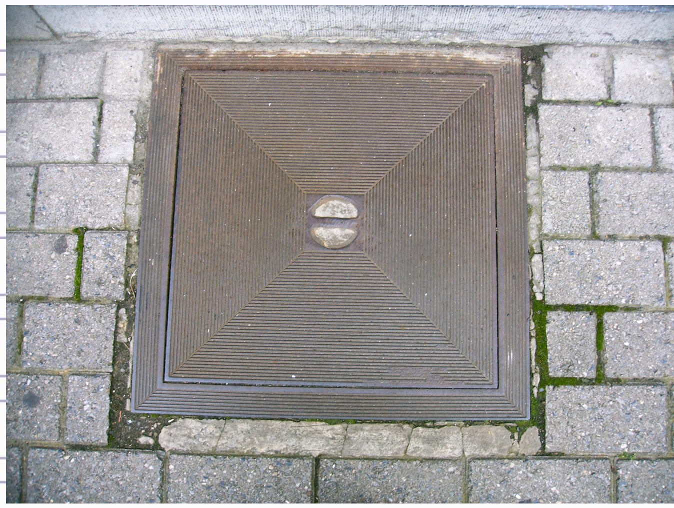
N° 105 – Octobre 2007

Feuille de Vigne

Irem de Dijon

- ✓ Différences de carrés a^2-b^2 et $(a+b)(a-b)$
- ✓ La loterie génoise
- ✓ Donnons-leur les bases ... de numération !
- ✓ Collisions sur une barre



Revue Trimestrielle

Issn 0246-5752

Sommaire

Articles

Editorial

A vous qui tenez la Feuille de Vigne de l'après vendanges 2007 entre les mains, la simple lecture de son sommaire vous montrera qu'à son habitude elle propose une grande diversité de contenu. Jugez plutôt en découvrant les titres :

. Différences de carrés (J.C. Bresson)
. Loterie génoise (T.Deray)
. Donnons-leur les bases… de numération ! (J.F. Mugnier)
. Collisions sur les barres (E. Moreau)

Sans oublier les rubriques habituelles comme l'agenda, les jeux et problèmes de Michel Lafond, …

La référence à une tradition évoquée ici n'est pas un effet d'annonce : il suffit de découvrir le numéro inscrit sur la couverture, pour imaginer, année après année, le travail patient et efficace des rédacteurs (avec Françoise Besse pour la mise en scène) pour s'en convaincre.

Il s'agit du numéro 105, nombre vénérable pour une revue qui a su se renouveler dans ses contenus, en les adaptant à un enseignement des mathématiques qui s'est modifié, parfois contraint et forcé, mais aussi pour accompagner une société qui bouge naturellement. Un parcours rapide des premiers numéros de notre revue rend bien compte de cette évolution.

Mais revenons à notre propos et à l'évocation de ce numéro 105, ou plutôt arrêtons-nous sur le nombre 105 lui-même, sur lequel il peut être intéressant de se pencher. Il possède en effet deux propriétés qui vont retenir notre attention : la première nous dit que 105 est un nombre sphénique, ce qui signifie qu'on l'obtient par le produit de trois facteurs premiers distincts :

$$105 = 3 \times 5 \times 7.$$

La deuxième propriété qui lui est attribuée est moins reluisante puisqu'on le qualifie de nombre déficient : la somme de ses diviseurs propres 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, lui est inférieure.

L'allusion au terme « déficient » nous amène à des considérations plus sérieuses ; il s'agira pour nous de ne pas être déficients en cette année 2007/2008. En effet elle verra à la fois des modifications profondes des structures de l'Université, et l'intégration de l'IUFM à l'intérieur de celle-ci. Nous sommes donc conduits à prolonger notre réflexion sur le positionnement et le rôle de notre IREM, qui a comme atout majeur d'être un lien fort et productif entre les professeurs de mathématiques des écoles, des collèges et des lycées, et les enseignants de la Faculté. Continuons donc de proposer et d'innover.

Patrick GUYOT

1ERE JOURNEE DE FORMATION

Jeudi 15 novembre 2007 Lieu : IREM, Faculté Sciences Mirande

Journée de formation organisée en collaboration avec l'IUFM de Bourgogne *:* *"LE JEU : UNE APPROCHE PEDAGOGIQUE "* **-** ***Arnaud GAZAGNES,*** Membre du groupe « Jeux » de l 'APMEP, professeur de mathématiques au Lycée Marie de Champagne à Troyes.

Objectifs de la formation :

Utiliser les jeux comme source d'activités en classe favorisant les apprentissages mathématiques et permettant de changer le rapport des élèves à cette discipline :

- Diversifier ses pratiques pédagogiques.
- Créer des activités ou de variantes de jeux avec un objectif précis (en classe, en remédiation, …), permettant, le plus souvent, la mise en évidence des difficultés et des erreurs des élèves.
- Découvrir des jeux du commerce que l'on peut utiliser en classe : étude de jeux géométriques, numériques et logiques.

Nota : Chaque participant apportera une clé USB pour récupérer les documents de travail.

Contenus :

Une alternance entre exposé de jeux (présentation du jeu, ses objectifs pédagogiques et son utilisation en classe) et pratique par les participants.

Il sera présenté au participant non seulement sur des exercices à thèmes (numération, calcul fractionnaire, aires et périmètres, racines carrées, équations, …) mais aussi des supports d'activités différents, cela permettant de diversifier au maximum des activités pour les élèves.

Les jeux sont, dans une grande partie, dans l'esprit de ceux publiés dans les brochures « Jeux » de l'APMEP.

Il sera donné une liste de brochures ou de sites sur Internet où le participant pourra approfondir le contenu de la formation.

Démarche pédagogique :

La formation sera en présentiel. Le travail en petits groupes sera largement utilisé

Si vous souhaitez vous inscrire, prendre contact avec l'IREM.

STAGES PAF 2007-2008 OUVERTS
dont l'IREM est le responsable pedagogique

Intitulé de l'action	Intervenants	Dates	Lieux
La statistique inférentielle	*A. JEBRANE & C. LABRUERE CHAZAL*	*31/01/08*	IREM
Coupes et reconstitution (Image animée générée en utilisant WIMS , site que nous vous conseillons de visiter.)	*R. LANGEVIN*	*08/11/07*	IREM
L'Histoire des Maths : L'Age Baroque Groupe 1	*F. METIN & P. GUYOT*	*22/11/07* *27/02/08*	IUFM Auxerre
Groupe 2	*F. METIN & P. GUYOT*	*21/11/07* *06/03/08*	IUFM Chalon
L'Histoire des Probabilités, des statistiques	*P. REGNARD*	*29/11/07* *26/02/08*	IREM
Individualisation des apprentissages	*D. GARDES*	*10/01/08*	IREM
Les questions ouvertes : pourquoi ? comment ?	*D. GARDES*	*06/03/08* *date à définir*	IREM Dijon et Montceau ou Chalon
Le QCM comme outil d'évaluation	*D. GARDES*	*20/12/07*	IREM

DATES DES RALLYES

Pensez à informer vos élèves et à les inscrire

Rallyes Mathématique des collèges de Côte d'Or et Saône et Loire :
vendredi 25 janvier 2008.

Rallye Mathématique de Bourgogne : **mercredi 30 janvier 2008**.

CALENDRIER DES ACTIVITES IREM AU 1ER TRIMESTRE 2007-2008

Toutes les réunions ont lieu à l'IREM

Intitulé	*Dates*
Réunions d'organisation et d'élaboration des énoncés du Rallye des collèges (de 14 h30 à 16 h 30)	14/09, 28/09, 12/10, 16/11, 30/11, 15/12
Réunions du groupe de recherche "Histoire des maths et Epistémologie" (de 9h30 à 16 h 30)	20/09 ; 25/10
1ère journée de concertation 2ème journée de concertation	04/10/07 13/12/07
Réunions du groupe de recherche "Math SES" (de 14 h30 à 16 h 30)	05/10, 23/11, 07/12, 25/01/08 29/02.
1ère journée de Formation : "JEUX" avec Arnaud Gazagnes	15/11/07

Si vous souhaitez assister à une de ces réunions, voir comment le groupe travaille, sur quel thème de recherche, prenez contact avec l'IREM.

NOUVELLES ACQUISITIONS A LA BIBLIOTHEQUE:

Actualisé le 5 octobre 2007

Les ouvrages de la bibliothèque sont à la disposition des enseignants de l'académie

Les ouvrages

• Leçons de mathématiques Capes externe. Aide à la première épreuve orale – 2006	Bettinelli, Schubnel
• Probabilités. Niveau M1 – 2006	Brancovan M., Jeulin T.
• Les femmes et la science - 2006	Chazal G.
• Les impasses de la démocratisation scolaire. Sur une prétendue crise de la vocation scientifique – 2006	Convert B.
• Probabilités et statistiques de A à Z – 2004	Dress F.
• Les instruments de l'astronomie ancienne, de l'Antiquité à la Renaissance – 2006	Dutarte P.
• Arithmétique – 1990	Faraut J, Khalili E.
• Et dieu créa les nombres – 2006	Hawkings S.
• Textes fondamentaux du calcul infinitésimal – 2006	Hemily
• Acta didactica universitatis comenianae, mathematics n°6 – 2006	Kostyrko (et al.)
• Processus stochastiques appliqués - 2005	Lefebvre M.
• Histoire des instruments et machines à calculer – 1994	Marguin J.
• Exercices pour le Capes de mathématiques (externe et interne) et l'Agrégation - 2005	Mercier D.J.
• Annales 2005 Capes mathématiques (externe et interne) et l'Agrégation – 2005	Mercier D.J., Rombaldi J.E.
• L'épreuve d'exposé au Capes de mathématiques. Vol 2.- 2006	Mercier D.J.
• Analyse Capes externe de 1999 à 2005	Mercier D.J.
• Mathématiques tout-en-un pour la licence. Niveau L1 – 2006	Ramis J.P., Warusfel A.
• DEUG Sciences 1ère Année. Maths. Algèbre – 1998	Sedogbo
• Nombres et algèbre – 2006	Merindol J.Y.
• Groups and symmetry – 1988	Armstrong M.A.
• Programmation linéaire par l'exemple – 1986	Droesbeke F.
• Pliages et mathématiques – 2000	Boursin ; Larose
• Du quotidien aux mathématiques – 2006	Rouche N.
• Jeux mathématiques et mathématiques des jeux	Delahaye J.P.

- Modèles aléatoires – 2006 | Delmas ; Jourdain
- L'espérance du Hollandais ou le premier traité de calcul du hasard – 2006 (et al.) | Bessot D.
- Histoires des chiffres à travers les civilisations – 2006 | Sayadi O.
- L'évasion des polyèdres – 2006 | Le Berre G.
- Probabilités et statistiques – 1999 | Istas J.
- Carrefours entre analyse, algèbre, géométrie – 2001 | Rogalski M. Carnec
- Itinéraires en statistiques et probabilités –2000 | H. (et al.)
- Géométrie. Premières et Terminales – 1999 | Gautier C.
- Maths en formes – 2006 | Bettinelli B.,
- Interactions verbales didactiques et apprentissage – 2006 | Guernier M.C.
- Probabilités. Statistique inférentielle. Fiabilité – 1997 | Demengel (et al.)
- Probabilités. Cours et exercices – 2002 | Warusfel
- Géométrie. Cours et exercices – 2002 | Warusfel
- Analyse. Cours et exercices – 2002 | Warusfel
- La révolution mathématique au XVIIe siècle- 2006 | Barbin
- Les neufs chapitres – 2004 | Chemla ; Shuchun
- Flatland. A romance of many dimensions – rééd. 1884 | Abbott
- La mécanique du vol de l'avion - 2006 | Bonnet ; Verrière

Les productions des IREM

- Rédaction et niveaux de rigueur en mathématiques - 1999 | Toulouse
- Entrées dans l'algèbre 6ème et 5ème – 2007 | Bordeaux
- De la statistique aux probabilités en lycée – 2006 | Strasbourg
- Rallye mathématique de Franche-Comté – 2006 | Besançon
- Construction de triangles – 2007 | Toulouse
- Actes du Colloque de Limoges : quelles maths au lycée ? – 2004 | Limoges
- La course au trésor – 2006 | Limoges
- L'Ouvert n°113 & 114 – 2006 & 2007 | Strasbourg
- Une application industrielle des stat. : les plans d'expérience – 2006 | Clert-F.
- Compte-rendu du Rallye Maths des collèges de Côte d'Or – 2007 | Dijon
- Rallye Mathématique de Bourgogne – 2007 | Dijon
- Apprendre à chercher, chercher pour apprendre – 2006 | Pays de Loire
- Des problèmes pour chercher à l'école primaire – 2005 | Pays de Loire
- De la géométrie à l'école maternelle, pourquoi pas ? – 2007 | Besançon
- Histoire de logarithmes | Inter-IREM
- L'Autan n°1 - mai 2007 | Toulouse
- Le carrousel des nombres.
- Jeux numériques pour l'école primaire -2007 | Besançon
- Mnémosyne n°19- 2007 | Paris 7
- Des activités pour la classe de Cinquième - 2006 | Aix-Marseille
- Algébrisations et géométrisations – 2006 | Inter-IREM

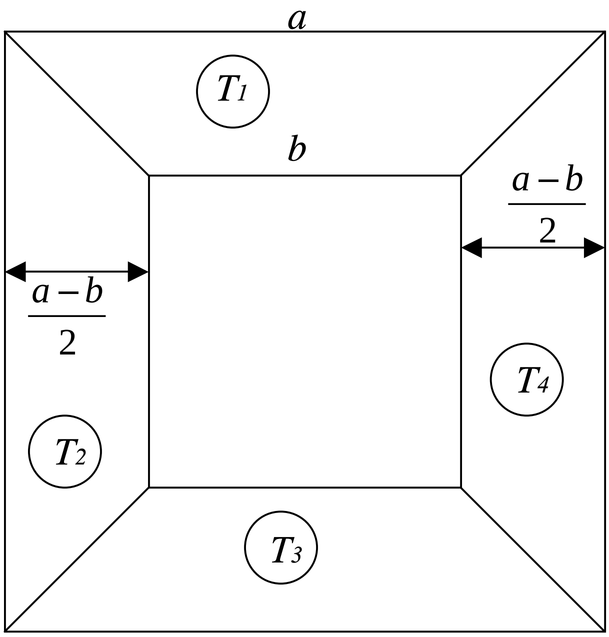
Différence de carrés

a^2-b^2 et $(a+b)(a-b)$

Jean-Claude BRESSON, Nancy

Quand deux profs de maths se rencontrent à Namur, qu'est-ce qu'ils se racontent ? Des histoires de profs de maths ! ...
Pour l'anecdote, lors des journées mathématiques belges organisées par la SBPMef (Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française), à Namur en août 2006, Jean-Claude BRESSON nous a expliqué comment utiliser les dessins des plaques d'égouts pour "montrer" en classe à nos élèves que a^2-b^2 est bien égal à $(a+b)(a-b)$.
Françoise Bertrand a fait découvrir cela à ses élèves de collège. Ils ont tous deux accepté d'écrire ces quelques lignes pour les lecteurs de la Feuille de Vigne.

On peut schématiser l'image de la photo par deux carrés de même centre et de côtés respectifs "a" et "b". La figure ci-dessous modélise la situation.



On retrouve d'une part que l'aire des 4 trapèzes, $T_1+T_2+T_3+T_4$ = aire du grand carré – aire du petit carré = a^2-b^2.
D'autre part : $T_1+T_2+T_3+T_4 = 4t$, où "t" désigne l'aire d'un petit trapèze isocèle de bases "a" et "b" et de hauteur la moitié de "a-b", soit une hauteur de (a-b)/2.

