montre que l'on a un résultat analogue si la longueur de la période est divisible par 3 ; on peut écrire $1/p = 0.\overline{u_1u_2u_3}$ avec $u_1 + u_2 + u_3 = 9...9$.

Il est naturel de se poser la question : et si la longueur de la période est divisible par 4, par 5…

Soit p un nombre premier tel que la période de $1/p$ a une période de longueur s divisible par 4. On écrit : $$\frac{1}{p} = 0.\overline{u_1u_2u_3u_4}$$

La longueur de cette période est aussi divisible par 2, on peut écrire : $\dfrac{1}{p} = 0.\overline{u'_1\,u'_2}$ avec $\begin{cases} u'_1 = u_1u_2 \\ u'_2 = u_3u_4 \end{cases}$, les nombres u_iu_j étant juxtaposés.

D'après la partie B on a $u'_1 + u'_2 = 9...9$ ($2s'$ chiffres 9, avec $s = 4s'$), d'où :

$$u_1u_2 + u_3u_4 = 9...9 = 10^{s'}(u_1 + u_3) + u_2 + u_4$$

Or $10^{s'}(u_1 + u_3) \geq 10^{s'} > 9...9$ (s' chiffres 9), le nombre $u_2 + u_4$ est donc un nombre qui se termine par s' chiffres 9.

Mais $u_2 \leq 9...9$ et $u_4 \leq 9...9$ (s' chiffres 9 dans les deux cas), donc $u_2 + u_4 \leq 19..98 < 19...9$ (s' chiffres 9).

Récapitulons :

- $u_2 + u_4$ est un nombre qui se termine par s' chiffres 9.
- $u_2 + u_4 < 19...9$ (avec s' chiffres 9)

On en déduit que $u_2 + u_4 = 9...9$ puis que $u_1 + u_3 = 9...9$, d'où finalement :

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 2 \times 9...9 = 2 \times (10^{s'} - 1).$$

Ce qui est le résultat souhaité.

III - Cas général : le développement décimal de 1/p a une longueur divisible par d.

III.1. Théorème

> Théorème 1
> On suppose que la période du développement décimal de $1/p$ (p premier) a une longueur s divisible par $d>1$. On pose $s=ds'$.
> Soit m premier avec p. La fraction m/p a une période de même longueur s.
> On écrit : $\frac{m}{p}=u_0.\overline{u_1u_2\ ...\ u_d}$
> On a alors $u_1+u_2+...+u_d=k\times(10^{s'}-1)$ avec $1\le k\le d-1$.

Preuve

p divise $10^{ds'}-1=(10^{s'}-1)(1+10^{s'}+...+10^{(d-1)s'})$ donc p divise $1+10^{s'}+...+10^{(d-1)s'}$ car p ne divise pas $10^{s'}-1$ puisque $s'<s=ds'$ et s est le plus petit entier non nul tel que p divise 10^s-1.

On en déduit que $\frac{(1+10^{s'}+...+10^{(d-1)s'})m}{p}$ est entier.

Or $\frac{(1+10^{s'}+...+10^{(d-1)s'})m}{p}=u_0.\overline{u_1\ ...\ u_d}+u_0u_1.\overline{u_2\ ...u_du_1}+...+u_0u_1\ ...\ u_{d-1}.\overline{u_du_1\ ...\ u_{d-1}}$.

On en déduit que $0.\overline{u_1\ ...\ u_d}+0.\overline{u_2\ ...u_du_1}+...+0.\overline{u_du_1\ ...\ u_{d-1}}$ est entier, donc

$$0.\overline{u_1\ ...\ u_d}+0.\overline{u_2\ ...u_du_1}+...+0.\overline{u_du_1\ ...\ u_{d-1}}=k \text{ avec } 1\le k\le d-1.$$

En effet, m est premier avec p donc $0.\overline{u_1u_2\ ...\ u_d}\ne 0.\overline{9}=1$ d'où $0.\overline{u_1u_2\ ...\ u_d}<1$.

