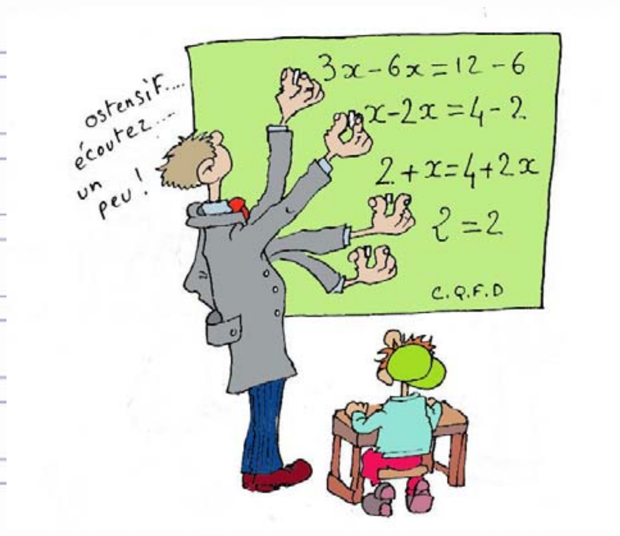
N° 106 – Décembre 2007

Feuille de Vigne

Irem de Dijon

- Un problème en Première S : une construction approchée des polygones réguliers ...
- Un nombre premier de 157 chiffres
- Douce France : le monde entier nous l'envie



Revue Trimestrielle

Issn 0246-5752

Sommaire

Editorial

Une de plus !

Que voilà une façon succincte de présenter ses vœux pour l'année qui s'annonce ! Il s'agit en fait de souhaiter l'année la meilleure à la fois à la Feuille de Vigne et à ses lecteurs, même si celle-ci vieillit quatre fois plus vite que ceux-là, puisque qu'elle avance chaque année de quatre positions dans la série des nombres ; bref ! Que l'on considère ou non l'âge de nos artères, les lecteurs pourront constater que nos ancêtres se portent plutôt bien en lisant ce nouveau numéro…

Certes, le mot « ancêtres » est exagéré, les auteurs des articles de ce numéro 106 étant tous de fringants jeunes gens, mais si l'on voit les choses du bon côté, on ne se plaindra plus qu'il manque des jeunes prêts à s'investir juste pour la gloire ; non, on dira plutôt : qu'est-ce qu'ils ont la pêche ces tous plus ou moins prochainement retraités ! Et cette obsession du renouvellement qui nous parcourait il y a quelques années (quand je faisais encore partie de cette catégorie désuète des « jeunes collègues ») ne nous aura pas permis de trouver effectivement de quoi renouveler les « cadres »… Comme nous sommes ces « cadres », cela tombe bien, nous ne sommes pas encore totalement épuisés. Quand je lis les articles de ce numéro de la Feuille de Vigne, avec l'enthousiasme ou l'indignation qui parcourent ses lignes, je comprends mieux pourquoi, depuis de nombreuses années déjà, des voix s'élèvent pour dénoncer le gâchis des licenciements des aînés et la perte de mémoire qui s'ensuit dans les entreprises. C'est également vrai dans notre milieu : par exemple, peut-on éviter certaines erreurs aux collègues débutants ? Les plus anciens ne peuvent-ils pas permettre d'aborder le métier avec un regard différent ? Ancienne discussion déjà (tu te souviens, Richard ?)
Commençons par Jean Terreran. Vous allez penser : « il n'est pas tout seul, Jean Terreran, ils sont trois à avoir écrit l'article ! » et vous aurez raison, il y a aussi Richard et Hélène, parce qu'à Sens, ils n'aiment pas trop garder leur travail pour eux tout seuls. En voilà des qui partagent avec leurs jeunes collègues ! « Oui, mais c'est quand même les ancêtres qui écrivent les articles ». Dites-donc, il y a pire comme ancêtres, vous exagérez un peu, ce ne sont pas des Cro-Magnons quand même ! N'allez pas jusqu'à dire que les méthodes mises en avant datent du Moyen-âge, l'intérêt qui en est tiré est tout contemporain, demandez donc aux élèves de première. On se prend à penser que si le TER allait plus vite, on manquerait pas mal de choses : vive la lenteur !

Je vois poindre l'irrespect quand je cite l'article de Michel Lafond : mais dites-voir, bande d'insolents, lesquels d'entre vous auront encore une telle frite après avoir pris leur retraite ? J'ose à peine l'écrire, y'a des jeunots dont le cerveau n'est déjà pas loin de l'état décrit par Boris Vian (La Java des bombes atomiques) et qui rêvent des 100 000 dollars ? Cachez-vous sous terre, vermisseaux, s'il y a un Billion Dollar Man parmi nous, c'est bien Maître Lafond !
D'autant qu'arrive pour couronner le tout l'article de Michel Bridenne, qui a trempé sa plume dans le vitriol tout en sachant appuyer là où ça grince. Ah, il ne sort pas souvent de sa réserve, Michel, mais il frappe fort ! Les révoltés qui ont bloqué certains lycées devraient prendre des leçons de rage auprès de lui.

Mais il aurait fallu les cacher, tous ces auteurs, les empêcher d'écrire : on va nous les citer en exemple pour justifier le recul de l'âge de l'horizon-retraite !!

Frédéric Métin (plus que 20 ans, avec les lois actuelles…)

(La prochaine fois, une dissertation sur « J'vais pas attendre 107 ans »)

Agenda

Demi journée du 20 mars 2008 sur les logiciels libres de géométrie

Pour beaucoup de collègues, les logiciels de géométrie se limitent à Cabri-géomètre et à Géoplan. Cependant, depuis quelques années, de nombreux logiciels libres sont apparus. Ces logiciels ont un gros avantage, étant libres, ils sont gratuits et peuvent être distribués légalement aux élèves. Il semble donc utile de faire un recensement de ces logiciels et de voir leurs avantages et leurs inconvénients, compte tenu de l'usage qu'on se propose d'en faire. De façon précise, il s'agit de répondre aux deux questions :

Que permet de faire ce logiciel ?
Qu'attend-on d'un logiciel de géométrie ?

Le 20 mars, je ferai une présentation succincte de quelques-uns de ces logiciels. Bien entendu, je ne me considère pas comme spécialiste de chacun d'eux et je propose à ceux qui connaissent bien un logiciel de géométrie de ne pas hésiter à intervenir. De même, il me paraît souhaitable de connaître vos attentes vis-à-vis de ces logiciels.