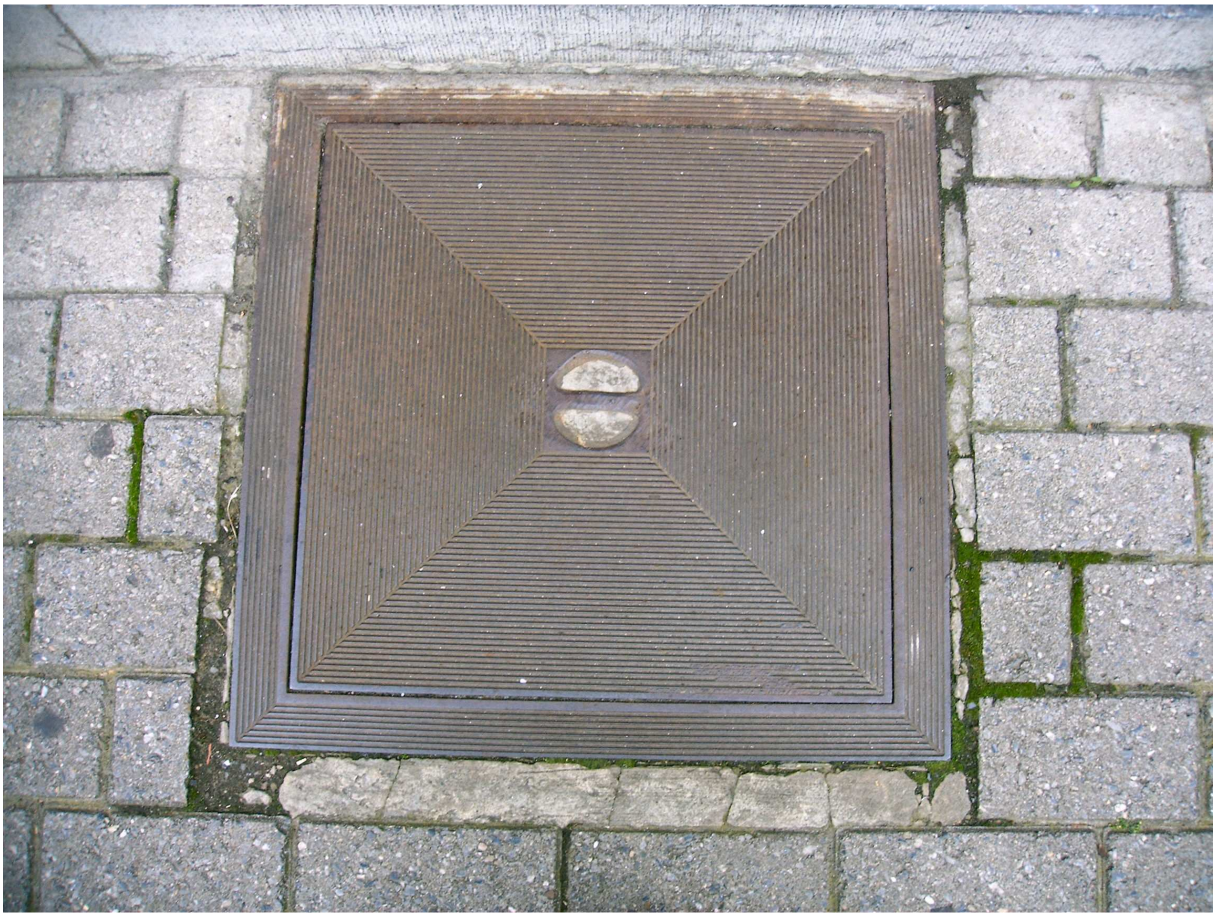
Donc $t=\frac{1}{2}\times\frac{(a-b)}{2}\times(a+b)$

C'est-à-dire $t=\frac{1}{4}(a+b)(a-b)$

Ou encore $4t=(a+b)(a-b)$

Et enfin : $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

L'idée d'utiliser ce type de photos en classe m'est venue en observant des fontaines de la place Maginot à Nancy. Il m'a bien fallu deux ou trois minutes pour trouver ce qui me "titillait" dans ces quadrilatères. On trouve encore ce genre de dessin derrière le Palais des Princes Evêques à Liège comme motif de grille ou … à Namur comme motif de plaque d'égout !



Plaque d'égout namuroise

Une histoire… belge racontée par Françoise Bertrand, professeur de mathématiques au Collège Les Franchises à Langres.
Pour illustrer la leçon sur les égalités remarquables, j'ai montré une photo de cette plaque d'égout belge à mes élèves. Ils ont regardé attentivement cette photo… car ils cherchaient naïvement la formule algébrique gravée directement dans la fonte !…

La loterie génoise

Tristan DERAY, Lycée Hilaire de Chardonnet à Chalon s/Saône

***Mots clés** : Euler, loterie, probabilités, loterie génoise.*

L'intérêt d'Euler pour toutes les branches des mathématiques le conduisit à l'étude de différents problèmes et sujets dans le domaine des probabilités.

Il publia en 1751 un premier mémoire dans ce domaine : *Calcul de la probabilité dans le jeu de rencontre*. Le problème n'était pas nouveau et avait déjà été étudié par Montmort sous le nom de "*jeu de treize*" : treize cartes de l'as au roi sont posées retournées sur une table, le meneur retourne les cartes l'une après l'autre pendant que le joueur donne successivement l'ordre des tirages. Un pour la première carte retournée, deux pour la seconde et ainsi de suite. Le joueur gagne si l'un des nombres énoncés coïncide avec les points indiquées par l'une des cartes (11 correspondant au valet…). Le problème des coïncidences consiste à déterminer la probabilité que la valeur d'une carte soit la même que son rang de tirage. Euler retrouve des résultats déjà établis par Montmort et Daniel Bernoulli, notamment la probabilité qu'au moins une carte corresponde à son rang de tirage lorsque le nombre de celles-ci devient infini est égale à $1-\frac{1}{e}$; ou encore la probabilité qu'il n'y ait aucune « coïncidence » vaut $\frac{1}{e}$.

L'intérêt d'Euler pour les probabilités lui fit rédiger en 1760 un mémoire intitulé "*Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain et sur les rentes viagères*". Il a pour objet l'étude de la mortalité et de la croissance d'une population. Le mémoire avait un intérêt pratique en déterminant la population probable d'un État après un certain nombre d'années et en donnant la valeur actuelle des annuités. Le recueil fut suivi par un autre en 1776 : "*Éclaircissements sur les établissements publics en faveur tant des veuves que des morts*". Quelques années auparavant, l'anglais Price avait publié "*observations on reversionary payments, 1769*" dont le sujet concernait la constitution de rentes réversibles en fonction de l'espérance de vie : Price fondait une théorie mathématique des assurances-vie. Les compagnies d'assurance en comprirent rapidement toute la richesse et l'intérêt. Ces études permirent de donner des bases rigoureuses à des « pratiques qui n'avaient parfois cherché qu'une odieuse occasion de profiter de l'ignorance publique et de spolier tous ceux qui devaient pour éviter leur ruine, avoir confiance en leurs promesses ». En France, Deparcieux, Duvillard, Buffon et Condorcet contribuèrent tant à la vulgarisation qu'à l'approfondissement du sujet. Une compagnie royale d'assurance sur la vie fut créée en France ; l'appât du gain attira une foule considérable, jusqu'au scandale qui éclata lorsqu'il fut démontré que l'aspect mathématique n'était ici qu'une duperie…

Euler publia deux mémoires sur la loterie génoise, un troisième fut encore publié après sa mort : "*Réflexion sur la loterie génoise*" ; quelques études supplémentaires dans le domaine des probabilités sont à mettre à son crédit[1].

Les loteries ne sont pas un phénomène récent. Rome, bien connue par ses jeux, en proposa dans l'Antiquité. Auguste, dit-on, organisait des loteries pour donner un attrait de plus aux fêtes qu'il donnait. L'extravagant Héliogabale en institua qui offraient six esclaves aux plus chanceux mais également six mouches à d'autres. Néron organisa des loteries publiques. L'histoire plus récente retient que François 1er en autorisa une, connue sous le nom de Blanque (les billets perdants étaient blancs) mais l'usage ne se développa guère dans le Royaume quand elles connurent un grand succès en Angleterre et Hollande dont la politique marchande les portait presque naturellement à ce type de spéculation (ce n'est pas un hasard si les noms de Graunt Petty, Witt, Price, de Moivre (exilé protestant) sont anglais ou flamands et sont autant de traits d'union entre sciences mathématiques et art du négoce et du commerce).
C'est d'Italie toutefois que partit l'étincelle qui répandit un feu dans toute l'Europe. La République de Gênes et ses institutions politiques en furent le lieu de naissance. Dans cette ville en effet, tous les six mois étaient tirés au sort les noms de cinq sénateurs pour remplir certaines charges de magistrature, 90 candidats pouvaient y aspirer, et des 90 noms mis dans une urne, cinq tirés au hasard se voyaient confier ces charges. Cette pratique qui offrait sans doute la possibilité de séparer pouvoirs politique et judiciaire nous instruit sur ce que peuvent être les "vertus républicaines". On transposa rapidement cette pratique dans le domaine des jeux, et le succès de cette loterie génoise fut immédiat ; il fut d'ailleurs si grand que le gouvernement supprima aux particuliers le droit de les organiser pour se substituer à eux, morale républicaine sans doute encore.

Au début du XVIIe siècle, ces loteries figuraient parmi les piliers des systèmes de finance, permettant ici de soudoyer les armées ou de réunir des fonds en vue de grandes entreprises publiques. Louis XIV accorda à l'Italien Tonti des lettres patentes pour l'établissement d'une loterie dont les bénéfices serviraient à la construction d'un pont dans Paris : le Pont-Royal. De là serait né le nom de

[1] *Sur la probabilte des sequences dans la lotterie Genoise ; Solution d'une questione tres dificle dans le calcul des probabilites ; Solutio quarundam quaestionum difficilorum in calculo probabilis ; Analyse d'un probleme du calcul des probabilites.*

Tontine : les gagnants de la loterie percevraient jusqu'à la mort du dernier une partie des recettes liées au droit de péage perçu sur ce pont.
Les loteries étrangères officielles ou clandestines fleurissaient peu à peu. L'état ne pouvait à la fois se priver de telles sources de revenus et laisser se répandre les vices innombrables qui accompagnent le jeu sans en instituer les cadres. En 1700 fut donc créé à Paris la Loterie Royale dont l'objet était d'assurer à ceux qui voudraient y participer un revenu sûr et considérable pour le reste de leur vie. En 1758 fut créée la Loterie de l'École Militaire qui servit au financement de ladite École et du Champ de Mars.

La loterie disparut en même temps que la monarchie sous la Convention mais réapparut rapidement sous les consuls. Le premier d'entre eux, devenu empereur et conquérant, la multiplia au travers de l'Empire, tant dans de nouvelles villes de France (Lyon, Strasbourg…) que dans les provinces annexées. Sans doute Napoléon donnait-il un sens nouveau au "du pain et des jeux" des empereurs romains ; les jeux ici n'ayant plus pour fonction d'occuper le peuple mais de lui faire financer en partie l'institution impériale au travers de revenus garantis à l'État.

Si l'Angleterre avait, dès le XVIIe siècle, institué des loteries afin d'en tirer profit, l'idée ne pouvait que peu à peu inciter tous les princes et les gouvernements d'Europe à en répandre l'usage et le contrôler.

La Prusse n'avait aucune raison d'échapper au phénomène et, en 1749, un italien du nom de Roccolini proposa à Frédéric II le plan d'une loterie qui devait pouvoir alimenter substantiellement les caisses du souverain. Ce dernier prit soin de faire vérifier au plus vite les calculs de l'Italien afin d'établir tant les risques que les profits auxquels l'entrepreneur s'exposait.

À l'origine des Académies, il ne faut nullement chercher quelqu'idée philanthropique mais l'intérêt, la puissance et la richesse qu'apportent les savants à une nation. Et c'est bien ici le souci légitime d'un état d'accroître sa richesse qui poussa Frédéric II vers Euler qui siégeait depuis quelques années à l'Académie de Berlin. Euler délaissa les travaux qui l'occupaient (machines hydrauliques pour le palais "Sans Souci") et adressa sa réponse au Roi trois jours après : "*Sire, j'ai tout d'abord examiné par le calcul les probabilités, combien doit-on payer chaque joueur de manière à ce que ses chances soient à égalité avec celles de la banque. Il est alors aisé de conclure combien la banque peut espérer gagner si le joueur est obligé de payer plus que ne le demande le cas d'égalité*". D'après le projet, il y a 90 billets numérotés 3 à 90, parmi lesquels on tire 5 billets au hasard. Le joueur peut participer à la loterie de différentes manières ; chacun est maître de son choix et détermine également le montant du gain auquel il aspire.

Le jeu décrit par Euler propose trois possibilités de gains.

Simple :

Le joueur choisit un numéro parmi 90 et comme il n'y a que 5 billets gagnants, sa probabilité de gain est de $\frac{5}{90}$ *ou* $\frac{1}{18}$. *Le jeu est donc équitable si, dans le but de gagner 100 écus, il accepte de payer seulement la dix-huitième partie de cette somme, à savoir 5 écus, 13 gros et 4 deniers* (1 écu = 12 deniers, 1 denier = 24 gros). Le projet fixant à 8 écus le prix du billet dans ce cas, la banque peut donc espérer un profit de 44%.

Ambe :

Ici, le joueur choisit deux numéros. Sa probabilité de gain sera de $\frac{5 \cdot 4}{90 \cdot 89}$ *ou* $\frac{2}{801}$. *Il y a égalité de chances pour un gain de 100 écus s'il accepte de payer* $\frac{2}{801} \times 100$ *écus, c'est-à-dire environ 6 gros. Le projet fixant le prix du billet dans ce cas à 14 gros. Le bénéfice escompté par la banque est de* $133\frac{5}{8}\%$. *Mais comme le profit est considérable, afin d'encourager d'avantage les joueurs (où est la morale ?) le projet leur garantit une prime de 20% et, dans ce cas, le profit de la banque n'est plus que de* $94\frac{11}{16}\%$

Terne :

Le joueur joue 5 numéros. La probabilité de gagner est $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{90 \cdot 89 \cdot 88}$ *ou* $\frac{1}{11748}$. *Dans le cas d'égalité de chances, il devra donc parier la 11 748e partie de 100 écus s'il aspire à un tel gain et devra donc payer pour cela* $2\frac{1}{2}$ *deniers. Le projet fixant à 15 deniers le prix du billet, le bénéfice de la banque s'élève alors à* $511\frac{7}{8}\%$. *Mais, afin d'encourager les joueurs, la banque promet une prime de 80% sur chaque montant gagné par terne ; son profit se réduit alors à 240%.*

À ces calculs, Euler en ajouta d'autres relatifs au gain attendu si seuls deux numéros parmi trois choisis sortaient au tirage. Il compléta son étude par des remarques plus générales, invitant ici à un moindre bénéfice sur le "simple" (44%)

et un bien plus grand sur l'ambe (94%) ou le terne (240%), conseillant là de ne pas autoriser de grosses mises sur un même numéro afin de ne pas exposer la banque au risque de "pertes considérables" et notant encore que ses calculs déterminant le prix des billets pouvaient être refaits très facilement au cas où l'entrepreneur souhaiterait un pourcentage différent.

C'est ainsi que, "*pénétré du gracieux honneur*" qu'il plut à sa majesté de lui faire, Euler répondit sans délai à Frédéric II. L'institution d'une loterie ne figurait sans doute pas dans les priorités du Roi, elle ne fut pas créée à cette date.

Dans un mémoire, jamais publié de son vivant, Euler reprit l'étude de la loterie génoise.
Sa recherche est présentée sous forme de problèmes. Les quatre premiers déterminent la probabilité que i billets gagnants parmi k achetés se trouvent dans les t billets tirés d'une loterie en comportant n. Euler donne les valeurs de ces probabilités pour $k=1$, 2, 3 et 4. Si l'on désigne par $p_{k,i}$ la probabilité d'obtenir i billets gagnants parmi k achetés dans une loterie de n billets où t billets gagnants sont tirés, comme il y a $\begin{pmatrix} t \\ i \end{pmatrix}$ façons de choisir i billets gagnants parmi les t tirés et $\begin{pmatrix} n-t \\ k-i \end{pmatrix}$ façons de choisir les $(k-i)$ perdants parmi les $(n-t)$ non tirés, le nombre total de cas favorables est : $\begin{pmatrix} t \\ i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} n-t \\ k-i \end{pmatrix}$.
Comme il y a évidemment $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ façons de choisir k billets (que l'on achète) parmi les n, la probabilité $p_{k,i}$ vaut : $p_{k,i} = \dfrac{\begin{pmatrix} t \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-t \\ k-i \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}}$.

Il s'agit ici de la répétition d'un tirage sans remise et nous savons que le modèle est celui de la distribution hypergéométrique.

Euler ne donna pas la formule générale mais, dans le problème cinq, il généralise les résultats trouvés et donne une règle de formation sans démonstration, si ce n'est une récurrence immédiate et "*intuitive*". Il donne les différentes valeurs de $p_{5,i}$ $(i=0$ à $5)$ et $p_{6,i}$ $(i=0$ à $6)$ puis présente de manière simple ses différents résultats en un tableau dont la règle de formation "*saute aux yeux*" et n'appelle sans doute aucune démonstration.

Une fois déterminées ces probabilités, il convient alors de calculer "*les prix qu'on est obligé de payer aux participants dans chaque cas, conformément à la loi d'égalité*" (c'est-à-dire dans l'hypothèse d'un jeu équitable). Tel est l'objet du problème 6.

Si un joueur achète k billets dont $\alpha_{k,i}$ désignant le gain associé à l'événement dont la probabilité est $p_{k,i}$ (i billets gagnants parmi les k achetés), dans le cas "*de conformité à la loi d'égalité*", pour un écu joué, on doit avoir $\sum_{i=0}^{k}\left(\alpha_{k,i} \times p_{k,i}\right)=1$.