On en déduit en raisonnant comme en C-f) :

$$(u_1+...+u_d)(10^{-s'}+10^{-2s'}+...)=k=(u_1+...+u_d)10^{-s'}\times\frac{1}{1-10^{-s'}}=(u_1+...+u_d)\frac{1}{10^{s'}-1}$$

D'où finalement $u_1+...+u_d=k(10^{s'}-1)$.

Un cas particulier : Posons $m/p=a_0.\overline{a_1a_2\ ...\ a_s}$ et appliquons le théorème précédent avec $d=s$.

Les nombres u_i s'identifient alors aux chiffres a_i de la période et l'on a donc

$$u_1+...+u_d=a_1+a_2+...+a_s=k(10^1-1)=9k.$$

On en déduit que la période $a_1a_2\ ...\ a_s$ est divisible par 9.

Ce raisonnement n'est valable que si $s>1$, mais l'on sait que p divise 10^s-1 donc si $s=1$ alors p divise $10^1-1=9$ donc $p=3$.

On a donc prouvé le théorème suivant :

> Théorème 2
> Si p est un nombre premier différent de 2, de 3 et de 5 alors la période du développement décimal de $1/p$ est divisible par 9.

III.2 Les valeurs possibles de k.

Dans les conditions du théorème précédent, on a $u_1+...+u_d=k(10^{s'}-1)$ avec $1\le k\le d-1$.

L'entier $d>1$ étant fixé, ces $d-1$ valeurs peuvent-elles toutes être prises par k ?

La réponse est négative en général puisque nous avons vu (question C-h) que si $d=4$ alors $k=2$.

Plus généralement :

Théorème 3
Si $\dfrac{m}{p} = u_0.\overline{u_1 u_2 \ldots u_d}$ avec d <u>pair</u> alors $u_1 + u_2 + \ldots + u_d = \dfrac{d}{2} \times (10^{s'} - 1)$

La démonstration est tout à fait similaire à celle effectuée à la question C-h).

On écrit $\dfrac{m}{p} = u_0.\overline{u_1 u_2 \ldots u_{2d'}} = u_0.\overline{u'_1\, u'_2}$ avec $d = 2d'$ et $\begin{cases} u'_1 = u_1 \ldots u_{d'} \\ u'_2 = u_{d'+1} \ldots u_{2d'} \end{cases}$.

On sait (partie B) que $u'_1 + u'_2 = 9\ldots9 = u_1 \ldots u_{d'} + u_{d'+1} \ldots u_{2d'}$.

Le nombre $u_{d'} + u_{2d'}$ se termine donc par s' chiffre 9 (avec $s = ds'$), or :

$$u_{d'} + u_{2d'} \leq 2(10^{s'} - 1) = 19..98 < 19...9 \text{ (avec } s' \text{ chiffre 9).}$$

On en déduit que $u_{d'} + u_{2d'} = 9...9 = 10^{s'} - 1$.

On montre ainsi de proche en proche que $u_i + u_{d'+i} = 10^{s'} - 1$ pour tout i vérifiant $1 \leq i \leq d'$.

On en déduit finalement $u_1 + u_2 + \ldots + u_{2d'} = d' \times (10^{s'} - 1) = \dfrac{d}{2} \times (10^{s'} - 1)$.

Théorème 4
p est un nombre premier fixé, différent de 2 et de 5. Si m n'est pas un multiple de p on sait que $1/p$ et m/p ont des périodes de même longueur. On pose : $\dfrac{m}{p} = u_0.\overline{u_1 u_2 \ldots u_d}$ où les u_i dépendent de m. On a alors $u_1 + u_2 + \ldots + u_d = k_m \times (10^{s'} - 1)$ avec $1 \leq k_m \leq d - 1$. *On s'intéresse à l'ensemble des valeurs que peut prendre* k_m *quand* p *est fixé et que* m *parcourt l'ensemble des entiers relatifs non multiples de* p (*ou l'ensemble des entiers de* 1 *à* $p-1$, *ce qui revient au même*). Si j est une valeur possible pour k_m, $d - j$ est également une valeur possible pour k_m.