C'est pourquoi je vous donne rendez-vous sur le site de l'IREM pour préparer cette demi journée. Vous y trouverez la liste des logiciels déjà recensés. Nous pourrions élaborer ensemble une grille d'évaluation de ces logiciels et bien sûr partager nos expériences si nous les avons déjà utilisés en classe.

Voici mon adresse : mascret@ac-dijon.fr (Précisez bien comme sujet : « journée du 20 mars »)

A bientôt !

Alain Mascret

3EME JOURNEE DE FORMATION : Jeudi 20 mars 2008**,**
Faculté Sciences Mirande, IREM

JOURNEE DE FORMATION organisée en collaboration avec l'IUFM de Bourgogne : ***"L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES ET L'ORDINATEUR : CALCUL FORMEL ET GEOMETRIE DYNAMIQUE", Alain MASCRET,*** Professeur certifié de Mathématiques, Collège La Champagne, Brochon et ***Claude GOMEZ***, Chercheur en Informatique à l'INRIA Rocquencourt, 78153 Le Chesnay.

Objectifs de la formation :

Mise à niveau des connaissances générales concernant les logiciels les plus courants de géométrie dynamique (en particulier les logiciels libres, comme Déclic) et présentation du logiciel de calcul formel Scilab.

Réflexion collective d'ordre didactique sur l'utilisation de ces logiciels en présence d'élèves, au collège, au lycée et à l'école primaire (pour la géométrie particulièrement).

Contenus :

Place du raisonnement, de l'argumentation et de la démonstration dans les textes officiels des programmes et documents d'accompagnement de l'école primaire et de l'enseignement secondaire.

Etude de situations d'apprentissage autour du raisonnement dans différents domaines, exemples de productions d'élèves (procédures et erreurs). Présentation de différents manuels scolaires et de la place qu'ils accordent à ces questions.

Réflexion sur les différents aspects du calcul mental : calcul réfléchi et automatique. Pourquoi, comment, et quand le mettre en place pour favoriser les apprentissages numériques et algébriques à l'école et au collège.

Démarche pédagogique :

- Présentation des problématiques sous forme d'exposés, suivis de débats ;
- Travail en groupes sur l'étude de documents ou de situation suivi d'une restitution collective.

Si vous souhaitez assister à cette journée, prenez contact avec l'IREM

DATES DES RALLYES

Informez-en vos élèves et inscrivez-les

Rallyes Mathématique des collèges de Côte d'Or et Saône et Loire :
vendredi 25 janvier 2008.

Rallye Mathématique de Bourgogne : **mercredi 23 janvier 2008**.

2EME TRIMESTRE 2007-2008
CALENDRIER DES ACTIVITES IREM

Intitulé	*Dates*
2ème journée de formation : "Raisonnement en collège et algorithmique", animé par Vivianne Durand-Guerrier.	17 janvier 2008
Rallye Mathématique de Bourgogne	23 janvier 2008.
Rallyes Mathématique des collèges de Côte d'Or et de Saône et Loire	25 janvier 2008
Réunions du groupe de recherche "Math SES" (de 14 h30 à 16 h 30)	25 janvier 2008 29 février 2008
Réunions du groupe de recherche "Histoire des Maths"	7 février 2008
3ème journée de formation : "*L'enseignement des mathématiques et l'ordinateur : calcul formel et géométrie dynamique",* Alain MASCRET, professeur certifié de Mathématiques, Collège La Champagne, Brochon et Claude *GOMEZ*, Chercheur en Informatique à l'INRIA Rocquencourt, 78153 Le Chesnay.	20 mars 2008

Si vous souhaitez assister à une de ces journées, voir comment le groupe travaille, sur quel thème de recherche, prenez contact avec l'IREM.

STAGES DONT L'IREM EST RESPONSABLE PEDAGOGIQUE

Intitulé	*Dates*
Stage PAF "Individualisation des apprentissages en math"	10 janvier 2008
Stage PAF "Statistiques inférentielles"	31 janvier 2008
Stage PAF "Eclairages historiques sur les probabilités et statistiques" (2ème journée)	26 février 2008
Stage PAF "L'Histoire des maths comme outil didactique : l'âge baroque"	27 février 2008 (Auxerre)
Stage PAF "Des questions ouvertes en math : pourquoi ? comment ?"	6 mars 2008
Stage PAF "L'Histoire des maths comme outil didactique : l'âge baroque"	6 mars 2008 (Chalon)

Jeux et Problèmes

JEU - 56.

Trouver des entiers positifs <u>impairs</u> <u>distincts</u> a_1 ; a_2 ; a_3 - - - a_n tels que :

$$2 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}.$$

PROBLÈME - 56.

Quel est le plus petit entier naturel strictement positif n tel que :

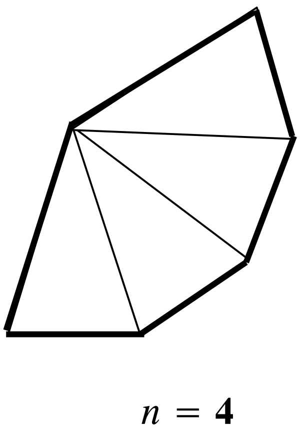
$2\,n = a^2$ $\qquad$ $3\,n = b^3$ $\qquad$ $5\,n = c^5$

où a, b, c sont des entiers naturels ?

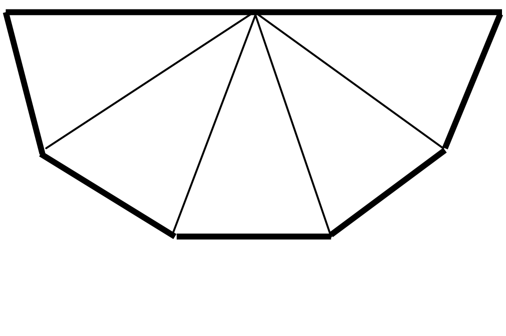
Solutions

JEU - 55

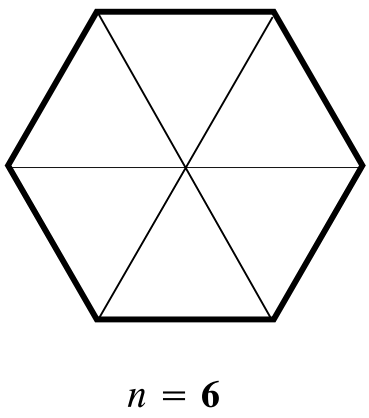
Certains hexagones convexes peuvent être partagés en n triangles égaux :