En posant $\lambda_{k,i} = \alpha_{k,i} \times p_{k,i}$, on obtient $\sum \lambda_{k,i} = 1$. (E)

En fixant les valeurs des coefficients $\lambda_{k,i}$, tout en respectant l'égalité (E), il sera possible, sans changer le caractère équitable du jeu, de modifier la valeur des prix.

Il s'agit donc de "*diviser l'unité*". La première manière est de diviser l'unité en parties égales $\left(\lambda_{k,i} = \dfrac{1}{k}\right)$; « *mais si l'on juge que de cette façon les hauts prix deviennent trop grands, les coefficients numériques nous fournissent une telle manière de diviser, qui rendant les formules plus simples, semblent produire une espèce d'égalité.* »

Ici Euler propose d'autres valeurs pour les coefficients $\lambda_{k,i}$.

Comme $\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i} = 2^{\text{k}}$, on a donc $\sum_{i=1}^{k}\dfrac{\binom{k}{i}}{2^k-1}=1$

Le cas $i=0$ n'entraînant aucun gain, Euler peut donner simplement une autre famille de valeurs $\lambda_{k,i}$: $\lambda_{k,i} = \dfrac{\binom{k}{i}}{2^k-1}$.

Dans son étude, Euler proposa encore une troisième famille de coefficients $\lambda_{k,i}$.

Vient alors la question de trouver la diminution de ces prix, afin que l'entrepreneur en retire un profit prescrit. Le mathématicien suggère un profit de 10% sur les "bas prix" correspondant à un seul numéro trouvé, 20% pour deux numéros justes et ainsi de suite. Le problème 8 dresse le plan des prix qui conviennent à tous les cas selon la loi d'égalité pour une loterie de 90 billets parmi lesquels on en choisit 5 au hasard. Il indique ensuite dans un nouveau tableau l'ensemble des gains après "diminution", c'est-à-dire après application de ce que l'on pourrait appeler ici le "coefficient de vénalité" de l'entrepreneur. Afin de parachever, si elle ne l'était déjà, son étude, Euler propose le plan d'une loterie de 100 billets dont on en tire 9. Ce mémoire ne fut pas publié ; peut-être pour ne pas en divulguer les conclusions et donner des arguments aux moralistes de tous genres qui s'indigneraient davantage encore de l'existence de ces jeux. Il fut toutefois lu en séances à l'Académie de Berlin en 1763.

En août de la même année, Frédéric II se tournait à nouveau vers Euler, le priant d'examiner un autre projet de loterie qui lui avait été proposé, l'invitant à ne pas faire "à nouveau" scandale et à garder la plus grande discrétion sur le sujet. Avec la même célérité qu'en 1749, Euler répondit deux jours après informant le Roi que, selon ses calculs, le bénéfice pourrait s'élever jusqu'à 8 millions de florins.

Roccolini ne fut pas l'entrepreneur de la loterie de Berlin et Frédéric invita son ambassadeur à Londres à trouver quelqu'un qui fût capable de la créer ; c'est un certain Calzabiga qui se vit confier cette mission. Il avait auparavant déjà créé celles de Paris et Bruxelles.

C'est cette même année que Frédéric II institua une loterie en Prusse. Le texte qui suit, a très vraisemblablement contribué en partie à cette création.

LA LOTERIE GENOISE[2]

L. EULER

> Un Italien, proposa autrefois un projet d'une espèce de loterie qui paraissait fort au goût de la plupart des hommes, à cause des gains très considérables qu'on y pouvait faire sans presque rien risquer. Le plan était entièrement différent des loteries ordinaires, parce que chacun pouvait déterminer non seulement sa mise mais, aussi la grandeur du gain auquel il voulait aspirer. Il y avait plutôt quelque ressemblance avec le jeu de Pharaon, au regard des mises arbitraires qu'on peut mettre sur telle carte qu'on veut, mais il est pourtant différent par rapport aux prix que chacun peut choisir à volonté. L'arrangement de cette loterie dépend uniquement du calcul de probabilité, et l'entrepreneur, au lieu d'en tirer un profit fixe, risque de perdre très considérablement, quoique selon le plan dont je viens de parler, il soit probable qu'il gagne une bonne partie de tout l'argent qui y aura été mis. C'est à peu près comme si je m'engageais à payer à un autre cent écus pour un donné, dans le cas qu'il jetterait avec trois dés, la première fois, trois six ; il serait très possible que je perdisse à ce jeu 99 écus. Or la probabilité de gagner un écu étant 215 fois plus grande que celle de

[2] *Opera Postuma* 1, 1862.

perdre 99 écus, l'avantage est de mon côté et est estimé valoir $\frac{29}{54}$ écus, ou un peu plus qu'un demi-écu c'est-à-dire, si je m'engageais de cette manière envers 1000 personnes dont chacune m'aurait donné un écu, je pourrais estimer mon avantage à $537\frac{1}{27}$ écus, quoiqu'il soit possible que je perdisse 99 000 écus. C'est sur ce pied qu'on pourra évaluer l'avantage de celui qui entreprendrait la loterie mentionnée, en comparant la mise de chacun avec la probabilité qu'il aura de gagner.

Description de cette loterie

Cette loterie consiste en 90 billets marqués des nombres 1,2,3,4 etc. jusqu'à 90, desquels on se propose de tirer au hasard 5 à un temps fixé; et alors ces cinq numéros feront gagner ceux qui en auront auparavant choisi un, ou deux, ou trois, pour y attacher leurs mises. Car on peut participer à cette loterie de plusieurs manières différentes.
I. Ou on choisit à volonté un nombre qui ne surpasse point 90, et on paie aussi une somme d'argent qu'on jugera à propos. Alors quand ce nombre se rencontre parmi les cinq qui seront tirés, on retirera un prix qui sera un certain multiple de la mise.
II. Ou on choisit deux nombres à la fois, auxquels on attache une certaine mise, et en cas que tous les deux se trouvent ensuite parmi les cinq tirés, on recevra un prix assez considérable à proportion de la mise, ou si l'un d'eux seulement se trouve parmi les cinq, on reçoit aussi un prix moindre.
III. Ou on choisit trois nombres à la fois auxquels on attache à volonté une certaine mise et l'on peut s'attendre à un prix quelques mille fois plus grand que la mise, en cas que tous les trois nombres se trouvent parmi les cinq tirés, mais les prix seront moindres, lorsque deux des nombres choisis, ou un seul s'y trouvent.

Je ne me souviens plus de la grandeur des prix en détail qu'on paie en chaque cas, ce qui n'importe rien aux recherches que je me propose de faire, mais on comprend aisément qu'ils peuvent être très considérables pour le cas où trois nombres qu'on aura choisis, se rencontrent parmi les cinq tirés Et si l'on voulait admettre des quaternaires, le prix fixé pour le cas où tous les quatre nombres se trouveraient dans les cinq billets sortis, pourrait au-delà de 100 000 fois surpasser la quantité de la mise.

Il est évident que ni le nombre 90 des billets, ni celui des 5 qu'on tire, n'est essentiel à la nature de cette loterie, et qu'il est absolument libre d'établir un nombre de billets quelconque et d'en tirer enfin plus ou moins que cinq, ce qui me mène à des recherches plus générales qui peuvent servir ou à former d'autres plans de telles loteries, ou à examiner ceux qui pourront être proposés par d'autres.

Posons donc n pour le nombre de tous les billets marqués des nombres 1, 2, 3….n, qu'on en tire au hasard t, et tout revient à déterminer la probabilité que d'un certain nombre de numéros qu'on on aura choisis, il se trouve ou un seul, ou deux, ou trois, ou enfin tous dans les billets qu'on va tirer. Or, selon le nombre des numéros, la détermination de la probabilité qu'on cherche, se réduit aux problèmes suivants :

1. **Problème 1** : Le nombre de tous les billets étant $=n$, dont on doit tirer au hasard t billets, trouver la probabilité qu'un nombre choisi à volonté s'y trouvera.

Solution. Il est évident, par les premières règles de la probabilité, que pour que le nombre choisi se trouve parmi les t billets qu on va tirer, le nombre de tous les billets étant $= n$, la probabilité est $= \frac{t}{n}$, et pour qu'il ne s'y trouve pas, la probabilité est $= \frac{n-t}{n}$. Donc la solution fournit : que le nombre choisi se trouve parmi les billets tirés, la probabilité est $= \frac{t}{n}$ qu'il ne s'y trouve pas, la probabilité est $= \frac{n-t}{n}$.

2. *Corollaire 1*. Donc, si le nombre de tous les billets est 90, et qu'on en tire 5, dans le cas proposé au commencement,

un nombre choisi se trouve parmi les 5 billets tirés	la probabilité est $\frac{5}{90} = \frac{1}{18}$
Et qu'il ne s'y trouve point	$\frac{85}{90} = \frac{17}{18}$

3. Corollaire 2. Si l'on établissait 100 billets, et qu'on en voulût en tirer 10, ayant choisi un nombre à volonté, alors

Que ce nombre se trouve parmi les 10 billets tirés	la probabilité est $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$
Et qu'il ne s'y trouve point	$\frac{90}{100} = \frac{9}{10}$

4. **Problème 2.** Le nombre de tous les billets étant $= n$ dont on va tirer t billets, si l'on a choisi deux nombres, trouver la probabilité ou que tous les deux à la fois, ou qu'un seul, ou aucun ne se trouve parmi les billets tirés.

Solution. Distinguons les deux nombres choisis, l'un par A, l'autre par B, et que A se trouve parmi les t billets tirés, la probabilité est $= \frac{t}{n}$, et qu'il ne s'y trouve point, $= \frac{n-t}{n}$. Supposons que A s'y trouve déjà et pour voir si B s'y trouve aussi, ou non, il faut considérer que de $n-1$ billets on tire seulement $t-1$, et que B s'y trouve, la probabilité est $= \frac{t-1}{n-1}$ et qu'il ne s'y trouve point, $= \frac{n-t}{n-1}$. Donc que tous les deux nombres A et B s'y trouvent à la fois, la probabilité est $= \frac{t(t-1)}{n(n-1)}$ et que le seul nombre A s'y trouve, la probabilité est $= \frac{t(n-t)}{n(n-1)}$. La même probabilité est pour que le seul nombre B s'y trouve ; donc que l'un ou l'autre s'y trouve sans distinction, la probabilité est $= \frac{2t(n-t)}{n(n-1)}$. Or, qu'aucun des deux ne s'y trouve ; ou que tous les deux restent parmi les $(n-t)$ nombres non tirés, la probabilité sera $=\frac{(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)}$ d'où nous tirons conclusions suivantes :

Que de deux nombres choisis, tous les deux s'y trouvent	la probabilité est $=\frac{t(t-1)}{n(n-1)}$
qu'un seul s'y trouve	$=\frac{2t(n-t)}{n(n-1)}$
qu'aucun ne s'y trouve	$=\frac{(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)}$

5. **<u>Problème 3</u>.** Le nombre de tous les billets étant $=n$, dont on va tirer au hasard t billets, si l'on a choisi trois nombres, déterminer la probabilité ou que tous les trois, ou deux seulement, ou un seul, ou aucun ne se trouve parmi les billets tirés.

Solution. Distinguons les trois nombres choisis par les lettres *A, B, C* et que les deux, *A et B*, se trouvent, parmi les billets tirés, la probabilité est $\frac{t(t-1)}{n(n-1)}$, et qu'aucun ne s'y trouve, $=\frac{(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)}$. Supposons que les deux nombres *A* et *B* s'y trouvent, et nous aurons encore à considérer $(n-2)$ billets, et à chercher la probabilité que le nombre *C* se trouve parmi les *t —2* billets qui en sortiront ; or, cette probabilité est évidemment $=\frac{(t-2)}{(n-2)}$, et que C n'y soit point, la probabilité est $=\frac{(n-t)}{(n-2)}$.

Donc, pour que tous les trois nombres *A, B, C* se trouvent parmi les billets tirés, la probabilité est $=\frac{t(t-1)(t-2)}{n(n-1)(n-2)}$; or, que seulement *A* et *B* s'y trouvent, sans C, la probabilité $=\frac{t(t-1)(n-t)}{n(n-1)(n-2)}$. Mais il sera également probable qu'on y trouve, seulement les deux *A* et *C*, ou les deux *B* et *C*, donc, pour que deux seulement, sans distinction se trouvent dans les *t* billets tirés, la probabilité est $=\frac{3t(t-1)(n-t)}{n(n-1)(n-2)}$. Ensuite, que le nombre *A* s'y trouve, la probabilité est $=\frac{t}{n}$, mais que les deux autres *B* et *C* se trouvent parmi les billets restants$=(n-t)$, le nombre de tous devant maintenant être regardé comme $(n-1)$, la probabilité est $=\frac{(n-t)(n-t-1)}{(n-1)(n-2)}$, donc que le seul nombre *A* s'y trouve, la probabilité est

$= \dfrac{t(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)(n-2)}$ et puisque chacun des deux autres, *B* et *C*, peut s'y trouver aussi probablement, la probabilité qu'un seul, quel qu'il soit, s'y trouve, est $= \dfrac{3t(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)(n-2)}$

D'où nous concluons :

Que de trois nombres choisis, tous les trois s'y trouvent	la probabilité est $= \dfrac{t(t-1)(t-2)}{n(n-1)(n-2)}$
Que deux seulement s'y trouvent	$= \dfrac{3t(t-1)(n-t)}{n(n-1)(n-2)}$
Qu'un seul s'y trouve	$= \dfrac{3t(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)(n-2)}$
Qu'aucun ne s'y trouve	$= \dfrac{(n-t)(n-t-1)(n-t-2)}{n(n-1)(n-2)}$

Problème 4. Le nombre de tous les billets étant $= n$ dont on va tirer *t* billets, si l'on a choisi quatre nombres, déterminer le probabilité ou que tous les quatre, ou que trois, ou deux seulement, ou un seul, ou aucun d'entre eux ne se trouve dans les billets tirés.

Solution. Désignons les quatre nombres choisis par les lettres *A, B, C, D*, et ayant déterminé la probabilité que des trois nombres *A, B, C*, ou tous les trois, ou deux, ou un seul ou aucun ne se trouve dans les billets tirés, nous n'avons qu'à combiner avec chacun de ces cas la probabilité que le quatrième nombre D s'y trouve aussi, ou non; ce qui nous fraiera le chemin de pousser aisément nos recherches à autant de nombres choisis qu'on voudra. Reprenons donc les formules trouvées pour trois nombres *A, B, C*, et joignons-y la probabilité que le quatrième *D* s'y trouve, ou non :

Que des nombres *A, B, C* il se trouve dans les billets tirés	La probabilité est	Que le quatrième D	
		S'y trouve	Ne s'y trouve pas
tous les trois	$\dfrac{t(t-1)(t-2)}{n(n-1)(n-2)}$	$\dfrac{(t-3)}{(n-3)}$	$\dfrac{(n-t)}{(n-3)}$
Deux seulement	$\dfrac{3t(t-1)(n-t)}{n(n-1)(n-2)}$	$\dfrac{(t-2)}{(n-3)}$	$\dfrac{(n-t-1)}{(n-3)}$
Un seul	$\dfrac{3t(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)(n-2)}$	$\dfrac{(t-1)}{(n-3)}$	$\dfrac{(n-t-2)}{(n-3)}$

aucun	$\dfrac{(n-t)(n-t-1)(n-t-2)}{n(n-1)(n-2)}$	$\dfrac{t}{(n-3)}$	$\dfrac{(n-t-3)}{(n-3)}$

De là nous déduisons la probabilité :

I. Que les trois *A, B, C* avec le quatrième s'y trouvent $\dfrac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$.

II. Que les trois *A, B, C*, sans le quatrième *D* s'y trouvent, et que deux des *A, B, C* avec le nombre *D* s'y trouvent

$$\frac{t(t-1)(t-2)(n-t)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}+\frac{3t(t-1)(t-2)(n-t)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

donc que trois quelconques des quatre *A, B, C, D* s'y trouvent, la probabilité est

$$\frac{4t(t-1)(t-2)(n-t)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

III. Que deux seulement des trois A, B, C, sans le quatrième D, s'y trouvent, la probabilité est $=\dfrac{3t(t-1)(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$

et qu'un seul des trois *A, B, C,* avec le quatrième *D* s'y trouve, la probabilité est

$$=\frac{3t(t-1)(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

donc que deux quelconques seulement des quatre nombres *A, B, C, D* se trouvent dans les billets tirés, la probabilité sera $=\dfrac{6t(t-1)(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$

IV. Qu'un seul des trois *A, B, C,* sans le quatrième *D* s'y trouve, la probabilité est

$$=\frac{3t(n-t)(n-t-1)(n-t-2)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

et que nul des trois *A, B, C*, mais le quatrième *D* seul s'y trouve, la probabilité est

$$=\frac{t(n-t)(n-t-1)(n-t-2)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

donc qu'un seul quelconque de tous les quatre *A, B, C, D*, se trouve dans les billets tirés, la probabilité sera $=\dfrac{4t(n-t)(n-t-1)(n-t-2)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$

V. Enfin qu'aucun des trois *A, B, C*, ni le quatrième *D* ne se trouve dans les billets tirés, la probabilité sera $=\dfrac{(n-t)(n-t-1)(n-t-2)(n-t-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$

Dans les problèmes 5 à 9, Euler étudie une généralisation au cas de *n* billets dont on en tire *t*, puis il cherche à déterminer les prix (récompenses) selon les mises des joueurs et selon le profit espéré. Les lecteurs intéressés pourront consulter ces textes sur le site de l'IREM : http://www.u-bourgogne.fr/IREM/.