<u>Preuve</u>

On a $m/p = u_0.\overline{u_1 u_2 \ldots u_d}$, donc $-m/p = -u_0.\overline{u_1 u_2 \ldots u_d} = -u_0 - 1 + 1 - 0.\overline{u_1 u_2 \ldots u_d}$ d'où

$$-m/p = -u_0 - 1 + 0.\overline{v_1 v_2 \ldots v_d} \text{ avec } v_i = 10^{s'} - 1 - u_i \text{ pour } 1 \leq i \leq d.$$

En effet si $v_i = 10^{s'} - 1 - u_i$ pour $1 \leq i \leq d$ on a $0.\overline{u_1 u_2 \ldots u_d} + 0.\overline{v_1 v_2 \ldots v_d} = 0.\overline{9 \ldots 9} = 1$

Si $\sum u_i = j(10^{s'} - 1)$ alors $\sum v_i = \sum \left(10^{s'} - 1 - u_i\right) = d(10^{s'} - 1) - \sum u_i = (d - j)(10^{s'} - 1)$, ce qui prouve bien le résultat annoncé.

Théorème 5
On suppose que la période du développement décimal de $1/p$ (p premier) a une longueur s divisible par $d > 1$. On pose $s = ds'$. On suppose de plus d multiple de l avec $l \geq 2$ et $l - 1 \leq 10^{s'}$. Soit m premier avec p. La fraction m/p a une période de même longueur s. On écrit : $\dfrac{m}{p} = u_0.\overline{u_1 u_2 \ldots u_d}$ On a alors $u_1 + u_2 + \ldots + u_d = k \times (10^{s'} - 1)$ avec $\dfrac{d}{l} \leq k \leq (l-1)\dfrac{d}{l}$.

Remarques :
Avec $l = d$ on retrouve le théorème 1.
Avec $l = 2$ on retrouve le théorème 3.
Le meilleur encadrement de k que peut fournir ce théorème est obtenu en prenant pour l le plus petit diviseur de d différent de 1.
On trouvera une preuve du théorème 5 sur le site de l'irem (http://www.u-bourgogne.fr/irem). C'est une démonstration technique où il faut manier les indices avec précaution. Je ne suis malheureusement pas parvenu à simplifier cette démonstration.

Quelques exemples

- On prend $p = 337$, on a alors $s = 336 = 2^4.3.7$.

On choisit alors de prendre $s' = 2^4 = 16$ et $d = 3.7 = 21$, c'est-à-dire que l'on scinde la période de m/p en 21 blocs de 16 chiffres.

Si l'on écrit $\frac{m}{337} = 0.\overline{u_1 \dots u_{21}}$, le théorème 5 affirme que $u_1 + \dots + u_{21} = k \times 9999999999999999$ avec $7 \leq k \leq 14$.
Ces 8 valeurs de k sont effectivement atteintes (nous donnons les plus petites valeurs positives de m) :

$k = 7$ pour 1/337
$k = 8$ pour 3/337
$k = 9$ pour 5/337
$k = 10$ pour 9/337
$k = 11$ pour 41/337
$k = 12$ pour 17/337
$k = 13$ pour 25/337
$k = 14$ pour 21/337

Ces résultats ont été obtenus à l'aide du logiciel Maple.
Le programme utilisé est présenté ci-contre.

```
> with(numtheory):
> kkk:=proc(p,d)
> local L,s,sr,i,j;
> for i from 1 to d-1 do L[i]:=[] od;
> s:=order(10,p);
> if irem(s,d)=0 then sr:=s/d;
> for j to p-1 do:
> i:=add(j*10^(k*sr),k=0..d-1)/p-
add(trunc(j*10^(k*sr)/p),k=1..d-1);
> if nops(L[i])=0 then
L[i]:=[op(L[i]),j];fi;od;fi;
> for i to d-1 do
print('k',i,L[i]);od;
> end:
> kkk(337,21);
```

- On prend $p = 229$, on a alors $s = 228 = 2^2.3.19$.