n = **4**



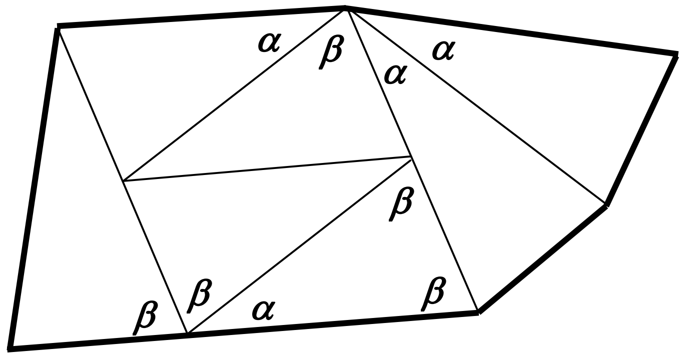
n = **5**



n = **6**

Trouvez un hexagone convexe pouvant être partagé en 7 triangles égaux.

- Voici une possibilité :



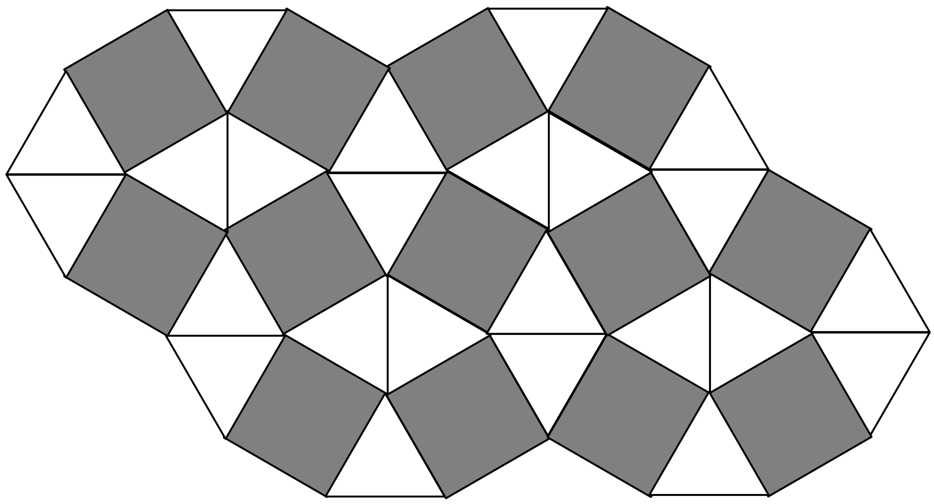
Pour que ça fonctionne, il faut que le grand côté du triangle isocèle mesure le double de la base, et dans ce cas, on calcule facilement que ses angles doivent mesurer :

$$\alpha \approx 30\,° \qquad \text{et} \qquad \beta \approx 75{,}5\,°$$

Les relations $2\beta + \alpha = 180\,°$ et $\beta + 3\alpha \approx 165{,}5\,° < 180\,°$ prouvent que l'hexagone est bien convexe.

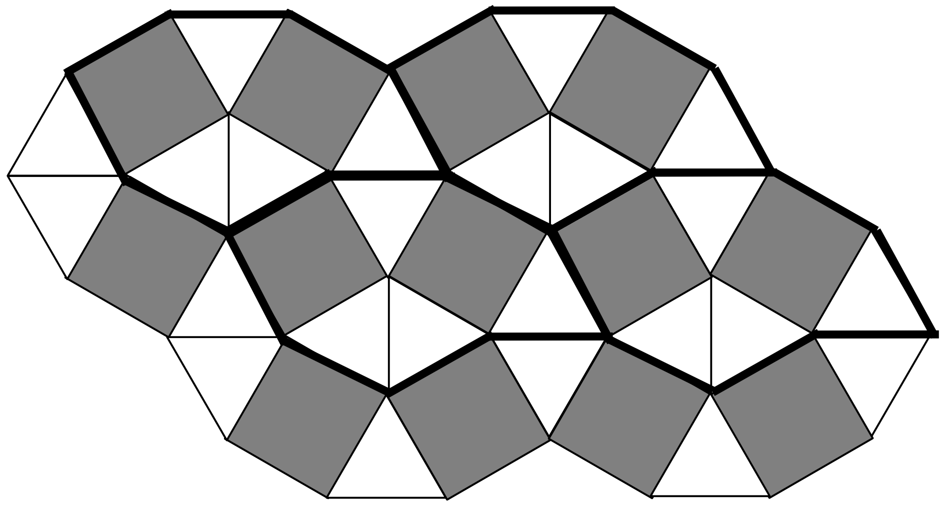
PROBLÈME - 55

Dans le pavage infini du plan dont on a un aperçu ci-dessous, démontrer que les carrés occupent environ 54% du terrain.



Solution :

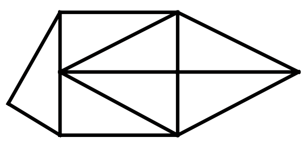
L'octogone en trait gras ci dessous, peut être utilisé comme pavé périodique.
Il contient deux carrés et quatre triangles équilatéraux (hypothèse implicite). Si le côté commun est pris comme unité, l'aire des deux carrés est 2 et celle des quatre triangles est $4 \times \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \cong 1{,}732$.
La proportion de l'aire occupée par les carrés est donc de
$\dfrac{2}{2+\sqrt{3}} = 2\ \left(2-\sqrt{3}\right) \approx\ 0{,}54$.



Voici des solutions originales de Alain Guillon (collège Abel Minard, Tonnerre)

Jeu 55 :

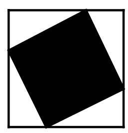
On peut répondre à l'exigence avec 7 triangles rectangles de côtés (1 ; 2 ; $\sqrt{3}$) et en les assemblant ainsi (croquis)



Mais la recherche exhaustive n'a pas été faite.

Problème 55 :

Si on suppose que les triangles blancs du pavage sont équilatéraux (ce qui n'est pas nécessairement le cas pour un tel pavage), il est aisé de montrer que le motif de base est le suivant, où les triangles rectangles sont des moitiés de



triangles équilatéraux du pavage.

Si on pose a = côté du carré, l'aire du carré noir est évidemment de a^2, et la somme des aires des 4 triangles rectangles est le double de celle d'un triangle équilatéral, soit $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Le rapport $\frac{\text{aire noire}}{\text{aire blanche}}$ est donc de $\frac{2}{\sqrt{3}}$, et la proportion cherchée est de $\frac{2}{2+\sqrt{3}} \approx 0{,}536 \approx 54\ \%$.