Donnons-leur les bases . . . de numération !

Jean-François MUGNİER, Collège Jacques Mercusot à Sombernon[1]

Mots-clés *: bases de numération, décimaux, entiers, activité, division euclidienne, 6ème.*

Vous avez certainement constaté qu'un certain nombre d'élèves n'ont pas assimilé le système décimal et ont du mal à effectuer des conversions justes. On s'en rend compte en 6e mais cela deviendra problématique en 4e lorsqu'il faudra l'utiliser avec les puissances de dix.
Les bases de numération ont été pratiquées à l'école primaire pendant quelques années[2], elles n'y figurent plus. Était-ce accessible à des élèves de CM2 ?
En revanche, elles le sont fort bien aux élèves de 6e. Les ayant encore pratiquées cette année, je crois qu'elles permettent une bien meilleure compréhension de notre système de numération. Ceci m'amène à penser qu'elles devraient figurer au programme.
En attendant, rien ne nous empêche, semble-t-il, de les traiter sous forme d'activités de recherche puisque cela permet d'aborder plusieurs points du programme actuel. Cette activité se situe principalement au 1er trimestre.

Éléments du programme de 6e abordés :

- tableaux en deux ou plusieurs colonnes ;
- demi-droite graduée ;
- écritures des entiers et, plus tard, des nombres à virgule ;
- les quatre opérations avec, en particulier, la division euclidienne (importance du reste) et les écritures avec plusieurs opérations et des parenthèses — sens et technique ;
- division posée ;
- multiplication par 10, 100, 1 000… ;
- système sexagésimal ;
- conversions.

---

[1] Remerciements à Alain MASCRET et Jacky MARÉCHAL pour leurs remarques pertinentes et les compléments apportés.

[2] Elles sont évoquées dans une réunion CM2-6e au Collège Gaston Roupnel (brochure de l'IREM de Dijon de novembre 1978 : Thèmes en 1er cycle, p 4).
On peut aussi consulter les IO (arrêté du 02/01/70) ou chercher Nicole Picard sur un moteur de recherche (attention homonyme). On y trouve les livres auxquels elle a participé et aussi … des critiques des maths-modernes de l'époque !

Ces activités sur les bases peuvent être précédées de réactivations sur les nombres et sur les trois premières opérations (+, −, ×). On peut se limiter à la technique puisque cette activité en travaillera le sens[3]. La distinction entre : chiffre, nombre, écritures d'un nombre me paraît aussi être un objectif déterminant de 6e. D'une part, il me semble important de lever les confusions et les idées fausses[4] qui existent et, d'autre part, ces confusions sont certainement sources de difficultés pour l'assimilation du langage algébrique[5] plus tard.
Des activités préliminaires de sensibilisation aux différents systèmes de numération sont utiles : chiffres romains[6] ou égyptiens, numération maya ou japonaise. Des situations plus « théâtrales » jouées par plusieurs élèves sont appréciées. Par exemple : comptage avec les doigts puis, à partir de 10, l'élève fait appel à un camarade, à 20, on a 2 paquets de 10 doigts, etc.
Et si on n'avait que 4 doigts comme les Martiens qui, c'est bien connu, n'ont que 2 doigts à chaque main, des sortes de pinces !
Les jours, les heures de 60 min, etc. peuvent aussi être évoqués ici mais peut-être vaut-il mieux attendre la 3e ou la 4e étape car la base est soixante mais l'écriture est décimale, ce qui complique les choses.

Première étape :
J'annonce qu'il s'agit d'une recherche ouverte. Il faudra donc chercher avec ses connaissances d'école primaire et ne pas se décourager si on « patauge » un peu. Le fait d'être en groupe aidera à partager et à confronter les idées.
Les élèves étant répartis en groupes de 3 (éventuellement 2 ou 4), je leur distribue une demi-feuille sur laquelle est indiqué le sujet de la recherche : « Sur la planète SÉSAB…[7] » accompagnée d'une enveloppe contenant les chiffres[8] de leur base (voir **annexe 1**). Bien sûr, le mot base n'est pas prononcé ! Je passe dans les groupes pour aider à assimiler la consigne. Au début, les élèves manipulent frénétiquement les chiffres sans bien comprendre à quoi ils peuvent servir… et souvent sans bien se rendre compte qu'il s'agit de chiffres ! Il faut les inciter à écrire réellement la suite des nombres en posant les chiffres sur la table.

---

[3] Par ailleurs, recherche, résolution et rédaction de problèmes me semblent être un « fil rouge » qu'il faut entretenir tout au long de l'année de 6e. Et après ?
[4] Par exemple : les chiffres vont de 0 à 9 et les nombres, c'est à partir de 10.
[5] Je me souviens de ce parent d'élève, exerçant pourtant une profession technico-scientifique, qui me disait avoir été « perdu » en maths lorsqu'il avait rencontré les « x ». Il n'arrivait pas à « comprendre ce qu'ils pouvaient bien signifier ».
[6] Il est préférable de travailler avec le système uniquement additif d'avant le Moyen Âge, ce qui permet de faire des additions et des soustractions qui font bien voir ce qu'est une retenue. On peut s'essayer à la multiplication…
[7] SÉSAB est l'anagramme de BASES.
[8] On se procure assez facilement des chutes de plaques d'immatriculation dans les grands garages ou dans les magasins du type Norauto. Prudence, c'est un peu coupant !

Dès que les groupes se sont (plus ou moins) approprié la recherche, je distribue un tableau A3[9] (voir **annexe 2** — en réduction) dans lequel figurent les nombres de 0 à 51 écrits en lettres et figurés par des bâtons. La 3e colonne attend l'écriture dans la base donnée…
Quelques temps après, je donne des paquets de bûchettes ou des poignées de gros haricots à chaque groupe… succès garanti ! Je complète avec des petits élastiques ou des petites boîtes type boîtes de pellicules photos.
Les premiers nombres (0, 1, 2, 3…) sont évidemment écrits mais dès qu'on atteint la base, il faut rappeler que son écriture « habituelle » est impossible sur cette planète ! Alors comment faire ? On questionne, on suggère (de regrouper par exemple) mais sans jamais téléguider la réponse. Des pauses collectives peuvent aider à débloquer la classe en ré-évoquant le fonctionnement du système décimal[10] : DİX ne s'écrit pas avec un seul chiffre. Que signifie ce 1 à gauche du 0 ? Et dans 100 ? Et dans 12 ou 36 ? İl me semble que le message sur le système décimal est beaucoup mieux reçu dans ces conditions que dans un cours magistral accompagné du sempiternel tableau appris (et parfois su !) mais non compris réellement. La motivation existe et « avoir à transférer[11] » une connaissance est plus efficace. En attendant que la recherche avance, rien n'interdit de donner en exercices à la maison des décompositions/recompositions de nombres entiers ou à virgule pour entretenir le système décimal. İls peuvent être réussis mécaniquement sans que le lien avec la recherche ne soit fait…
Une seule heure ne suffit pas et à la séance suivante, en fonction de l'état de la classe, on peut ou non[12] proposer de chercher collectivement le début des écritures en base TROİS par exemple. On parle de bâtons (unités), de paquets ("troisaines") et éventuellement de paquets de paquets (neuvaines[13]) ou tout autre vocabulaire proposé par la pratique et les élèves.
Retour à la recherche en groupe. Le professeur circule, rappelle, aide, encourage, questionne, etc. sans jamais dire « oui, c'est ça » ou « non, c'est faux » mais plutôt en interrogeant « innocemment » sur la cohérence avec la consigne ou avec le travail fait dans d'autres bases. Le mot « **base** » est introduit lorsqu'on le sent utile. Faut-il démystifier SÉSAB ou laisser rêver… ?
Le travail avance, à la maison, s'il n'est pas trop tôt, on peut chercher comment s'écrit **12021**(base TROİS) dans le système décimal. Réponse à essayer de rédiger correctement, bien sûr.

---

[9] Travailler en groupe sur une "**grande**" feuille a son importance.
[10] Une idée fausse très répandue est que nombre décimal signifierait nombre à virgule. NON ! les entiers sont des décimaux ($\mathbf{N} \subset \mathbf{D}$). Nombre décimal signifie : qui a une écriture finie dans le système à base DİX (déci). Les ensembles de nombres ne sont pas construits par juxtapositions mais par extensions successives.
[11] Comme disent les didacticiens !
[12] Cela dépend de « l'efficacité » des activités préliminaires. Chez certains élèves, le comptage vécu uniquement comme une « chanson » que l'on récite a la vie dure !
[13] On peut éventuellement indiquer que ce mot figure dans les dictionnaires et en expliquer le sens.

Deuxième étape :

Une fois la base franchie, les élèves euphoriques continuent… comme dans le système décimal ! On voit, par exemple, des 15 en base CINQ ! Rappel au règlement ! ! ! Pour matérialiser les groupements, les buchettes (avec élastiques) ou les haricots (avec des boîtes) seront d'un grand secours. Il faut trouver qu'il sera nécessaire de mettre un 2 aux « paquets », puis un 3, etc.

Un second obstacle sera le franchissement de « $\overline{\text{base} \times \text{base}}$ ». Même recours au matériel et utilisation d'un vocabulaire-élève qu'il faudra normaliser petit à petit pour la classe. On propose des tas, des cartons, des caisses, des containers, des camions, … j'ai même vu des porte-avions ! Mais aussi des huitaines, des soixante-quatraines, … au moment opportun, pour redescendre sur Terre.

Les groupes qui ont terminé l'annexe 2 se voient distribuer la suite : de 52 à 109 mais sans bâtons. Les plus rapides en redemandent et poursuivront au dos. Mais, parfois le franchissement de $(\overline{\text{base} \times \text{base} \times \text{base}})$ peut être un nouvel obstacle. En général vite franchi.

On imagine facilement des exercices de changements de bases vers le décimal. La bases **DEUX** est un cas intéressant[14].

Troisième étape :

Comment trouver l'écriture d'un nombre en base N, sans être obligé d'écrire tous les nombres jusqu'à lui ?

Après une recherche par groupes sur un exemple bien choisi, une reprise en main collective est souvent nécessaire. Suivant les classes, les suggestions sont plus ou moins riches et il faudra plus ou moins orienter les trouvailles… La division apparaît mais il est fondamental d'écrire les mots : « bâtons », « paquets », etc. à côté des nombres écrits en chiffres[15].

Selon le niveau de la classe, des rappels sur la division posée peuvent s'avérer nécessaires mais les diviseurs à un seul chiffre ne posent souvent pas de problème.

La division euclidienne prend ici tout son sens de partage. On fait des paquets et il nous reste (ou pas) des bâtons-unités. Puis des paquets de paquets et il nous reste des paquets, puis…

La disposition de la division posée permet d'enchaîner facilement plusieurs divisions (voir **annexe 3** bas) mais attention, on doit « récolter » les chiffres du nombre « à l'envers » ; d'où encore l'importance de bien écrire les mots : bâtons, paquets, tas… pour pouvoir s'y retrouver.

---

[14] On peut parler de son rôle en informatique (le courant passe ou non, illustré par l'interrupteur de la salle de classe). Les systèmes octal et hexadécimal peuvent être évoqués ainsi que les octets et les « kilos » informatiques qui valent 1 024. Et les « méga » de 1 048 576. Activités connexes possibles. C'est aussi le « truc » de certains jeux.

[15] Nouvelle preuve, s'il en fallait une, que l'écriture des unités dans les problèmes est une très bonne habitude pour les élèves ! Voir Feuille de Vigne n° 100 de juin 2006 p 49. Les instructions officielles nous en font maintenant obligation, comme cela se pratique depuis longtemps dans les autres pays européens.

Une vérification du résultat s'impose. C'est un nouvel exercice, pas inutile pour certains. Pour d'autres, le travail réciproque des divisions s'impose comme une évidence ! Si ce n'est pas le cas, au professeur de « jouer ». $a = (b \times q) + r$, vous connaissez… c'est l'occasion de le placer sur des exemples. On peut éventuellement pousser jusqu'à l'écriture anglo-saxonne des fractions : $5 + ¾$, c'est la division de 23 par 4.
Certains élèves sont assez émerveillés de la « magie » de ces calculs et de la puissance des résultats obtenus. Pour d'autres, des gammes seront nécessaires. D'où l'**annexe 3**.

Quatrième étape :
De retour en groupes, les élèves vont se fabriquer des exercices (plus correction) qu'ils s'échangeront mutuellement. Les exercices faits par les copains sont bien plus intéressants que ceux du professeur ! Il arrive que le premier groupe qui teste un exercice trouve une erreur dans la correction ; le professeur doit donc les vérifier dès que possible mais il y a des moments de surproduction dans la classe ! Parfois les propositions de nombres faites au hasard ne sont pas très pertinentes, il faut donc rapidement faire le tour des brouillons de groupes pour les enrichir.

Suite et fin :
Je donne une fiche-mémoire qui résume les deux procédures de changement de base. Bien sûr, il s'agit de savoir le **faire** et non d'apprendre un cours par cœur ! Cela permet aussi aux familles qui suivent de près le travail de leurs enfants de s'y retrouver. Mais ce sont souvent les enfants qui expliquent aux parents !

J'ai poussé le vice jusqu'à donner un devoir maison (voir **annexe 6**) et un contrôle sur le sujet. Je ne suis pas mécontent du tout des résultats, sans doute parce que j'ai pris soin d'étaler cela dans le temps et de refaire quelques exercices. Nous sommes allés jusqu'à constater que : $\mathbf{E0} + \mathbf{1} = \mathbf{F} \times \mathbf{F}$ (base SEİZE).
Certains élèves, aidés de leur calculette Windows, se sont même permis d'ajouter des compléments pertinents.
Le système sexagésimal est maintenant plus prêt à être compris et manipulé. Les mesures anglaises (pouces, pieds, …) ou les anciennes mesures (toises, lignes, …) peuvent aussi être des sources d'exercices.

Épilogue :
Quelques remarques.

- Vous avez compris que je ne donne pas une activité « clé en main » minutée car il est nécessaire de s'adapter aux réactions de la classe.
- Les élèves ont l'habitude de voir des dessins où l'on partage l'unité en dix petits segments appelés dixièmes puis centièmes mais franchissent-ils bien le pas entre *partager* et *diviser* par 10 ? 1/10, dixième (le rang), 0,1, 1 divisé par 10 et une

unité partagée en 10, tout cela est-il lié[16] ? Je pense que cette activité a aussi des conséquences bénéfiques sur les nombres à virgule car les divisions par 10 prennent plus de sens ici puisqu'elles sont dans le prolongement des nombreuses divisions faites dans différentes bases.

- Le fait de constater que toutes les [$\overline{\text{bases}}$] s'écrivent [$\overline{\mathbf{10}}$] et que toutes les [$\overline{\text{base} \times \text{base}}$] s'écrivent [$\overline{\mathbf{100}}$] (etc.) donne une autre signification aux écritures dans un système de position que le simple récitatif des rangs : u, d, c, m, …
- Néanmoins les rangs de la partie décimale méritent d'autres activités car de nombreux élèves symétrisent autour de la virgule au lieu du <u>rang</u> des unités[17] et placent les dixièmes au second rang, les centièmes au troisième, etc. en fabriquant une sorte de rang des "unité-ièmes" plus ou moins présent suivant la longueur de la partie décimale. J'ai constaté que certains manuels et Mathenligne renforcent cette erreur par une disposition maladroite du fameux tableau.
- Trop parler de « partie entière » et de « partie décimale »[18] est nuisible car cela conforte l'idée fausse qu'un nombre à virgule est composé de **deux** entiers. Il faut absolument convaincre les élèves qu'un nombre à virgule c'est "la même chose qu'**UN seul** entier"… au choix de l'unité près. Si on compte en *paquets*, il y en a 10 fois moins que si on compte en *bâtons*. Si on compte en *dixièmes de bâtons*, il y en a 10 fois plus que si on compte en *bâtons*. Etc. De même, en géographie : 64,5 millions d'habitants, c'est 64 500 milliers d'habitants ou 64 500 000 habitants.
- J'ai constaté que certaines calculatrices de poche permettent de transformer l'écriture d'un nombre en bases 2, 8 ou 16. De même la calculatrice des ordinateurs le permet. Un passage en salle informatique permet de pratiquer ces passages en faisant quelques vérifications manuelles, bien sûr. La base 16 permet de s'amuser avec les lettres. Que vaut $\overline{\text{BABA}}$? Et en binaire une curieuse symétrie au chiffre des unités près. On en reste baba ! Et la calculatrice permet de faire de curieuses opérations qui défient les tables que nous avons apprises. Si on avait du temps, on pourrait en effectuer à la main et même construire des tables…
- Dans les années 60, les livres de Georges PAPY[19] proposaient des opérations à effectuer à l'aide de jetons placés dans des cases de tableaux qui mettaient bien en évidence les groupements ainsi que les retenues. Ceci se pratiquait dans diverses bases.