On choisit de prendre $s' = 2^2 = 4$ et $d = 3 \times 19 = 57$, c'est-à-dire que l'on scinde la période de $m/229$ en 57 blocs de 4 chiffres.

Si l'on écrit $\frac{m}{229} = 0.\overline{u_1 \dots u_{57}}$, le théorème 5 affirme que $u_1 + \dots + u_{57} = k \times 9999$ avec $19 \leq k \leq 38$.
Le théorème 5 autorise donc *a priori* 20 valeurs possibles pour k, mais l'on peut vérifier que si m parcourt l'ensemble des entiers relatifs, seules 4 valeurs sont effectivement prises par k : les valeurs 26, 27, 30 et 31.
On remarque sur cet exemple que $26 + 31 = 27 + 30 = d$, ceci est justifié par le théorème 4.

Affiner l'encadrement ou décrire l'ensemble des valeurs effectivement prises par k me semble être un problème ardu.

IV - ORDRE DE GRANDEUR MOYEN DE S(P): UNE CONJECTURE.

IV.1. Position du problème.

Si $f(n)$ est une fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels et si $g(n)$ est une fonction "simple" définie sur ce même ensemble telle que $f(1)+f(2)+...+f(n) \sim g(1)+g(2)+...+g(n)$ on dit que $g(n)$ est un ordre de grandeur moyen de $f(n)$.

Considérons par exemple la fonction d qui à un entier naturel n associe le nombre de diviseurs de n. Cette fonction d a un comportement très irrégulier, mais la somme $d(1)+d(2)+...+d(n)$ se comporte beaucoup plus régulièrement puisque le théorème de Dirichlet[1] permet d'affirmer que $d(1)+d(2)+...+d(n) \sim n\ln n \sim \ln 1+\ln 2+...+\ln n$.
Un ordre de grandeur moyen[2] de $d(n)$ est donc $\ln n$.

Si p est un nombre premier différent de 2 et de 5, $s(p)$ est le plus petit entier non nul vérifiant $10^{s(p)} = 1 \bmod p$.
L'ensemble de définition naturel de la fonction s étant l'ensemble des nombres premiers il nous faut étendre un peu la définition d'un ordre de grandeur moyen :
On dira que la fonction g est un ordre de grandeur de s si : $\sum_{7 \le p \le x} s(p) \sim \sum_{7 \le p \le x} g(p)$

IV.2. La fonction s(p).

On sait que $s(p)$ divise $p-1$.
D'après une célèbre conjecture d'Emil Artin, la proportion des nombres premiers vérifiant $s(p)=p-1$ serait :

$$C = \frac{1}{2}.\frac{5}{6}.\frac{19}{20}.\frac{41}{42}. ... = \prod_{p \text{ premier}} \frac{p^2-p-1}{p^2-p} = 0.37395581...$$

On le remarque, ceci n'est qu'une conjecture : peu de résultats sont établis concernant la fonction s.

On donne ci-dessous les couples $[p, s(p)]$ pour $p \le 500$.

[7, 6]	[61, 60]	[131, 130]	[199, 99]	[281, 28]	[373, 186]	[457, 152]
[11, 2]	[67, 33]	[137, 8]	[211, 30]	[283, 141]	[379, 378]	[461, 460]
[13, 6]	[71, 35]	[139, 46]	[223, 222]	[293, 146]	[383, 382]	[463, 154]
[17, 16]	[73, 8]	[149, 148]	[227, 113]	[307, 153]	[389, 388]	[467, 233]
[19, 18]	[79, 13]	[151, 75]	[229,228]	[311, 155]	[397, 99]	[479, 239]
[23, 22]	[83, 41]	[157, 78]	[233, 232]	[313, 312]	[401, 200]	[487, 486]
[29, 28]	[89, 44]	[163, 81]	[239, 7]	[317, 79]	[409, 204]	[491, 490]
[31, 15]	[97, 96]	[167, 166]	[241, 30]	[331, 110]	[419, 418]	[499, 498]
[37, 3]	[101, 4]	[173, 43]	[251, 50]	[337, 336]	[421, 140]	
[41, 5]	[103, 34]	[179, 178]	[257, 256]	[347, 173]	[431, 215]	
[43, 21]	[107, 53]	[181, 180]	[263, 262]	[349, 116]	[433, 432]	
[47, 46]	[109, 108]	[191, 95]	[269, 268]	[353, 32]	[439, 219]	
[53, 13]	[113, 112]	[193, 192]	[271, 5]	[359, 179]	[443, 221]	
[59, 58]	[127, 42]	[197, 98]	[277, 69]	[367, 366]	[449, 32]	