On pourrait généraliser ce problème au cas où les triangles sont isocèles, mais pas équilatéraux, et étudier une intéressante fonction.

Michel PLATEY (Lycée H. Fontaine) a envoyé une solution au jeu 55 (La même que celle d'Alain Guillon) et une solution au problème 55 (la même que la mienne).

Un problème en Première S : une construction approchée des polygones réguliers

Hélène Carlier, Richard Dalin et Jean Terreran. Lycée C. et R. Janot de Sens

Mots clés : *Géométrie - règle et compas - polygone - constructions - droites et cercles - équations - second degré - approximations - erreurs - charpentiers - chaudronniers.*

En première S, nos devoirs à la maison sont des devoirs de « recherche », c'est-à-dire des sujets qui permettent d'étudier une situation non « standard », issue parfois d'un problème concret. Les élèves ont deux semaines pour le faire, ils ont la possibilité de demander des aides, notamment le mercredi après-midi au lycée où une permanence est assurée par des collègues.
C'est le cas de ce problème : l'idée nous a été fournie lors du stage « Histoire des maths comme outil didactique » de Frédéric Métin et Patrick Guyot par Alain Guillon, professeur au collège Abel Minard de Tonnerre.
Il s'agit d'une des nombreuses méthodes de constructions approchées de polygones réguliers utilisées sur les chantiers de construction. Celle-ci est donnée par Cédric Menneroud, compagnon charpentier. Elle semble être encore utilisée en chaudronnerie.
Nous aimons beaucoup ce genre de problème, parfois trop, car certaines situations peuvent vite devenir très complexes pour les élèves, et le but n'est pas de gâcher leur plaisir.
L'énoncé qui suit a été mis au point dans le train du retour de Dijon. Il met en œuvre la partie du programme « applications du produit scalaires : droites et cercles. »
Il a été relativement apprécié des élèves, même si certains n'aiment décidément pas les calculs avec $\sqrt{3}$. Les justifications pour n = 2 sont perturbantes pour quelques élèves qui préfèrent l' « algèbre appliqué à la géométrie ». Pour n = 3, certains ont du mal à admettre que l'égalité des valeurs approchées fournies par la calculatrice ne suffit pas.
Si le trajet avait été un peu plus long, où le TER moins rapide, nous aurions pu réfléchir davantage à la pertinence de certaines questions :

- fallait-il tant insister sur les cas n = 3, n = 4 et n = 6 ?
- le cas n = 4 conduit à une racine double pour l'équation du second degré, l'outil géométrique est-il plus intéressant ?

- Aurait-il fallu donner la construction exacte pour le pentagone pour « voir » ou ne pas « voir » la différence entre les deux constructions.
- Aurait-il été préférable d'étudier le cas n = 7 pour lequel il n'existe pas de construction exacte ?
- Aurait-il mieux valu faire le calcul d'erreur sur le dernier côté du polygone parce que c'est là que, par reports aux compas, les erreurs s'ajoutent.

Ce type de problème se rencontre fréquemment (construction du pentagone de Dürer avec un compas à ouverture fixe, trisecteur, construction géométrique des solutions d'une équation du second degré, ...), il intéresse en général les élèves, même s'il s'en trouve toujours un pour rester persuadé que le rapporteur est le plus performant et le plus rigoureux pour résoudre ce genre de problème.

ÉNONCÉ

Question préliminaire

On considère un polygone régulier à *n* côtés $A_0A_1A_2A_3.....A_n$.
Il est inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R.
On considère le triangle OA_iA_{i+1}.

Exprimer une mesure de l'angle $\widehat{A_iOA_{i+1}}$ en fonction de *n*.

On appelle H_i le projeté orthogonal de O sur le côté $[A_iA_{i+1}]$.

Montrer que le côté d'un polygone régulier a *n* côtés a pour longueur 2R sin $\left(\frac{180}{n}\right)$.

Le but de cet exercice est de tester une méthode de construction de polygones réguliers utilisée par la corporation des charpentiers (*)

Principe de construction d'un polygone à n côtés

On trace un cercle et un diamètre [AB].
On construit un triangle équilatéral ABC.
On partage le diamètre [AB] en n segments égaux $[AA_1],[A_1A_2],[A_2A_3]$, etc.
On trace la droite (CA_2), elle coupe le cercle en un point D, C et D étant situés de part et d'autre du diamètre [AB].
Le segment [AD] est le côté du polygone cherché.

1° Construire un carré avec cette méthode.
La construction est-elle exacte ? Justifier la réponse par une ou deux phrases claires.

2° **a.** Construire un triangle équilatéral avec cette méthode.

b. On considère le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, où O est le centre du cercle, $\vec{i} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{j}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OC}$ et de même sens que $\overrightarrow{OC}$.
Donner les coordonnées des points A, B, C, A_2 dans ce repère ;
Donner une équation de la droite (C A_2) et une équation du cercle.
Déterminer les coordonnées du point D.
Calculer la longueur du côté [AD] ainsi obtenu.

c. La construction est-elle exacte ? Justifier la réponse par un calcul.

3° **a.** Construire un hexagone régulier avec cette méthode.

b. En utilisant une symétrie et la figure précédente, justifier l'exactitude de la construction.

4° **a.** Construire un pentagone régulier avec cette méthode.

b. On reprend le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ défini dans la question **2° b**.
Donner les coordonnées des points A, B, C, A_2 dans ce repère ;
Donner une équation de la droite $(C A_2)$ et une équation du cercle.
Déterminer les coordonnées du point D (On donnera des valeurs approchées à 10^{-5} près).
Calculer une valeur approchée, à 10^{-5} près, de la longueur du côté [AD] ainsi obtenu.

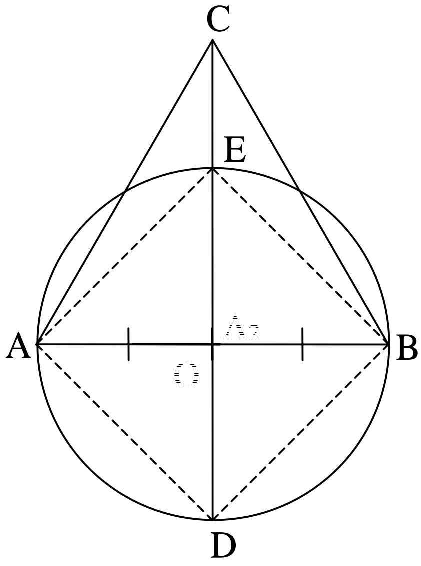
c. En déduire que la méthode de construction proposée n'est pas exacte.

d. Pour un rayon 1 m :

- vérifier que l'erreur commise est inférieure au mm ;
- calculer l'erreur relative (On exprimera le résultat en pourcentage.)