---

[16] L'exercice de l'évaluation à l'entrée en 6e qui montre que la confusion entre ¼ et 1,4 ou 0,4 est très fréquente va dans ce sens. Ou 724/100 et 724,100.

[17] Renseigné **par** la virgule.

[18] Le Dictionnaire des Mathématiques de François LE LYONNAIS (Éd. PUF) indique que la « partie entière » est un **nombre** entier mais la « partie décimale » est donnée comme une **suite de chiffres** (rubrique : virgule). Cela est-il cohérent ? et que disent les manuels ? …

[19] On peut voir des photos de PAPY sur le site de l'UREM de l'Université Libre de Bruxelles qu'il est intéressant de visiter, par ailleurs.

Annexe 1

Deux exemples de fiches de recherche distribuées aux différents groupes

Sur la planète **SÉSAB DOUZE**

Les êtres humains qui y vivent depuis des millions d'années, possèdent plus de chiffres que nous pour écrire les nombres ; ils en ont DOUZE :

0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 ,

X pour DİX unités et **Z** pour ONZE unités!

Vous les avez dans l'enveloppe ci-jointe.

Comment peuvent-ils bien faire pour réussir à écrire les nombres de ZÉRO à CENT en utilisant ces DOUZE chiffres ?

Sur la planète **SÉSAB QUATRE**

Les êtres humains qui y vivent depuis des millions d'années, possèdent moins de **chiffres** que nous pour écrire les nombres ; ils n'en ont que **QUATRE** :

0 , 1 , 2 , 3

Vous les avez dans l'enveloppe ci-jointe.

Comment peuvent-ils bien faire pour réussir à écrire les nombres de ZÉRO à CENT en n'utilisant que ces QUATRE chiffres ?

Ces fiches sont accompagnées d'une enveloppe contenant ces chiffres (chutes de plaques d'immatriculation de voitures).

Annexe 2

Les chiffres **utilisables** sont : **0** ; . ; . ; . ; . ; . ; … … … … … … …

<table>
<tr><th></th><th>S’écrit :</th><th></th><th>S’écrit :</th></tr>
<tr><td>Zéro</td><td>. . .</td><td>Vingt-six</td><td>. . .</td></tr>
<tr><td>Un</td><td>| . . .</td><td>Vingt-sept</td><td>. . .</td></tr>
<tr><td>Deux</td><td>|| . . .</td><td>Vingt-huit</td><td>. . .</td></tr>
<tr><td>Trois</td><td>||| . . .</td><td>Vingt-neuf</td><td>. . .</td></tr>
<tr><td>Quatre</td><td>|||| . . .</td><td>Trente</td><td>. . .</td></tr>
<tr><td>Cinq</td><td>||||| . . .</td><td>Trente et un</td><td>. . .</td></tr>
<tr><td>Six</td><td>|||||| . . .</td><td>Trente-deux</td><td>. . .</td></tr>
<tr><td>Sept</td><td>||||||| . . .</td><td>Trente-trois</td><td>. . .</td></tr>
<tr><td>Huit</td><td>|||||||| . . .</td><td>Trente-quatre</td><td>. . .</td></tr>
<tr><td>Neuf</td><td>||||||||| . . .</td><td>Trente-cinq</td><td>. . .</td></tr>
<tr><td>Dix</td><td>|||||||||| . . .</td><td>Trente-six</td><td>. . .</td></tr>
<tr><td>Onze</td><td>||||||||||| . . .</td><td>Trente-sept</td><td>. . .</td></tr>
<tr><td>Douze</td><td>|||||||||||| . . .</td><td>Trente-huit</td><td>. . .</td></tr>
<tr><td>Treize</td><td>||||||||||||| . . .</td><td>Trente-neuf</td><td>. . .</td></tr>
<tr><td>Quatorze</td><td>|||||||||||||| . . .</td><td>Quarante</td><td>. . .</td></tr>
<tr><td>Quinze</td><td>||||||||||||||| . . .</td><td>Quarante et un</td><td>. . .</td></tr>
<tr><td>Seize</td><td>|||||||||||||||| . . .</td><td>Quarante-deux</td><td>. . .</td></tr>
<tr><td>Dix-sept</td><td>||||||||||||||||
| . . .</td><td>Quarante-trois</td><td>. . .</td></tr>
<tr><td>Dix-huit</td><td>||||||||||||||||
|| . . .</td><td>Quarante-quatre</td><td>. . .</td></tr>
<tr><td>Dix-neuf</td><td>||||||||||||||||
||| . . .</td><td>Quarante-cinq</td><td>. . .</td></tr>
<tr><td>Vingt</td><td>||||||||||||||||
|||| . . .</td><td>Quarante-six</td><td>. . .</td></tr>
<tr><td>Vingt et un</td><td>||||||||||||||||
||||| . . .</td><td>Quarante-sept</td><td>. . .</td></tr>
<tr><td>Vingt-deux</td><td>||||||||||||||||
|||||| . . .</td><td>Quarante-huit</td><td>. . .</td></tr>
<tr><td>Vingt-trois</td><td>||||||||||||||||
||||||| . . .</td><td>Quarante-neuf</td><td>. . .</td></tr>
<tr><td>Vingt-quatre</td><td>||||||||||||||||
|||||||| . . .</td><td>Cinquante</td><td>. . .</td></tr>
<tr><td>Vingt-cinq</td><td>||||||||||||||||
||||||||| . . .</td><td>Cinquante et un</td><td>. . .</td></tr>
</table>

Annexe 3

Cette feuille va servir à fabriquer un exercice **sur le modèle ci-dessous.**

- **La seconde** partie, à découper, servira à rédiger sa **correction**.
- Ensuite, vous proposerez cet exercice aux autres groupes.

NOMS Prénoms : **6 .**

… … … … … … … …
… … … … … … … …
… … … … … … … …

EXERCİCE du groupe .

- On donne le nombre [. . .] en base [… … … …] . ← Votre BASE

1°/ Écrire ce nombre dans le système **décimal** (base DİX).
Détailler les calculs.

2°/ Traduire ce nombre dans la base [… … … …] . ← Une **autre** base
Poser les opérations. PAS la vôtre !

✂ -

CORRECTİON du groupe . de **6 .**

1°/ . . . en base … … … … : ← nombre donné

= . tas + . paquets + . bâtons ← explication

= (. × .. × ..) + (. × ..) + (. × 1) ← utilisation de la base

= (. × ..) + … + … ← calcul dans le système décimal

= … + … = … … … (décimal) ← calcul dans le système décimal

donc . . . (… … …) = … … … (dix)

2°/ En base … … … … :

. . . . bât. | … ← Combien de **paquets** parmi les bâtons ?

… … paq. | … ← Combien de **tas** parmi les paquets ?

. … | … ← Combien de … … … ?

. … . … . … . … ← etc.

Reste Reste Reste

Écriture du nombre :	…	…	Tas	Paq.	Bât.
	.	.	.	.	.

Dans quel ordre ? ← restes successifs

donc . . . (… … …) = … … … (dix) = … … … (… … …)

Demandez un **autre** exercice et rédigez correctement sa solution.

Annexe 4

LES SYSTÈMES de NUMÉRATİON de POSİTİON avec BASE

Comment effectuer les <u>changements de base</u> dans les deux sens ?

1°/ Passer d'une base au système décimal (base DİX) :

➢ Si on donne le nombre **d cba** en base base .

On calcule (<u>multiplications</u> puis <u>additions</u>) :

- **a** × 1 = … ← **a** est le chiffre des <u>unités</u> (bâtons)
- **b** × base = … ← **b** est le chiffre des <u>paquets</u> (la base)
- **c** × base × base = … ← **c** est le chiffre des <u>tas</u> (base × base)
- **d** × base × base × base = … ← **d** est le chiffre des <u>cartons</u> (base × base × base)
- **etc.** puis on **additionne** tous ces produits.

<u>Exemple 1 :</u>

Traduire le nombre 2 034 base CİNQ**,** dans le système **décimal** (base DİX).

<u>**2 034** en base CİNQ</u> ← *nombre donné*

= **2** cartons + **0** tas + **3** paquets + **4** bâtons ← *explication*

= (**2** × 5 × 5 × 5) + (**0** × 5 × 5) + (**3** × 5) + (**4** × 1) ← *utilisation de la base*

= (**2** × 125) + (**0** × 25) + 15 + 4 ← *calcul dans le système décimal*

= 250 + 0 + 19 = <u>269 (décimal)</u> ← *somme dans le système décimal*

donc 2 034 (CİNQ) = <u>**269** (dix)</u>

2°/ Passer du système décimal à une autre base :

* *Divisions EUCLİDİENNES !*

➢ On <u>divise* par la base</u> aussi longtemps que le quotient est supérieur ou égal à la base.

Chaque reste (et le dernier quotient) sont les chiffres successifs dans la nouvelle base.

Attention, les chiffres sont obtenus dans l'<u>ordre inverse</u> de celui de l'écriture du nombre !

<u>Exemple 2 :</u>

Traduire le nombre 3 755 du système décimal dans la **base HUİT** (octal).

3 7 5 5 bât.	8			← *Combien de **paquets** parmi les **bâtons** ?*
5 5	4 6 9 paq.	**8**		← *Combien de **tas** parmi les paquets ?*
7 5	6 9	5 8 tas	**8**	← *Combien de **cartons** parmi les tas ?*
3 bât.	**5** paq.	**2** tas	**7** car.	← *FİN car 7<8.*
Reste	Reste	Reste		*Divisions EUCLİDİENNES ! ! !*

Écriture du nombre →

…	Cartons	Tas	Paquets	Bâtons
0	**7**	**2**	**5**	**3**

Dans quel ordre ? ← *Restes successifs*

donc 3 755 (dix) = <u>**7 253** (HUİT)</u>

*İl faut savoir faire des **exercices** semblables mais **aucune** théorie n'est exigée.*

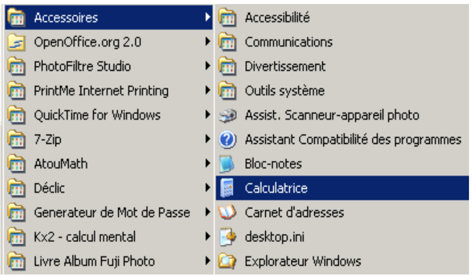
Annexe 5

LA CALCULATRİCE DE Monsieur WİNDOWS

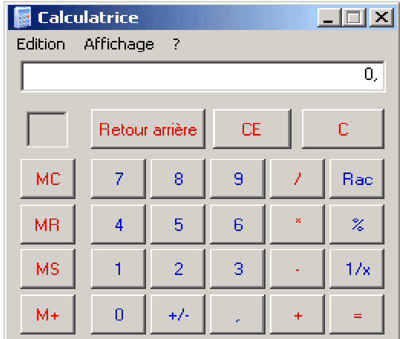
Savez-vous que les ordinateurs sont dotés d'une **calculatrice** assez perfectionnée qui permet d'effectuer certains changements de base immédiatement, par un simple « clic » ? Voici comment y accéder.

Cliquer sur :
- Démarrer
- Programmes

Puis cliquer sur :
- Accessoires
- Calculatrice



Une calculatrice apparaît.
Peut-être une toute simple ?

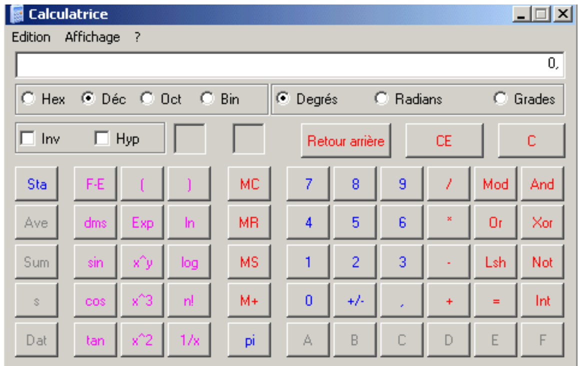


Cliquer sur :
- Affichage.

: Sélectionner Scientifique.

Une plus grosse calculatrice apparaît.

A priori, elle fonctionne dans le système décimal : **[Déc]** est coché.
Les DİX chiffres bleus sont visibles.



Si vous sélectionnez **[Hex]**, six chiffres bleus supplémentaires apparaissent :

A, B, C, D, E et F !

C'est le système **hexadécimal** : à base **SEİZE** (il faut seize chiffres)**.**
Quelle est la valeur de ces chiffres ?
A = dix ; **B** = onze ; **C** = douze ; **D** = treize ; **E** = quatorze ; **F** = quinze.

[Oct] est le système **octal** : à base **HUİT** (il ne faut que huit chiffres)**.**

[Bin] est le système **binaire** : à base **DEUX** (il ne faut que deux chiffres : 0 et 1)**.**

Faites des essais ; par exemple :

Que vaut ABEF [Hex] dans le système décimal ? Et dans les deux autres systèmes ?

Et 7654 [Oct] dans les trois autres ? Et 101010101 [Bin] ?

Vous pouvez même vous amuser à faire des opérations dans les quatre systèmes !

AB + CD = ? [Bin] : 111 x 111 = ? [Oct] : 777 / 4 = ? Curieux ! Vérifiez-le...

Annexe 6

Devoir de mathématiques n°.

Brouillon pour le .. : . . / . . /200 .

À rendre le .. : . . / . . /200 .

Bien LİRE tout !

Écrire en ***ligne*** *les multiplications/addition.*

Poser *soigneusement les divisions (embrocher).*

Bien indiquer les ***rangs*** *(bâtons, paquets, tas, cartons, caisses, etc.).*

Utiliser les exercices faits en classe et la fiche de cours.

I Alphabétiquement !

Dans le système **hexadécimal** (base SEİZE), on a besoin de 16 chiffres.

İl faut donc adjoindre 6 chiffres aux 10 du système décimal. Pour cela, on utilise les six premières lettres de l'alphabet :

A = dix ; **B** = onze ; **C** = douze ; **D** = treize ; **E** = quatorze ; **F** = quinze.

➢ Chercher comment s'écrit le nombre **ABCD** (base **SEİZE**) dans le système **décimal.**

Aide : Tu dois trouver un nombre de cinq chiffres, inférieur à 50 000.

/6pts

II Octalement !

Dans le système **octal** (base HUİT), on n'utilise que huit chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7.

Chercher comment s'écrit dans ce système le nombre **décimal : 3 929.**

Aide : Tu dois trouver un nombre de quatre chiffres, aussi, mais particulier…

/5pts

III Binairement quatre dix !

Dans le système **binaire** (base DEUX), on n'utilise que deux chiffres : **0** et **1** !

Chercher comment s'écrit le nombre **10101010** (base **DEUX**) dans le système **décimal.**

Aide : Tu dois trouver un "petit" nombre de trois chiffres.

/5pts

IV Et si on faisait des petites opérations !

On se place à nouveau dans le système **hexadécimal** (base SEİZE).

1°/ Calculer la somme : **E0** + **1** = … ← **E0** est UN nombre !

2°/ Calculer le produit : **F** × **F** = … ← Voir **I**

Aide : Tu dois vraiment remarquer quelque chose de très simple !

/4pts

Amusement : Tape 713 705 sur ta calculette et fais-lui faire demi-tour. ↶

Collisions sur une barre (2/2)

Emmanuel MOREAU, Lycée Davier à Joigny
zim.moreau.mann@wanadoo.fr

Rappelons la situation étudiée dans cet article. À l'instant $t=0$, n fourmis, assimilées à des points mobiles, se déplacent sur une barre, disons d'un mètre. Elles avancent à vitesse constante $-$la même pour toutes$-$ font instantanément demi-tour à chaque fois qu'elles rencontrent une autre fourmi et poursuivent aveuglément jusqu'à ce qu'elles tombent à l'une des extrémités de la barre.
Nous nous sommes donné pour objectif de répondre aux trois questions suivantes :

1. Quel est le nombre moyen de collisions avant que toutes les fourmis ne tombent ?
2. Quel est le nombre moyen de collisions occasionnées par la $k^{ème}$ fourmi avant sa chute ?
3. Quelle est la distance moyenne parcourue par la $k^{ème}$ fourmi avant sa chute ?