Nous avons utilisé le logiciel *Maple* pour les calculs qui précèdent et pour représenter ci-dessous la fonction

---

[1] Ce théorème est en fait plus précis : $d(1)+d(2)+...+d(n) = n\ln n + (2\gamma-1)n + O(n)$ où γ est la constante d'Euler.

[2] Cette notion d'« ordre de grandeur moyen » est à utiliser avec prudence, comme le montre le résultat suivant :

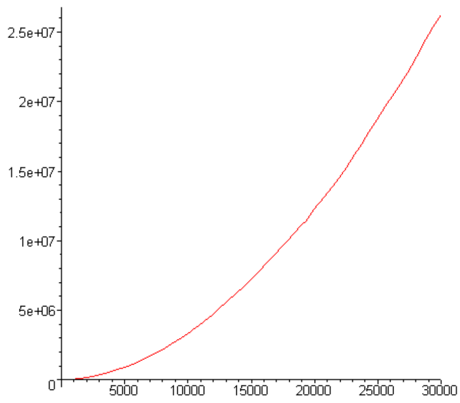
$\forall \varepsilon > 0$ on a pour presque tout entier n : $2^{(1-\varepsilon)\ln\ln n} < d(n) < 2^{(1+\varepsilon)\ln\ln n}$.

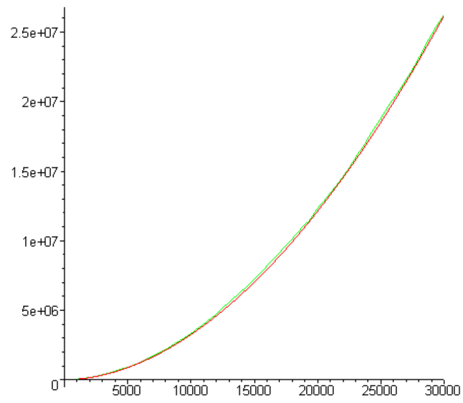
Grossièrement, on a donc pour presque tout entier n : $d(n) \approx 2^{\ln\ln n} = (\ln n)^{\ln 2} \neq \ln n$.

Le fait que l'ordre de grandeur moyen de $d(n)$ soit plus grand que $(\ln n)^{\ln 2}$ est dû à une minorité d'entiers n possédant un nombre de diviseurs beaucoup plus grand que $\ln n$.
Voir par exemple Hardy et Wright, An introduction to the theory of numbers, chapitres 18.2 et 21.13.

$F : x \mapsto \sum_{7 \le p \le x} s(p)$. Sur le graphique de droite nous comparons cette fonction à la fonction $G : x \mapsto \frac{3}{10} \frac{x^2}{\ln x}$: les deux courbes sont extrêmement proches.

Nous avons obtenu cette deuxième fonction par une méthode uniquement graphique.