CORRIGÉ

Question préliminaire



$$\widehat{A_iOA_{i+1}} = \frac{360}{n}$$

$$A_iA_{i+1} = 2A_iH = 2R\sin\widehat{A_IOH} = 2R\sin\frac{360}{2n} = 2R\sin\frac{180}{n}.$$

1° A_2 = O, milieu du segment [AB], donc (CA_2) est la médiatrice de [AB] et ADBE a ses diagonales perpendiculaires, de même longueur et qui se coupent en leur milieu,
La construction donne donc exactement un carré.

2° b. A (-1 ; 0), B (1 ; 0), C (0 ; $\sqrt{3}$)

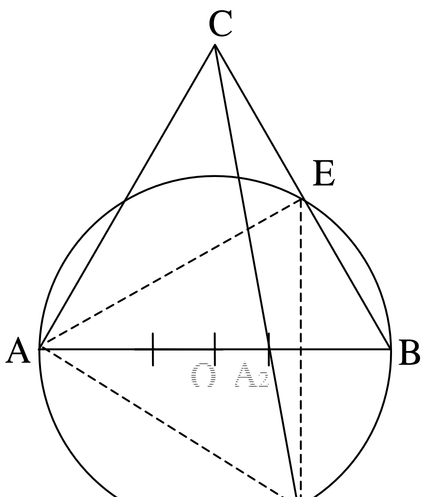
$$\overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA_2} = \left(-1 + 2\left(\frac{2}{3}\right)\right)\vec{i} = \frac{1}{3}\vec{i} : A_2\left(\frac{1}{3};0\right).$$

(CA_2) a une équation de la forme y = ax + b.
C est sur (CA_2), donc b = $\sqrt{3}$.

A_2 est sur (CA_2), donc $0 = \frac{a}{3} + \sqrt{3}$ et a = $-3\sqrt{3}$.

D'où (CA_2) a pour équation $y = -3\sqrt{3x} + \sqrt{3}$.
Le cercle a pour équation : $x^2 + y^2 = 1$.
Puisque le point D est sur le cercle et sur la droite, ses coordonnées vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} y = -3\sqrt{3x} + \sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}.$$



En reportant la valeur de y dans l'équation du cercle, on obtient l'équation du second degré d'inconnue x :
$x^2 + (-3\sqrt{3}x + \sqrt{3})^2 = 1$, soit $28x^2 - 18x + 2 = 0$.

$\Delta = 100$, $x' = \frac{1}{7}$ et $x'' = \frac{1}{2}$.

On en déduit $y' = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ et $y'' = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Or $y < 0$, donc les coordonnées de D sont $(\frac{1}{2} ; -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Alors AD $= \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$.

c. D'après le préliminaire, AD $= 2 \times 1 \times \sin \frac{180}{3} = \sqrt{3}$.

Conclusion : La construction est exacte.

3° Pour cette construction, on obtient A_2, et par suite D, symétriques par rapport à la droite (OC) des points A_2 et D obtenus pour $n = 3$. On en déduit les coordonnées de D $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et AD $= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$. Et le côté de l'hexagone régulier est égal à $2 \times 1 \times \sin \frac{180}{6} = 1$.

La construction est encore exacte.

4° b. A (-1 ; 0), B (1 ; 0), C (0 ; $\sqrt{3}$)

$$\overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA_2} = \left(-1 + 2\left(\frac{2}{5}\right)\right)\vec{i} = -\frac{1}{5}\vec{i} : A_2\left(-\frac{1}{5}; 0\right).$$

En procédant comme en **3°**, on obtient pour équation de la droite (CA_2) :
$y = 5\sqrt{3}x + \sqrt{3}$.

Les coordonnées de D vérifient l'équation de la droite et du cercle, son abscisse est solution de l'équation du second degré : $76x^2 + 30x + 2 = 0$.

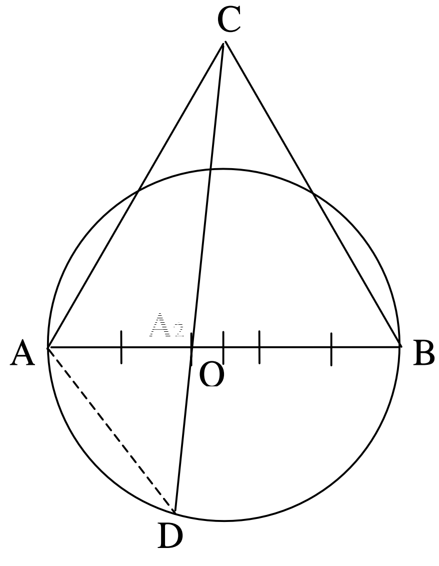
On obtient $x' = \frac{-15 - \sqrt{73}}{76} \approx -0{,}30979$

et $x'' = \frac{-15 + \sqrt{73}}{76} \approx -0{,}0849$.

D'où $y' \approx -0{,}95081$ et $y'' \approx 0{,}99638$.

D a une ordonnée négative, ses coordonnées sont donc approximativement (-0,30979 ; -0,9581).

Alors AD $\approx$ 1,17491.



c. Tandis que $2 \times 1 \times \sin \frac{180}{5} \approx 1{,}17557$.

La construction est donc approchée.

d. 1,17557 – 1,17491 = 0,00066 < 0,001.

L'erreur commise est bien inférieure au mm.

e. $\frac{1{,}17557 - 1{,}17491}{1{,}17557} \approx 0{,}00056$, soit environ 0,06 %

Un nombre premier de 157 chiffres

Michel Lafond,

Mots clés : *Nombres premiers, Mersenne, calculatrices.*

Voici ce nombre :
M = **68 64797 66013 06097 14981 90079 90813 93217 26943 53001 43305 40939 44634 59185 54318 33976 56052 12255 96406 61454 55497 72963 11391 48085 80371 21987 99971 66438 12574 02829 11150 57151**.
[*les tranches de 5 chiffres sont séparées*]

Si vous lisez la presse scientifique (Pour la Science, Science et Vie etc.), vous avez remarqué que tous les ans environ, on bat le record du plus grand nombre premier connu.