La première question a été résolue dans la première partie de cet article : le nombre moyen de collisions est $n(n-1)/8$. La seconde question a été largement abordée : si on note C_k le nombre de collisions occasionnées par la $k^{ème}$ fourmi avant sa chute pour une configuration initiale donnée, nous avons en effet déjà obtenu l'expression de l'espérance de cette variable aléatoire :

$$E(C_k)=k-\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2^n}\left\{(n-2k+1)\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}-k\binom{n}{k}\right\} \qquad (6)$$

Nous en avons déduit $E(C_k)\approx k-\tfrac{1}{2}$. Il nous reste, avant d'aborder la troisième question, à étudier la qualité de cette approximation.

2.6. $E(C_k)$: résultats asymptotiques

La relation (6) nous permet d'écrire $E(C_k)=k-\tfrac{1}{2}-e_k$ avec

$$e_k=\frac{1}{2^n}\left\{k\binom{n}{k}-(n-2k+1)\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}\right\}.$$

Nous voulons prouver que $k\mapsto e_k$ est une fonction positive et croissante si k vérifie $1\le k\le n/2$. Nous transformons pour cela l'expression précédente : $e_k=\dfrac{1}{2^n}\left\{k\binom{n}{k}+2k\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}-(n+1)\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}\right\}$.

Or $(n+1)\binom{n}{i}=(i+1)\binom{n+1}{i+1}$ et $2\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}=2B(n,k-1)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n+1}{i}-\binom{n}{k}$ d'après (5) donc :

$$e_k=\frac{1}{2^n}\left\{k\sum_{i=0}^{k}\binom{n+1}{i}-\sum_{i=0}^{k-1}(i+1)\binom{n+1}{i+1}\right\}$$

$$e_k=\frac{1}{2^n}\left\{k\sum_{i=0}^{k}\binom{n+1}{i}-\sum_{i=0}^{k}i\binom{n+1}{i}\right\}$$

$$e_k=\frac{1}{2^n}\left\{\sum_{i=0}^{k}(k-i)\binom{n+1}{i}\right\}$$

Cette nouvelle expression va nous permettre de tirer aisément les conclusions voulues :

1. $e_k>0$ et donc $E(C_k)<k-½$.
2. La fonction $k\mapsto e_k$ est croissante car la fonction $k\mapsto\sum_{i=0}^{k}(k-i)\binom{n+1}{i}$ est clairement croissante. L'erreur commise dans l'approximation $E(C_k)\approx k-½$ est donc maximale (n'oublions pas la symétrie du problème) pour les "valeurs centrales", c'est-à-dire précisément, si l'on considère seulement les valeurs de k vérifiant $1\le k\le n/2$, pour $k=[n/2]$.
3. Si k n'est pas une "valeur centrale", on peut supposer en utilisant la symétrie du problème que $k\le\alpha n$ avec $\alpha<½$. On a alors d'après un résultat démontré en annexe $(A.2.b)$:

   $$\forall k\le\alpha n\ :\ e_k\le e_{[\alpha n]}=\frac{1}{2^n}\sum_{i\le\alpha n}\left([\alpha n]-i\right)\binom{n+1}{i}\le\frac{\alpha}{(1-2\alpha)^2}\frac{1}{2^n}\binom{n}{[\alpha n]}$$

Nous déduisons également du résultat $(A.2.d)$ démontré en annexe :

$$e_{[\alpha n]}\le\frac{\alpha\beta}{(1-2\alpha)^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^n.$$

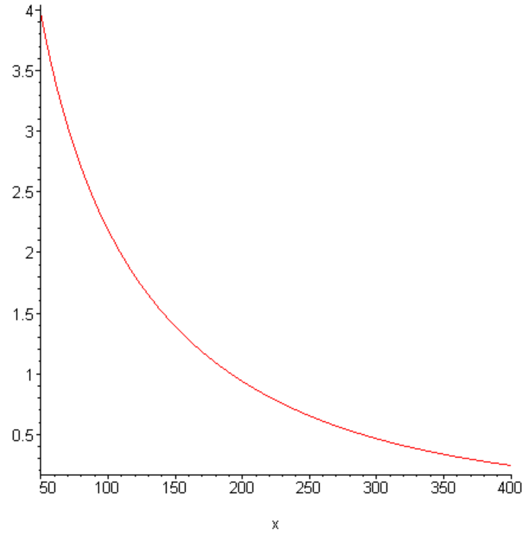
Nous savons de plus d'après les résultats $(A.2.b)$ et $(A.2.c)$ que $e_{[\alpha n]}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{\alpha\beta}{(1-2\alpha)^2}\frac{1}{\delta^{\varepsilon_n}\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^n$, nous disposons donc d'un équivalent de l'erreur commise.

On peut vérifier que si α vérifie $0<\alpha<½$ alors $0<\gamma<2$ et donc $0<\gamma/2<1$. Le terme de droite dans l'inégalité ci-dessus est donc décroissant en n et tend vers 0 exponentiellement vite lorsque $\alpha\neq½$. Ceci nous permet d'obtenir aisément des majorations numériques de l'erreur commise dans l'approximation $E(C_k)\approx k-½$ sur quelques exemples.

Prenons par exemple $\alpha=0.45$, ce qui revient (n'oublions pas la symétrie de notre problème) à exclure 10% environ des valeurs les plus centrales de k dans notre majoration de l'erreur e_k que l'on commet en écrivant $E(C_k)\approx k-½$.

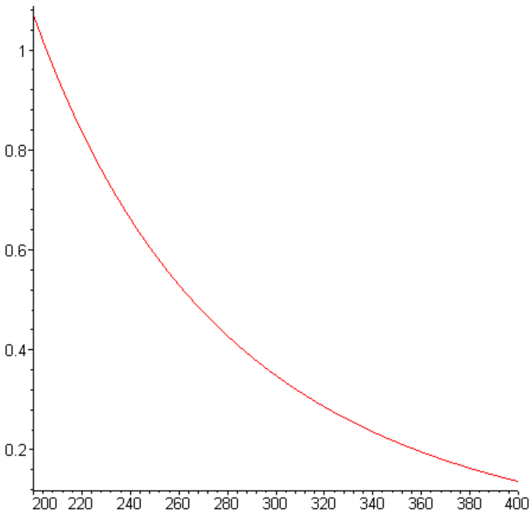
Nous représentons ci-contre la fonction

$$f_\alpha : x \mapsto \frac{\alpha\beta}{(1-2\alpha)^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^x$$



Nous avons par exemple $f_{0.45}(192) = 0.99.. < 1$. Nous en déduisons que si $n \geq 192$ alors l'erreur absolue e_k commise dans l'approximation $E(C_k) \approx k - ½$ est inférieure à 1, les 10% des valeurs les plus centrales de k étant exclues de cette majoration.

Nous pouvons également considérer l'erreur relative : $\dfrac{100 e_{[\alpha n]}}{[\alpha n] - ½ - e_{[\alpha n]}} \leq g_\alpha(n) = \dfrac{100 f_\alpha(n)}{\alpha n - 3/2 - f_\alpha(n)}$



La majoration précédente n'est justifiée que si $f_\alpha(n) < \alpha n - 3/2$, ce qui est vrai pour n assez grand, et l'on peut vérifier qu'alors $n \mapsto g_\alpha(n)$ est une fonction décroissante.
Nous obtenons ainsi $g_{0.45}(206) < 1$ (voir graphique ci-contre où la fonction $g_{0.45}$ est représentée). L'erreur relative commise dans l'approximation $E(C_k) \approx k - ½$ est donc inférieure à 1% si $n \geq 206$ sauf pour les 10% des valeurs les plus centrales de k.
Nous obtenons de la même manière :

$g_{0.475}(612) < 1$: l'erreur relative est donc inférieure à 1% si $n \geq 612$ sauf pour les 5% des valeurs les plus centrales.

$g_{0.495}(6886) < 1$: l'erreur relative est donc inférieure à 1% si $n \geq 6886$ sauf pour les 1% des valeurs les plus centrales.

4. L'erreur maximale est obtenue pour $k = [n/2]$ (dans ce cas nous savons que la majoration précédente n'est pas valable).

Si $n = 2m+1$ est impair, l'erreur maximale est $e_{\max} = e_{m+1}$. D'après la relation (6) on a : $e_{m+1} = \dfrac{1}{2^n}(m+1)\binom{2m+1}{m+1} = \dfrac{1}{2^n}(m+1)\binom{2m+1}{m}$.

Or d'après la formule de Stirling (ou directement d'après le résultat $(A.2.c)$ démontré en annexe) : $\binom{2m+1}{m} \sim \dfrac{2\times 2^n}{\sqrt{2\pi n}}$ donc $e_{\max} = e_{m+1} \sim \dfrac{2(m+1)}{\sqrt{2\pi n}} \sim \sqrt{\dfrac{n}{2\pi}}$.

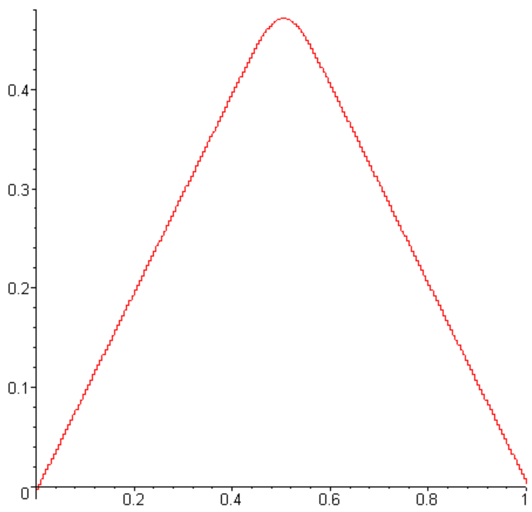
Dans le cas où $n = 2m$ est pair le calcul conduit au même résultat : $e_{\max} = e_m \sim \sqrt{\frac{n}{2\pi}}$

Nous obtenons ainsi un équivalent de l'erreur maximale commise dans l'approximation $E(C_k) \approx k - \frac{1}{2}$, et nous constatons que cette erreur maximale ne tend pas vers 0.
Néanmoins, si pour n fixé nous normalisons la fonction $x \mapsto E(C_{[x]})$ en considérant la fonction $f_n : x \mapsto \frac{1}{n} E(C_{[xn]})$ définie sur [0 ; 1], nous avons pour $x < \frac{1}{2}$:

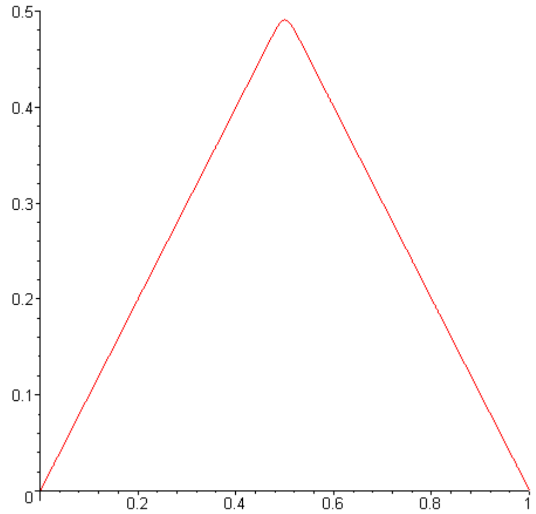
$$f_n(x) = \frac{[xn] - \frac{1}{2}}{n} - \frac{e_{[xn]}}{n} \text{ avec } \lim_{n\to\infty} \frac{[xn] - \frac{1}{2}}{n} = x \text{ et } 0 \le \frac{e_{[xn]}}{n} \le \frac{e_{\max}}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Il y a donc convergence uniforme sur [0 ; 1] des fonctions f_n vers la fonction définie par : $x \to \begin{cases} x & si\ 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1 - x & si\ \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$

Nous donnons ci-dessous les représentations graphiques des fonctions f_{200} et f_{2000}.



$n = 200$



$n = 2000$

3. Distance moyenne parcourue par le $k^{ème}$ mobile avant sa chute.

3.1. Position du problème

Alors que le nombre de collisions du $k^{ème}$ mobile avant sa chute ne dépend que de la liste des directions initiales des n mobiles, la distance qu'il parcourt dépend bien sûr des positions initiales des mobiles. Il nous faut donc expliciter la façon dont sont déterminées ces positions.
En assimilant la barre où se déplacent les mobiles au segment $[0;1]$, nous considérons que :

- À chacune des n fourmis est attribué une position (abscisse) initiale P_i, $1 \le i \le n$, les P_i étant des v.a.i.i.d. de loi uniforme sur $[0;1]$.
- À chacune des n fourmis est attribué une direction initiale d_i, $1 \le i \le n$, les d_i étant des v.a.i.i.d. suivant une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.
- Les $2n$ v.a. $P_1, P_2, ..., P_n, d_1, ..., d_n$ sont indépendantes entre elles.

3.2. Résultats préliminaires

Soit X_k la v.a. égale à l'abscisse de la $k^{ème}$ fourmi rencontrée lorsqu'on parcourt le segment $[0;1]$ dans le sens croissant des abscisses à l'instant initial. Nous avons alors le résultat suivant :

Si X_k est la v.a. égale à l'abscisse initiale de la $k^{ème}$ fourmi, alors

$$E(X_k) = \frac{k}{n+1} \qquad (A.3)$$

Ce résultat, assez intuitif, sera démontré en annexe. Nous aurons également besoin de la formule suivante, relative aux coefficients binomiaux.

Pour tous les entiers k et n vérifiant $0 \le k \le n$: $\displaystyle\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} 2^{-i} = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n+1}{j}$ $\qquad (A.4)$

Cette propriété sera également prouvée en annexe.

3.3. Distance moyenne parcourue par le $k^{ème}$ mobile avant sa chute

Soit D_k la variable aléatoire égale à la distance parcourue par le $k^{ème}$ mobile avant sa chute.
Si nous représentons un mobile initialement orienté vers la gauche (resp. vers la droite) par un 0 (resp. un 1), nous savons que :

Le $k^{ème}$ mobile tombera à gauche si le nombre de 0 est au moins égal à k.

Le $k^{ème}$ mobile tombera à droite dans le cas contraire.

Soit $f(k)$ la somme totale des distances parcourues par le $k^{ème}$ mobile avant sa chute pour toutes les configurations initiales correspondant au premier cas. Par symétrie, la somme des distances parcourues par le $k^{ème}$ mobile avant sa chute pour toutes les autres configurations est $f(n-k+1)$.
Pour calculer $f(k)$, la considération des messages va encore nous être d'un grand secours. Nous remarquons en effet que :

- Au cours du mouvement, toutes les fourmis gardent leurs rangs. La $k^{ème}$ fourmi sera donc la $k^{ème}$ qui tombera à gauche.

- Le $k^{ème}$ zéro (qui existe dans les configurations qui nous intéressent ici), de rang $i_k \geq k$, correspond à la fourmi porteuse du $k^{ème}$ message initialement orienté vers la gauche.
- Les messages sont tous animés d'un mouvement rectiligne et uniforme, le $k^{ème}$ message initialement orienté vers la gauche sera donc le $k^{ème}$ message qui tombera à gauche.
- Toutes les fourmis portant un message, nous en déduisons que la $k^{ème}$ fourmi tombera en portant le $k^{ème}$ message initialement orienté vers la gauche.
- Toutes les fourmis $-$et tous les messages$-$ ayant la même vitesse constante, la distance parcourue par la $k^{ème}$ fourmi avant sa chute est égale à la distance parcourue par le $k^{ème}$ message avant sa chute, qui est l'abscisse initiale X_{i_k} de ce message.
- Le nombre de configurations associées à un couple $(k, i = i_k \geq k)$ fixé est $\binom{i-1}{k-1} 2^{n-i}$ (choix des 0 situés avant i et choix quelconques pour les $n-i$ fourmis après i).

Nous en déduisons, X_i étant donc l'abscisse de la $i^{ème}$ fourmi :

$$f(k) = \sum_{i=k}^{n} X_i \binom{i-1}{k-1} 2^{n-i} .$$

Par symétrie il vient $f(n-k+1) = \sum_{i=n-k+1}^{n} X_i \binom{i-1}{n-k} 2^{n-i}$.