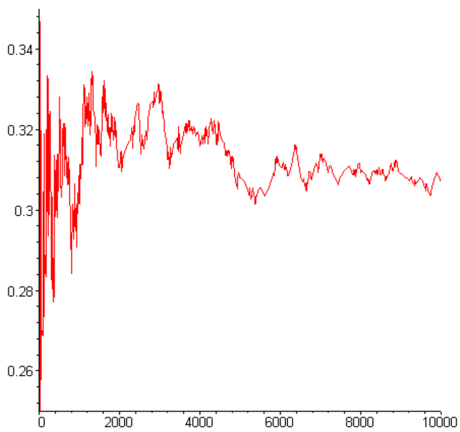


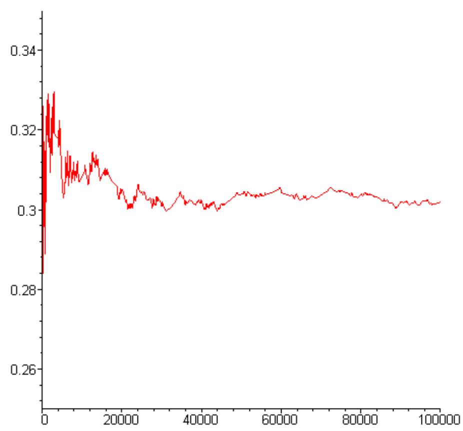


Sur les graphiques ci-dessous nous avons représenté la fonction $x \mapsto F(x) / \frac{x^2}{\ln x}$ en utilisant deux plages de valeurs différentes, afin de vérifier la vraisemblance de la constante $3/10$ utilisée ci-dessus. Mais s'il semble bien y avoir convergence de cette fonction vers un réel K, la convergence est trop lente pour que l'on puisse en donner une bonne estimation. Nous nous contenterons de l'approximation $K \approx 0.30$.

La première partie de notre conjecture peut donc être formulée ainsi :

La fonction $x \mapsto \sum_{7 \le p \le x} s(p) / \frac{x^2}{\ln x}$ converge vers un réel K et l'on a $K \approx 0.30$.





IV.3. Un équivalent quand x tend vers l'infini de la fonction $x \mapsto \sum_{p \le x} p$.

On définit la suite (c_n) en posant $c_n = 1$ si n est premier et $c_n = 0$ sinon.

On a ainsi $\sum_{p\le x} p = \sum_{n\le x} c_n n$ et on remarque que $\sum_{n\le x} c_n = \pi(x)$, où $\pi(x)$ est le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x.
Pour obtenir un équivalent de cette série, nous allons utiliser une transformation d'Abel. Cette transformation est classique en théorie analytique des nombres.

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\le x} c_n n = \sum_{2\le n\le x} c_n n = \sum_{2\le n\le x} \big(\pi(n)-\pi(n-1)\big)n \\
&= \sum_{2\le n\le x} \pi(n)n - \sum_{1\le n\le x-1} \pi(n)(n+1) \\
&= x\pi(x) - \sum_{2\le n\le x-1} \pi(x) \text{ car } \pi(1)=0 \\
&= x\pi(x) - \int_2^x \pi(t)dt \text{ car la fonction } \pi \text{ est en escalier.}
\end{aligned}$$

Or d'après le théorème des nombres premiers on a $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ donc $x\pi(x) \sim \frac{x^2}{\ln x}$ et

$$\int_2^x \pi(t)dt \sim \int_2^x t\frac{1}{\ln t}dt = \left[\frac{1}{2}\frac{t^2}{\ln t}\right]_2^x + \frac{1}{2}\int_2^x \frac{t}{(\ln t)^2}dt \sim \frac{1}{2}\frac{x^2}{\ln x} \text{ car } \frac{t}{(\ln t)^2} = \circ\left(\frac{t}{\ln t}\right).$$

On déduit de ceci que $\sum_{p\le x} p = \sum_{n\le x} c_n n \sim \frac{1}{2}\frac{x^2}{\ln x}$.

IV.4. Ordre de grandeur moyen de s(p).

On déduit du résultat qui précède l'équivalent $\sum_{p\le x} 2Kp \sim \sum_{7\le p\le x} 2Kp \sim K\frac{x^2}{\ln x}$, donc si conformément à la conjecture formulée en IV.2 on a $\sum_{7\le p\le x} s(p) \sim K\frac{x^2}{\ln x}$ alors $\sum_{7\le p\le x} s(p) \sim \sum_{p\le x} 2Kp$.

On peut donc formuler ainsi notre conjecture :

> Un ordre de grandeur moyen de $s(p)$ serait $2Kp \approx 0.60p$