Le dernier record (cet article a été écrit en avril 2007) date de septembre 2006, et le nombre en question : $2^{32582657}-1$ possède plus de 9 millions de chiffres.

Lorsque les 10 millions de chiffres seront atteints, ce qui ne saurait tarder, un prix de 100 000 dollars sera décerné par "Electronic Frontier Foundation".

Quand on raconte autour de soi qu'on vient de trouver un nombre premier à plus de 9 millions de chiffres, 99% des gens rétorquent "À quoi ça sert ?" C'est exactement la même chose avec les 10 milliards de décimales de π. Quand on me demande "A quoi ça sert ?" je réponds en général "À la même chose que la course cycliste Paris Roubaix".

Ces résultats ne s'obtiennent qu'à l'aide de très beaux théorèmes de la théorie des nombres (et d'ordinateurs surpuissants qui sont d'ailleurs testés à cette occasion), et quand vous aurez lu cet article, vous verrez comment les spécialistes de la théorie des nombres utilisent des outils taillés sur mesure pour arriver à leurs fins. C'est très instructif et fascinant. Bien entendu il faut se remuer les cellules grises, et c'est plus fatigant que de regarder à la télé des gens rouler à vélo sur des pavés.

1. EXAMEN DU MONSTRE

Vous avez reconnu M, il s'agit du nombre de Mersenne $M_{521} = 2^{521}-1$.
Rappel : le $p^{\text{ième}}$ nombre de Mersenne est par définition $M_p = 2^p-1$.

Le fait que M_{521} soit un nombre premier n'est pas particulièrement étonnant, puisqu'on connaît aujourd'hui (avril 2007) 44 nombres de Mersenne premiers, à

savoir tous les M_p pour les valeurs de p appartenant à [2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, **521**, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 19937, 21701, 23209, 44497, 86243, 110503, 132049, 216091, 756839, 859433, 1257787, 1398269, 2976221, 3021377, 6972593, 13466917, 20996011, 24036583, 25964951, 30402457, 32582657].
Le dernier et le plus grand : $M_{32582657}$ a été découvert en septembre 2006 et c'est le record actuel.
La course ne s'arrêtera jamais ; d'abord un record est fait pour être battu ; de plus, on ne sait pas s'il existe ou non une infinité de nombres de Mersenne premiers. Donc, cela ne peut qu'être intéressant de dresser la liste des premiers termes pour voir… Il y a des conjectures sur la suite des "bons exposants" : [2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31…] qui semblent être approximativement en suite géométrique.
Notre héros, l'entier $M = M_{521}$ lui, a été découvert par un nommé ROBINSON en 1952 à l'aide d'un calculateur SWAC.
Ce qui est étonnant et qui fait l'objet de cet article est ceci :

1) Nous allons <u>démontrer</u> la primarité de M.
2) Le niveau de la démonstration est BAC +1.
3) Les calculs nécessaires peuvent être entièrement réalisés sur une <u>simple calculatrice</u> TI 92 en moins de trois minutes.

2. *LA PREHISTOIRE*

Du temps de l'âge de Pierre (Pierre Fermat bien sûr), pour tester la primarité de M, on n'avait pas tellement le choix, il fallait tester tous les diviseurs jusqu'à la racine carrée de M. Bien entendu, seuls les diviseurs premiers sont à tester et, par ailleurs, les diviseurs premiers q éventuels du nombre du Mersenne $M_p = 2^p - 1$ lorsque p est premier (c'est le cas de 521) ne peuvent être que de la forme $2kp+1$ et congrus à 1 ou 7 modulo 8. Ce dernier résultat était connu de Legendre qui l'a démontré autour de 1800.
Exemples :

$2^{11}-1 = 2047 = 23 \times 89$ deux facteurs de la forme $22k + 1$.

$2^{29}-1 = 536870911 = 233 \times 1103 \times 2089$ trois facteurs de la forme $58k + 1$.

Mais même si on connaissait la liste des nombres premiers jusqu'à la racine carrée de M (il y en a de l'ordre de 10^{76}) et qu'on ne teste que ceux de la forme $2 \times 521k + 1$ et congrus à 1 ou 7 modulo 8 (il en reste de l'ordre de 10^{73}), avec une batterie de 10^{15} ordinateurs testant chacun 10^{15} diviseurs par seconde, il faudrait de l'ordre de 10^{33} siècles pour en venir à bout ! Oublions cette idée farfelue !
Nous allons ramener ces 10^{33} siècles à 3 minutes en utilisant le test de Lucas-Lehmer dont la démonstration date d'environ 1930.
Comme le microprocesseur a été fabriqué vers 1950, on comprend pourquoi, jusque là, on ne connaissait que 12 nombres premiers de Mersenne, le plus grand étant

$M_{127}=2^{127}-1=170141183460469231731687303715884105727$ et pourquoi les découvertes se multiplièrent par la suite.

3. *L'ENONCE DU TEST DE LUCAS-LEHMER EST*

> Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 3, et soit la suite L définie par :
>
> $$L_1=4 \quad \text{et} \quad \text{pour } n\geq 2 : L_n=L_{n-1}^2-2$$
>
> Alors : M_p est premier si et seulement si L_{p-1} est multiple de M_p.

Exemples : $p=5$ $M_5=2^5-1=31$.
La suite L calculée modulo 31, est ici :
$L_1=4$ $L_2=4^2-2=14$ $L_3=14^2-2=194\equiv 8 \bmod 31$ $L_4=8^2-2=62\equiv 0 \bmod 31$
D'après le test, $L_4=L_{5-1}$ étant multiple de $M_5=31$, il s'ensuit que 31 est premier.

Par contre, si on essaie $p=11$ $M_{11}=2^{11}-1=2047$ alors, la suite L est :
$L_1=4$ $L_2=4^2-2=14$ $L_3=14^2-2=194$
$L_4=194^2-2=37634\equiv 788 \bmod 2047$ $L_5=788^2-2=620942\equiv 701 \bmod 2047$
$L_6=701^2-2=491399\equiv 119 \bmod 2047$ $L_7=119^2-2=14159\equiv 1877 \bmod 2047$
$L_8=1877^2-2=3523127\equiv 240 \bmod 2047$ $L_9=240^2-2=27598\equiv 282 \bmod 2047$
$L_{10}=282^2-2=79522\equiv 1736 \bmod 2047$
$L_{10}=L_{11-1}$ n'étant pas multiple de $M_{11}=2047$, il s'ensuit que 2047 n'est pas premier.