Supposons maintenant que les n fourmis soient initialement disposées sur la barre assimilée au segment $[0;1]$ conformément aux hypothèses faites en 3.1. La v.a. X_i désignant l'abscisse de la $i^{ème}$ fourmi, nous savons que $E(X_i) = \dfrac{i}{n+1}$ et les $2n$ v.a. $P_1, P_2, ..., P_n, d_1, ..., d_n$ étant indépendantes entre elles le théorème de Fubini permet d'écrire :

$$E(D_k) = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{i=k}^{n} E(X_i)\binom{i-1}{k-1} 2^{n-i} + \sum_{i=n-k+1}^{n} E(X_i)\binom{i-1}{n-k} 2^{n-i} \right)$$

$$E(D_k) = \frac{1}{n+1}\left\{ \sum_{i=k}^{n} i\binom{i-1}{k-1} 2^{-i} + \sum_{i=n-k+1}^{n} i\binom{i-1}{n-k} 2^{-i} \right\}$$

$$E(D_k) = \frac{1}{n+1}\left\{ k\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} 2^{-i} + (n-k+1)\sum_{i=n-k+1}^{n} 2^{-i}\binom{i}{n-k+1} \right\} \qquad (7)$$

En utilisant la relation $(A.4)$ nous obtenons :

$$E(D_k)=\frac{1}{n+1}\left\{\frac{k}{2^n}\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n+1}{i}+\frac{n-k+1}{2^n}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n+1}{i}\right\}$$

$$E(D_k)=\frac{1}{2^n(n+1)}\left\{k\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n+1}{i}-k\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n+1}{i}+(n+1)\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n+1}{i}\right\}\text{ si } k\le\frac{n}{2}$$

$$E(D_k)=\frac{1}{2^n(n+1)}\left\{k\left(\sum_{i=k+1}^{n+1}\binom{n+1}{i}-\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n+1}{i}\right)+(n+1)\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n+1}{i}\right\}$$

$$E(D_k)=\frac{1}{2^n(n+1)}\left\{k\left(2^{n+1}-2\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n+1}{i}-\binom{n+1}{k}\right)+(n+1)\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n+1}{i}\right\}$$

D'où finalement :

> Si $k\le\frac{n}{2}$, $E(D_k)=\frac{2k}{n+1}+\frac{1}{2^n(n+1)}\left\{(n-2k+1)\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n+1}{i}-k\binom{n+1}{k}\right\}$ (8)
>
> Si $k>\frac{n}{2}$, $E(D_k)$ est obtenue en utilisant la symétrie du problème :
>
> $E(D_k)=E(D_{n-k+1})$.
>
> Pour une barre de longueur L, ces relations doivent être multipliée par L.

Tirons[1] maintenant les conclusions de ce résultat. Si k vérifie $k\le\alpha n$ avec $\alpha<½$, les propriétés *(A.2a) et (A.2c)* nous permettent d'écrire $E(D_k)=\frac{2k}{n+1}L+o(e^{-cn})$ où la constante $c>0$ ne dépend que de α. On en déduit qu'alors $E(D_k)\approx\frac{2k}{n+1}L$ avec une bonne approximation pour n assez grand. Or $\frac{k}{n+1}L$ est l'abscisse qu'aurait $k^{ème}$ mobile si les mobiles étaient initialement équirépartis sur la barre. Nous pouvons donc énoncer :

> La distance moyenne parcourue par la $k^{ième}$ fourmi avant sa chute est asymptotiquement et approximativement égale à 2 fois la distance qui séparerait initialement cette fourmi du bord le plus proche de la barre si les fourmis avaient été initialement équiréparties.

Il nous reste à évaluer l'erreur maximale (dans ce qui suit nous supposons $k\le n/2$). Ecrivons :

$$E(D_k)=\frac{2k}{n+1}L-e'_k\text{ avec } e'_k=\frac{1}{2^n(n+1)}\left\{k\binom{n+1}{k}-(n-2k+1)\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n+1}{i}\right\}$$

[1] Bien que les méthodes conduisant aux calculs de $E(C_k)$ et $E(D_k)$ soient différentes, nous constatons une étonnante identité formelle entre (6) et (8).

e'_k est ainsi l'erreur commise dans l'approximation $E(D_k) \approx \dfrac{2k}{n+1}L$. Pour montrer que e'_k est une fonction positive et croissante en *k* pour *k* inférieur ou égal à $n/2$, nous transformons cette expression en nous inspirant de ce qui a été fait en 2.6 avec e_k. Nous faisons grâce aux lecteurs de ces calculs un peu techniques mais en tout point semblables à ceux effectués en 2.6. Nous obtenons :

$$e'_k = \frac{1}{2^n(n+1)}\left\{\sum_{i=0}^{k-1}(k+\tfrac{1}{2}-i)\binom{n+2}{i} + \tfrac{1}{2}\binom{n+1}{k-1}\right\}.$$

Or $k \le \dfrac{n}{2}$ donc les fonctions $k \mapsto \sum_{i=0}^{k-1}(k+\tfrac{1}{2}-i)\binom{n+2}{i}$ et $k \mapsto \tfrac{1}{2}\binom{n+1}{k-1}$ sont clairement croissantes en *k*, $k \mapsto e'_k$ est donc une fonction positive et croissante en *k*. Pour tout *k* vérifiant $1 \le k \le n/2$ on a donc $0 \le e'_k \le e'_{[n/2]} = e'_{\max}$.

Si $n = 2m$ est pair on a d'après (8) :

$$e'_{\max} = e'_m = \frac{1}{2^n(n+1)}\left\{m\binom{2m+1}{m} - \sum_{i=0}^{m-1}\binom{2m+1}{i}\right\}$$

$$e'_{\max} = \frac{1}{2^n(n+1)}\left\{(m+1)\binom{2m+1}{m} - \sum_{i=0}^{m}\binom{2m+1}{i}\right\}$$

Or $\sum_{i=0}^{m}\binom{2m+1}{i} = \dfrac{2^{2m+1}}{2} = 2^n$ et d'après $(A.2.c)$: $\binom{2m+1}{m} \sim \dfrac{2\times 2^{2m+1}}{\sqrt{4\pi m}} = \dfrac{4\times 2^n}{\sqrt{2\pi n}}$ donc :

$$(m+1)\binom{2m+1}{m} \sim \frac{4\times 2^n}{\sqrt{2\pi n}}\times\frac{n}{2} = \frac{2\times 2^n\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \text{ et } \sum_{i=0}^{m}\binom{2m+1}{i} = o\left(\frac{2\times 2^n\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}\right)$$

$$\text{d'où } e'_{\max} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \text{ et donc } \lim_{n\to\infty} e'_{\max} = 0$$

Le cas où $n = 2m+1$ est impair conduit au même résultat :

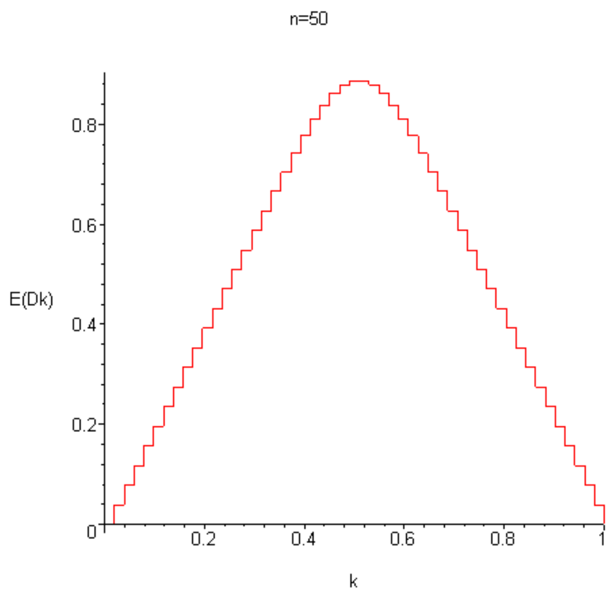
$$0 \le e'_k \le e'_{\max} = e'_m \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}}.$$

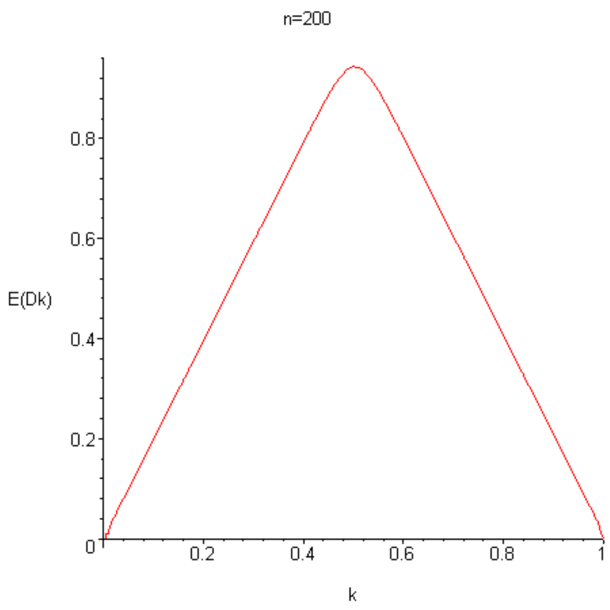
Considérons le mobile de rang initial $k = [\alpha n]$ où α vérifie $0 < \alpha \le \tfrac{1}{2}$. On a :

$$E(D_k) = E(D_{[\alpha n]}) = \frac{2[\alpha n]}{n+1}L - e'_{[\alpha n]}$$

or $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2[\alpha n]}{n+1}L = 2\alpha L$ et d'après ce qui précède $\lim_{n\to\infty} e'_{[\alpha n]} = 0$ (la convergence étant de plus exponentielle lorsque $\alpha < \tfrac{1}{2}$) donc $\lim_{n\to\infty} E(D_{[\alpha n]}) = 2\alpha L$.

De plus pour tout α vérifiant $0 < \alpha \le \tfrac{1}{2}$ on a $e'_{[\alpha n]} \le e'_{\max}$ et $\lim_{n\to\infty} e'_{\max} = 0$, la limite précédente est donc uniforme en α. Il y a donc convergence uniforme sur [0 ; $\tfrac{1}{2}$] de la fonction $\alpha \mapsto E(D_{[\alpha n]})$ vers la fonction $\alpha \mapsto 2\alpha L$, ce que nous illustrons par 2 graphiques :


n=50
E(Dk)
k


n=200
E(Dk)
k

$(A.2.a)$	Si $\alpha < \frac{1}{2}$ alors $\sum_{k \le \alpha n} \binom{n}{k} \le \frac{1-\alpha}{1-2\alpha} \binom{n}{[\alpha n]}$
$(A.2.b)$	Si $\alpha < \frac{1}{2}$ alors $\sum_{k \le \alpha n} \left([\alpha n] - i\right)\binom{n+1}{i} \le \frac{1-\alpha}{(1-2\alpha)^2} \binom{n}{[\alpha n]}$ De plus $\sum_{k \le \alpha n} \left([\alpha n] - i\right)\binom{n+1}{i} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1-\alpha}{(1-2\alpha)^2} \binom{n}{[\alpha n]}$
$(A.2.c)$	Si $0 < \alpha < 1$ alors $\binom{n}{[\alpha n]} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\beta\gamma^n}{\delta^{\varepsilon_n}\sqrt{2\pi n}}$ avec $\beta = \frac{1}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}; \gamma = \frac{1}{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}}; \delta = \frac{1-\alpha}{\alpha}; \varepsilon_n = \alpha n - [\alpha n]$ On peut vérifier que $0 < \gamma < 2$ pour tout α vérifiant $0 < \alpha < 1$, $\alpha \ne \frac{1}{2}$ et que $\delta > 1$ si $\alpha < \frac{1}{2}$.
$(A.2.d)$	Pour tout entier $n \ge 1$ et tout réel α vérifiant $0 < \alpha \le \frac{1}{2}$ on a : $\binom{n}{[\alpha n]} \le \frac{\beta\gamma^n}{\sqrt{2\pi n}}$

<u>Preuve de</u> $(A.2.a)$: $$\sum_{k \le \alpha n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{[\alpha n]}$$

Or $\binom{n}{p-1} = \frac{p}{n-p+1}\binom{n}{p}$ et par itération $\binom{n}{p-2} = \frac{p}{n-p+1}\frac{p-1}{n-p+2}\binom{n}{p}$ etc., donc :

$$\sum_{k \le \alpha n} \binom{n}{k} = \binom{n}{[\alpha n]}\left\{1 + \frac{[\alpha n]}{\left(n - [\alpha n] + 1\right)} + \frac{[\alpha n]\left([\alpha n] - 1\right)}{(n - [\alpha n] + 1)(n - [\alpha n] + 2)} + \ldots + \frac{[\alpha n]!}{(n - [\alpha n] + 1)\ldots n}\right\}$$

Le terme général de la somme entre crochets est :

$$\frac{[\alpha n]\left([\alpha n] - 1\right).....\left([\alpha n] - i + 1\right)}{\left(n - [\alpha n] + 1\right).....\left(n - [\alpha n] + i\right)} \le \frac{\alpha n\left(\alpha n - 1\right).....\left(\alpha n - i + 1\right)}{\left((1-\alpha)n\right).....\left((1-\alpha)n\right)} \le \left(\frac{\alpha n}{(1-\alpha)n}\right)^i = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^i.$$

On en déduit que : $\sum_{k \le \alpha n} \binom{n}{k} \le \binom{n}{[\alpha n]} \sum_{i=0}^{[\alpha n]} q^i$ avec $q = \frac{\alpha}{1-\alpha}$.

De plus $\alpha < \frac{1}{2} \Rightarrow q = \frac{\alpha}{1-\alpha} < 1$ donc $\sum_{k \le \alpha n} \binom{n}{k} \le \binom{n}{[\alpha n]} \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \binom{n}{[\alpha n]} \frac{1}{1-q} = \binom{n}{[\alpha n]} \frac{1-\alpha}{1-2\alpha}$.

La propriété $A.2.a$ est ainsi démontrée.

<u>Preuve de</u> $(A.2.b)$ Nous nous inspirons de la démarche précédente :

$$\sum_{i \le \alpha n} \left([\alpha n] - i\right)\binom{n+1}{i} = \binom{n+1}{[\alpha n]-1} + 2\binom{n+1}{[\alpha n]-2} + 3\binom{n+1}{[\alpha n]-3} + \ldots + [\alpha n]\binom{n+1}{0}$$

$$=\binom{n+1}{[\alpha n]-1}\left\{1+2\frac{[\alpha n]-1}{\left(n-[\alpha n]+3\right)}+3\frac{\left([\alpha n]-1\right)\left([\alpha n]-2\right)}{(n-[\alpha n]+3)(n-[\alpha n]+4)}+...+[\alpha n]\frac{\left([\alpha n]-1\right)!}{(n-[\alpha n]+3)...(n+1)}\right\}$$

$$\leq\binom{n+1}{[\alpha n]-1}\left\{1+2q+3q^2+...+[\alpha n]q^{[\alpha n]-1}\right\} \text{ avec } q=\frac{\alpha}{1-\alpha}<1$$

$$\leq\binom{n+1}{[\alpha n]-1}\sum_{i=0}^{\infty} iq^{i-1}$$

Or $\sum_{i=0}^{\infty} iq^{i-1}=\frac{1}{(1-q)^2}=\left(\frac{1-\alpha}{1-2\alpha}\right)^2$ donc $\sum_{i\leq\alpha n}\left([\alpha n]-i\right)\binom{n+1}{i}\leq\binom{n+1}{[\alpha n]-1}\left(\frac{1-\alpha}{1-2\alpha}\right)^2$.

De plus $\binom{n+1}{[\alpha n]-1}=\frac{[\alpha n](n+1)}{\left(n-[\alpha n]+2\right)\left(n-[\alpha n]+1\right)}\binom{n}{[\alpha n]}\leq\frac{\alpha n}{(1-\alpha)n}\frac{n+1}{(1-\alpha)n+1}\binom{n}{[\alpha n]}$ et :

$$(1-\alpha)n+(1-\alpha)\leq(1-\alpha)n+1\Leftrightarrow(1-\alpha)(n+1)\leq(1-\alpha)n+1\Leftrightarrow\frac{n+1}{(1-\alpha)n+1}\leq\frac{1}{1-\alpha}$$

donc $\binom{n+1}{[\alpha n]-1}\leq\frac{\alpha n}{(1-\alpha)n}\frac{1}{1-\alpha}\binom{n}{[\alpha n]}=\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\binom{n}{[\alpha n]}$ d'où finalement :

$\sum_{i\leq\alpha n}\left([\alpha n]-i\right)\binom{n+1}{i}\leq\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\binom{n}{[\alpha n]}\left(\frac{1-\alpha}{1-2\alpha}\right)^2=\frac{\alpha}{(1-2\alpha)^2}\binom{n}{[\alpha n]}$, ce qui établit la première partie de $(A.2.b)$. Notons $f_i(n)=i\frac{\left([\alpha n]-1\right).....\left([\alpha n]-i+1\right)}{\left(n-[\alpha n]+3\right).....\left(n-[\alpha n]+i+1\right)}$ pour $i\geq 2$ et $f_1(n)=1$

de telle sorte que $\sum_{i\leq\alpha n}\left([\alpha n]-i\right)\binom{n+1}{i}=\binom{n+1}{[\alpha n]-1}\sum_{i=1}^{\infty} f_i(n)$ car pour $i\geq[\alpha n]+1,\ f_i(n)=0$

Pour tous entiers *i* et *n* on a $0\leq f_i(n)\leq iq^{i-1}$ avec $q=\frac{\alpha}{1-\alpha}<1$. La série $\sum iq^{i-1}$ est convergente, la série $\sum f_i(n)$ est donc normalement convergente, on peut donc écrire : $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} f_i(n)=\sum_{i=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty} f_i(n)=\sum_{i=1}^{\infty} iq^{i-1}$ En effet, à i fixé :

$$f_i(n)=i\frac{\left(\frac{[\alpha n]}{n}-\frac{1}{n}\right).....\left(\frac{[\alpha n]}{n}-\frac{i-1}{n}\right)}{\left(1-\frac{[\alpha n]}{n}+\frac{3}{n}\right).....\left(1-\frac{[\alpha n]}{n}+\frac{i+1}{n}\right)} \text{ avec } \frac{[\alpha n]}{n}\underset{n\to\infty}{\sim}\alpha \text{ et}$$

$$\frac{k}{n}\underset{n\to\infty}{\to}0,\ \forall k\in[\![1;i+1]\!]$$

D'où $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} f_i(n)=\frac{1-\alpha}{1-2\alpha}$ ce qui prouve l'équivalence annoncée.