Remarque : lorsque l'exposant n'est pas premier, le problème de la primarité de M_p ne se pose pas puisque $M_{qr}=2^{qr}-1$ est divisible par 2^q-1 et par 2^r-1.

4. *DEMONSTRATION DE L'ENONCE DU TEST*

On n'a pas besoin ici de démontrer complètement le test, tout ce qu'il nous faut est la démonstration de la partie directe : Si L_{p-1} est multiple de M_p alors M_p est premier.

> Pour cela, on part de l'hypothèse :
>
> p un nombre premier supérieur ou égal à 3.
>
> La suite L est définie par : $L_1=4$ et pour $n\geq 2 : L_n=L_{n-1}^2-2$.
>
> L_{p-1} est multiple de M_p. Et il faut démontrer que M_p est premier.

Nous raisonnerons par l'absurde :
Si M_p n'était pas premier, il existerait un diviseur premier d de M_p inférieur à la racine carrée de M_p : $1<d\leq\sqrt{M_p}$ et d divise M_p.

Soit **K** le corps des entiers modulo d. [On s'intéresse aux multiples de d, et comme on a impérativement besoin d'une structure de corps commutatif par la suite, il est naturel de faire intervenir K]. Selon l'usage, on fera l'abus de notation consistant à noter 0, 1, 2, …, d–1 les éléments de K.
Le nombre 3 (de K) va jouer un rôle spécial, et il faudra distinguer deux cas selon que dans K, 3 est ou non un carré.

> Exemples :
> Si $d=7$, dans K qu'on note abusivement [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6] les carrés (modulo 7) sont respectivement [0, 1, 4, 2, 2, 4, 1] et on constate que 3 n'est pas un carré.
> Alors que si $p=11$, on a $5^2=25\equiv3$ (modulo 11) et cette fois 3 est un carré.

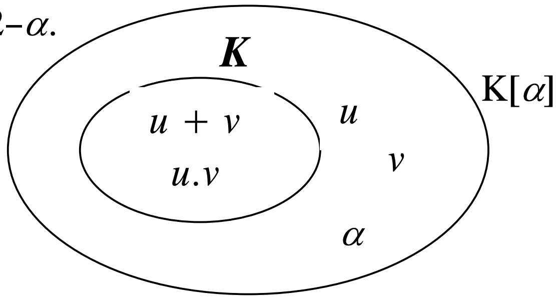
1. Premier cas : 3 n'est pas un carré dans K

Nous allons procéder à une extension de corps (de la même manière qu'on étend le corps des réels R en posant $i^2 = -1$ pour obtenir le corps des complexes)
Soit α un élément "imaginaire" tel que $\alpha^2 = 3$.
Si vous pensez en ce moment à $\sqrt{3} \approx 1{,}732$, chassez vite cette mauvaise pensée.
D'après notre hypothèse, α n'est pas dans K sans quoi $3=\alpha^2$ serait un carré dans K, et on étend K en définissant l'ensemble qu'on note K[α] des "nombres" de la forme $a+b\alpha$ avec a et b quelconques dans K.
La démonstration de la structure de corps de K[α] ne pose pas de problème, sauf lorsqu'il s'agit de démontrer que tout élément non nul de K[α] possède un inverse.

> La voici : Soit $a+b\alpha$ non nul de K[α].
> On cherche dans K[α] un élément $x+y\alpha$ tel que $(a+b\alpha)\,(x+y\alpha)=1$.
> Cela équivaut au système (S) $\begin{cases} ax+3by=1 \\ ay+bx=0 \end{cases}$
> $a+b\alpha$ est non nul donc <u>a et b ne sont pas tous deux nuls</u>.
> Si a est non nul, il est inversible dans K, et alors la seconde équation de (S) donne $y=-ba^{-1}x$. Si on reporte dans la première équation, on obtient
> $$ax+3b(-b\,a^{-1}x)=1 \text{ ou encore } x(a^2-3b^2)a^{-1}=1.$$
> Or a^2-3b^2 n'est pas nul, sinon $3=a^2\,b^{-2}=(a\,b^{-1})^2$ serait un carré dans K.
> Donc $x=a\,(a^2-3b^2)^{-1}$ et $y=-b\,a^{-1}x$ définissent l'inverse unique $x+y\alpha$ de $a+b\alpha$.
> [On ferait une démonstration analogue si c'est b qui n'est pas nul]

Selon l'usage, on identifie K avec la partie de K[α] pour laquelle $b=0$, et on peut donc dire que K[α] contient K.

Dans K[α] posons $u=2+\alpha$ et $v=2-\alpha$.



α, u, v ne sont là que parce qu'ils vérifient les deux égalités ci dessous dont l'utilité apparaîtra bientôt : $u+v=4$ et $u.\ v=(2+\alpha).(2-\alpha)=4-\alpha^2=4-3=1$.

C'est le moment d'utiliser nos hypothèses : L_{p-1} est multiple de M_p et M_p admet le diviseur $d>1$.

Donc L_{p-1} est multiple de d et, par conséquent, si on reconsidère la suite L, mais modulo d, sans rien changer à sa définition et en gardant la même lettre pour simplifier (encore un abus de notation), on aura $L_{p-1}=0$ dans K (entiers modulo d).

Posons donc <u>dans K</u>, $L_1=4$ et pour $n\geq 2$: $L_n=L_{n-1}^2-2$.

La suite (L_i) est toute entière dans K puisque les deux opérations du corps sont internes. Donc tout se passe dans K[α]. Les calculs ci-dessous montrent bien pourquoi il nous fallait un corps commutatif, et deux éléments u, v tels que $u+v=4$ et $u.v=1$. [u, v sont inverses et $v=u^{-1}$].

Comme on est dans un corps commutatif, les règles ou conventions usuelles sur les puissances s'appliquent, comme par exemple $x^0=1$; $u^4.v^4=(u.v)^4=1^4=1$; $(x^m)^n=x^{mn}$, etc.

$L_1=4=u+v$ implique $L_2=L_1^2-2=(u+v)^2-2=u^2+v^2+2u.v-2=\ u^2\ +\ v^2$.

puis $L_3=L_2^2-2=(u^2+v^2)^2-2=u^4+v^4+2u^2.v^2-2=\ u^4\ +\ v^4$.

puis $L_4=L_3^2-2=(u^4+v^4)^2-2=u^8+v^8+2u^4.v^4-2=\ u^8\ +\ v^8$.