Preuve de $(A.2.c)$: Nous utilisons la formule de Stirling $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.
Posons $\varepsilon_n = \alpha n - [\alpha n]$, on a alors $n - [\alpha n] = (1-\alpha)n + \varepsilon_n$ et donc d'après la formule ci-dessus :

$$\binom{n}{[\alpha n]} \sim \frac{n^n}{(\alpha n - \varepsilon_n)^{\alpha n - \varepsilon_n}((1-\alpha)n+\varepsilon_n)^{(1-\alpha)n+\varepsilon_n}} \frac{e^{-n}}{e^{-\alpha n+\varepsilon_n}e^{-(1-\alpha)n-\varepsilon_n}} \frac{\sqrt{2\pi n}}{\sqrt{2\pi(\alpha n-\varepsilon_n)}\sqrt{2\pi((1-\alpha)n+\varepsilon_n)}}$$

Or $\dfrac{e^{-n}}{e^{-\alpha n+\varepsilon_n}e^{-(1-\alpha)n-\varepsilon_n}} = 1$ et $\dfrac{\sqrt{2\pi n}}{\sqrt{2\pi(\alpha n-\varepsilon_n)}\sqrt{2\pi((1-\alpha)n+\varepsilon_n)}} \sim \dfrac{\beta}{\sqrt{2\pi n}}$

avec $\beta = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}$.

D'autre part :

$$\frac{n^n}{(\alpha n - \varepsilon_n)^{\alpha n - \varepsilon_n}((1-\alpha)n+\varepsilon_n)^{(1-\alpha)n+\varepsilon_n}} = \frac{n^n}{\left(\dfrac{(1-\alpha)n+\varepsilon_n}{\alpha n-\varepsilon_n}\right)^{\varepsilon_n}(\alpha n-\varepsilon_n)^{\alpha n}((1-\alpha)n+\varepsilon_n)^{(1-\alpha)n}}$$

Or $\left(\dfrac{(1-\alpha)n+\varepsilon_n}{\alpha n-\varepsilon_n}\right)^{\varepsilon_n} \sim \left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\varepsilon_n}$ et :

$$(\alpha n-\varepsilon_n)^{\alpha n}((1-\alpha)n+\varepsilon_n)^{(1-\alpha)n} = n^{\alpha n}n^{(1-\alpha)n}\alpha^{\alpha n}(1-\alpha)^{(1-\alpha)n}\left(1-\frac{\varepsilon_n}{\alpha n}\right)^{\alpha n}\left(1+\frac{\varepsilon_n}{(1-\alpha)n}\right)^{(1-\alpha)n}$$

Or $\left(1-\dfrac{\varepsilon_n}{\alpha n}\right)^{\alpha n} = e^{\alpha n \ln\left(1-\frac{\varepsilon_n}{\alpha n}\right)} = e^{-\varepsilon_n+o(1)}$ et $\left(1+\dfrac{\varepsilon_n}{(1-\alpha)n}\right)^{(1-\alpha)n} = e^{+\varepsilon_n+o(1)}$ donc :

$$\left(\frac{(1-\alpha)n+\varepsilon_n}{\alpha n-\varepsilon_n}\right)^{\varepsilon_n}(\alpha n-\varepsilon_n)^{\alpha n}((1-\alpha)n+\varepsilon_n)^{(1-\alpha)n} \sim n^n\gamma^{-n}\delta^{\varepsilon_n}$$

avec $\gamma = \alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1}$ et $\delta = \dfrac{1-\alpha}{\alpha}$.
D'où le résultat $(A.2.c)$.

Preuve de $(A.2.d)$: Nous distinguons deux cas.

- 1^{er} ***cas :*** $\alpha n \geq 1$.

La preuve utilise le "lemme de Robbins" (1955), qui est un raffinement de la formule de Stirling :

Pour tout entier $n \geq 1$: $n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}e^{\frac{1}{12n+1}} < n! < n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}e^{\frac{1}{12n}}$.

On déduit de ce lemme :

$$\binom{n}{p} < \frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}e^{\frac{1}{12n}}}{p^p e^{-p}\sqrt{2\pi p}e^{\frac{1}{12p+1}}(n-p)^{n-p}e^{-n+p}\sqrt{2\pi(n-p)}e^{\frac{1}{12(n-p)+1}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{n^n}{p^p (n-p)^{n-p}} \sqrt{\frac{n}{p(n-p)}} \exp\left(\frac{1}{12n} - \frac{1}{12p+1} - \frac{1}{12(n-p)+1} \right)$$

Or $\frac{1}{12n} - \frac{1}{12p+1} - \frac{1}{12(n-p)+1} = -\frac{144(n^2+p^2-np)+12n-1}{12n(12p+1)(12(n-p)+1)} \le 0$ car

$n \ge 1$ implique $12n-1 \ge 0$ et $n^2 + p^2 - np = \left(n - \frac{p}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} p^2 \ge 0$.

On en déduit que : $\binom{n}{p} < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{n^n}{p^p (n-p)^{n-p}} \sqrt{\frac{n}{p(n-p)}}$.

Appliquons ce résultat à $\binom{n}{[\alpha n]} = \binom{n}{\alpha' n}$ avec $\alpha' = \frac{[\alpha n]}{n} \le \alpha$.

$$\binom{n}{[\alpha n]} = \binom{n}{\alpha' n} < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{n}{(1-\alpha')^{1-\alpha'} n^{1-\alpha'} \alpha'^{\alpha'} n^{\alpha'}} \right)^n \sqrt{\frac{n}{\alpha'(1-\alpha')n^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{1}{(1-\alpha')^{1-\alpha'} \alpha'^{\alpha'}} \right)^n \sqrt{\frac{1}{\alpha'(1-\alpha')}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{1}{f_n(\alpha')} \text{ avec } .$$

Il nous suffit, pour conclure ce 1^er^ cas, de montrer que cette fonction f_n est décroissante car alors :

$\alpha' \le \alpha \Rightarrow f_n(\alpha') \ge f_n(\alpha) \Rightarrow \frac{1}{f_n(\alpha')} \le \frac{1}{f_n(\alpha)}$ car f_n est une fonction positive, d'où $\binom{n}{[\alpha n]} \le \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{1}{f_n(\alpha)}$, ce que nous voulons montrer.

Pour montrer que la fonction $\alpha \mapsto f_n(\alpha)$ est décroissante, nous considérons la fonction $\alpha \mapsto \ln\left(f_n(\alpha) \right) = \left((1-\alpha)n + \tfrac{1}{2} \right) \ln(1-\alpha) + \left(\alpha n + \tfrac{1}{2} \right) \ln(\alpha)$.

Dérivons :

$$\frac{d \ln\left(f_n(\alpha) \right)}{d\alpha} = -n \ln(1-\alpha) - \frac{(1-\alpha)n + \tfrac{1}{2}}{1-\alpha} + n \ln \alpha + \frac{\alpha n + \tfrac{1}{2}}{\alpha}$$
$$= n \ln \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{1}{2} \frac{1-2\alpha}{\alpha(1-\alpha)}$$
$$= n \ln \left(1 - \frac{1-2\alpha}{1-\alpha} \right) + \frac{1}{2} \frac{1-2\alpha}{\alpha(1-\alpha)}$$

Or pour tout $x < 1$ on a $\ln(1-x) \le -x$ donc $\frac{d \ln\left(f_n(\alpha) \right)}{d\alpha} \le \left(-n + \frac{1}{2\alpha} \right) \frac{1-2\alpha}{1-\alpha} \le 0$ car

$0 < \alpha \le \tfrac{1}{2}$ implique $\frac{1-2\alpha}{1-\alpha} \ge 0$ et $\alpha n \ge 1 \Rightarrow -n + \frac{1}{2\alpha} = \frac{1-2\alpha n}{2\alpha} \le 0$.

On en déduit que la fonction $\alpha \mapsto \ln\left(f_n(\alpha)\right)$ est décroissante, la fonction $\alpha \mapsto f_n(\alpha)$ l'est donc également.

❖ $2^{ème}$ ***cas :*** $\alpha n < 1$.

On a alors $\binom{n}{[\alpha n]} = \binom{n}{0} = 1$. Dans ce cas, montrer que $\binom{n}{[\alpha n]} \leq \frac{\beta\gamma^n}{\sqrt{2\pi n}}$ revient donc à montrer que $\frac{\beta\gamma^n}{\sqrt{2\pi n}} \geq 1$ pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel α vérifiant $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$.

Or $\frac{\beta\gamma^n}{\sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{1}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}} \frac{1}{\left((1-\alpha)^{1-\alpha}\right)^n \left(\alpha^\alpha\right)^n} \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{1}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}} \frac{1}{\left(\alpha^\alpha\right)^n}$ car $0 < (1-\alpha)^{1-\alpha} < 1$ donc $\frac{1}{\left((1-\alpha)^{1-\alpha}\right)^n} \geq 1$.

Considérons la fonction $g_\alpha : x \mapsto \sqrt{2\pi x}\left(\alpha^\alpha\right)^x$. On a :

$$\begin{aligned} g_\alpha'(x) &= \frac{\pi}{\sqrt{2\pi x}}\left(\alpha^\alpha\right)^x + \sqrt{2\pi x}\ln\alpha^\alpha\left(\alpha^\alpha\right)^x \\ &= \left(\alpha^\alpha\right)^x \sqrt{2\pi x}\left(\alpha\ln\alpha + \frac{1}{2x}\right) \end{aligned}$$

Sur $]0\ ;\ +\infty[$, g_α atteint donc son maximum en $x = \frac{-1}{2\alpha\ln\alpha}$ et ce maximum vaut :

$$g_{\max} = \sqrt{\frac{-\pi}{\alpha\ln\alpha}} \times \sqrt{\frac{1}{\left(\alpha^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha\ln\alpha}}}} = \sqrt{\frac{-\pi}{e\alpha\ln\alpha}} \text{ car } \left(\alpha^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha\ln\alpha}} = \left(e^{\alpha\ln\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha\ln\alpha}} = e.$$

Or $\frac{\beta\gamma^n}{\sqrt{2\pi n}} \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}} \frac{1}{g_\alpha(n)}$ donc $\frac{\beta\gamma^n}{\sqrt{2\pi n}} \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}} \frac{1}{g_{\max}} = \sqrt{\frac{e}{\pi}}\sqrt{\frac{-\ln\alpha}{1-\alpha}}$.

On peut vérifier $-$en dérivant deux fois$-$ que la fonction $\alpha \mapsto \frac{-\ln\alpha}{1-\alpha}$ est décroissante sur $]0\ ;\ \frac{1}{2}]$, et donc $\frac{\beta\gamma^n}{\sqrt{2\pi n}} \geq \sqrt{\frac{e}{\pi}}\sqrt{\frac{-\ln\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2e\ln 2}{\pi}} = 1.199... > 1$, ce qui termine le $2^{ème}$ cas.

$(A.3)$	Si X_k est la v.a. égale à l'abscisse initiale de la $k^{ème}$ fourmi, alors $$E(X_k) = \frac{k}{n+1}$$

Preuve :

Soit x fixé dans $[0;1]$. Chacune des v.a. P_i, $1 \le i \le n$, étant de loi uniforme sur $[0;1]$, on a $P(P_i \le x) = x$.

Soit N_x la v.a. égale au nombre de fourmis initialement dans $[0;x]$. Les P_i étant i.i.d., N_x suit une loi binomiale de paramètres (n,x). En remarquant que $X_k \le x$ si et seulement si il y a initialement au moins k fourmis dans $[0;x]$, on a en notant F_k la fonction de répartition de X_k :

$$F_k(x) = P(X_k \le x) = P(N_x \ge k) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$$

F_k est ainsi continûment dérivable, X_k a donc une fonction densité f_k et l'on peut calculer $E(X_k)$ à l'aide d'une intégration par parties :

$$E(X_k) = \int_0^1 x f_k(x)dx = \left[xF_k(x)\right]_0^1 - \int_0^1 F_k(x)dx = 1 - \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \int_0^1 x^i (1-x)^{n-i} dx$$

Notons, pour $1 \le i \le n$, $I(n,i) = \binom{n}{i} \int_0^1 x^i (1-x)^{n-i} dx$.

On a $I(n,n) = \int_0^1 x^n dx = \dfrac{1}{n+1}$; et si $i < n$, en intégrant à nouveau par parties :

$$I(n,i) = \binom{n}{i} \left\{ \left[\frac{x^{i+1}}{i+1}(1-x)^{n-i} \right] + \frac{n-i}{i+1} \int_0^1 x^{i+1}(1-x)^{n-i-1} dx \right\}$$

Or $i < n$ donc $\left[\dfrac{x^{i+1}}{i+1}(1-x)^{n-i} \right]_0^1 = 0$ d'où :

$$I(n,i) = \frac{n-i}{i+1} \binom{n}{i} \int_0^1 x^{i+1}(1-x)^{n-(i+1)} dx = \binom{n}{i+1} \int_0^1 x^{i+1}(1-x)^{n-(i+1)} dx = I(n,i+1)$$

Par une récurrence immédiate on en déduit $I(n,i) = \dfrac{1}{n+1}$ pour tout i vérifiant $1 \le i \le n$, d'où : $E(X_k) = 1 - \displaystyle\sum_{i=k}^{n} \frac{1}{n+1} = 1 - (n-k+1)\frac{1}{n+1} = \frac{k}{n+1}$.

Ce qui est bien ce que nous voulions prouver.

$(A.4)$ Pour tous les entiers k et n vérifiant $0 \le k \le n$:

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} 2^{-i} = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n+1}{j}$$

Preuve

On part de l'égalité $\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} x^i$, valable pour tout $x \ne 1$.

En dérivant k fois puis en multipliant par x^k on obtient :

$$x^k\left((1-x^{n+1})(1-x)^{-1}\right)^{(k)}=\sum_{i=k}^{n} i(i-1)\ldots(i-k+1)x^i=k!\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}x^i$$

En utilisant la formule $(fg)^{(k)}=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}f^{(j)}g^{(k-j)}$ avec

$$\begin{cases}\left(1-x^{n+1}\right)^{(j)}=-j!\binom{n+1}{j}x^{n+1-j} si\ 1\leq j\leq n\\ \left((1-x)^{-1}\right)^{(m)}=m!(1-x)^{-m-1}\end{cases}$$

il vient, en mettant à part le terme de la somme associé à $\left(1-x^{n+1}\right)^{(0)}=1-x^{n+1}$:

$$x^k\left\{(1-x^{n+1})k!(1-x)^{-k-1}-\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}j!\binom{n+1}{j}x^{n+1-j}(k-j)!(1-x)^{j-k-1}\right\}=k!\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}x^i$$

D'où en remplaçant x par $\frac{1}{2}$ et en utilisant la définition des coefficients binomiaux :

$$\frac{1}{2^k}\left\{\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)k!2^{k+1}-\sum_{j=1}^{k}\frac{k!\,j!(n+1)!(k-j)!}{j!(k-j)!\,j!(n+1-j)!}2^{k-n}\right\}=k!\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}2^{-i}\ .$$

En divisant le tout par $k!$, en notant que $\frac{k!\,j!(n+1)!(k-j)!}{j!(k-j)!\,j!(n+1-j)!}=k!\frac{(n+1)!}{j!(n+1-j)!}=k!\binom{n+1}{j}$ et en procédant à quelques simplifications on aboutit à : $2-\frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{k}\binom{n+1}{j}=\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}2^{-i}$.

Il reste à remarquer que

$$2-\frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{k}\binom{n+1}{j}=\frac{1}{2^n}\left(2^{n+1}-\sum_{j=0}^{k}\binom{n+1}{j}\right)=\frac{1}{2^n}\sum_{j=k+1}^{n+1}\binom{n+1}{j}=\frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n+1}{j}$$

pour obtenir le résultat souhaité.