Une récurrence immédiate montre que pour tout entier naturel n on a :

$$L_n=u^{2^{n-2}}+v^{2^{n-2}}$$

Mais $v=u^{-1}$ implique :

$$L_{p-1}=u^{2^{p-2}}+v^{2^{p-2}}=u^{2^{p-2}}\left(1+u^{-2^{p-2}}v^{2^{p-2}}\right)=u^{2^{p-2}}\left(1+v^{2^{p-2}}v^{2^{p-2}}\right)=u^{2^{p-2}}\left(1+v^{2^{p-1}}\right)$$

Puisque $L_{p-1}=0$ dans K, il s'ensuit que $u^{2^{p-2}}\left(1+v^{2^{p-1}}\right)=0$. [Le 0 de K].

L'un des deux facteurs et nul, et ce n'est pas $u^{2^{p-2}}$ car si on avait $u=2+\alpha=0$, on aurait $\alpha=-2$ et α serait dans K.

Le second facteur est donc nul, ou encore $1+v^{2^{p-1}}=0$ soit $v^{2^{p-1}}=-1$ (on est toujours dans K[α]).

En élevant au carré, on obtient $v^{2^p}=1$.

Il va nous falloir ici définir <u>l'ordre d'un élément dans un groupe</u> et énoncer une de ses propriétés fondamentales.

Dans un groupe multiplicatif fini G, commutatif, de neutre 1, pour tout élément x on définit l'ordre de x comme le plus petit entier w strictement positif tel que $x^w=1$.

> Existence de w : soit m le cardinal (le nombre d'éléments) de G.
> Notons g_1, g_2 … g_m les éléments de G.
> L'application $g \to xg$ est une injection de G dans G donc une bijection de G dans G (G est fini). Cette application est une permutation de G.
> Cela entraîne $\prod_{i=1}^{m} g_i = \prod_{i=1}^{m} (xg_i)$ puisque ce sont les mêmes éléments qu'on multiplie à l'ordre près. Ainsi $\prod_{i=1}^{m} g_i = x^m \prod_{i=1}^{m} g_i$ d'où $x^m = 1$.
> Propriété de l'ordre : Si, maintenant x est d'ordre w, soit z un entier naturel tel que $x^z=1$. Posons $z=qw+r$ avec $r<w$ (division euclidienne).
> On a : $1 = x^z = x^{qw+r} = (x^w)^q x^r = x^r$.
> Donc $r=0$, sinon w ne serait pas le plus petit entier strictement positif tel que $x^w=1$.

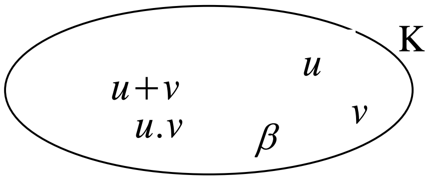
Autrement dit, dans un groupe commutatif multiplicatif G ayant m éléments, si x est d'ordre w, l'égalité $x^z=1$ a lieu si et seulement si z est multiple de l'ordre w. En particulier comme $x^m=1$, l'ordre w divise nécessairement le cardinal m du groupe.

Appliquons ce résultat à notre groupe (le groupe multiplicatif de K[α]) et à l'élément $v=2-\alpha$.
Il faut connaître le cardinal m de ce groupe.
Puisque K[α] est l'ensemble des "nombres" de la forme $a+b\alpha$ avec a et b quelconques dans K, le groupe multiplicatif du corps (tous les éléments sauf 0) contient $m=d^2-1$ éléments.
Ceux-ci sont bien tous distincts, car si $a+b\alpha=a'+b'\alpha$ alors $(a-a')+(b-b')\alpha=0$ qui n'est possible que si $a=a'$ et $b=b'$ sans quoi α serait dans K.
On a vu que $v^{2^p}=1$ donc l'ordre w de v divise 2^p.
Par conséquent, w est une puissance de 2, disons $w=2^t$.
t n'est pas inférieur ou égal à $p-1$, sinon, partant de $2^t=1$, et par élévations au carré successives, on arriverait à $v^{2^{p-1}}=1$ce qui est contradictoire avec $v^{2^{p-1}}=-1$.
t est donc supérieur ou égal à p. Mais alors, $2^t=w$ est supérieur ou égal à 2^p.
C'est clair : w divise 2^p et w est supérieur ou égal à 2^p donc $w=2^p$.
Mais w divise le cardinal $m=d^2-1$ du groupe, donc on arrive enfin à la contradiction :

$$2^p \le d^2-1 < d^2 \le \mathrm{M}_p < 2^p \qquad \text{(On rappelle que } d \le \sqrt{M_p}\text{)}$$

2. Deuxième cas : 3 est un carré dans K

Il existe dans K un élément β tel que $\beta^2=3$.
C'est beaucoup plus simple dans ce cas, aucune extension de corps n'est à prévoir :



On pose $u=2+\beta$ et $v=2-\beta$. Et la démonstration est identique à celle du cas ***4-1*** sauf pour le cardinal du groupe (ici K–{0}) qui vaut $m=d-1$ au lieu de d^2-1.
La contradiction est la même : $2^p \leq d-1 < d^2 \leq \mathrm{M}_p < 2^p$.

5. APPLICATION DU TEST A $M = M_{521}$.

521 est premier, le test s'applique et dit que si on pose

$$L_1=4 \text{ et pour } n\geq 2 : L_n\ L^2_{n-1}-2$$

alors il suffit de vérifier que L_{520} est multiple de M pour garantir la primarité de M.
519 multiplications sont nécessaires, et le calcul modulo M suffit. (Heureusement !)
La calculatrice TI 92 peut opérer exactement sur des entiers ayant jusqu'à 614 chiffres.
Ainsi elle calcule exactement factorielle (299) qui a 613 chiffres (avec sa ribambelle de 72 zéros à la fin) mais on voit bien qu'elle peine !
Par contre pour factorielle (300), on se contentera du résultat $3.06057512216\times10^{614}$.
$M=M_{521}$ possède 157 chiffres, et nous pouvons donc calculer des carrés (et même des cubes) modulo M sur la TI 92. Le test, qui ne nécessite que des élévations au carré, va pouvoir s'appliquer.

Auparavant, une remarque : on peut se dire "Pourquoi tout ça alors que la TI 92 a la fonction "factor" qui décompose les entiers en facteurs premiers". Oui, mais si on lit la brochure, il est dit que le programme ne teste que les facteurs premiers jusqu'à 65537 (c'est-à-dire $2^{16}+1$).
Ainsi, elle trouve factor (4295098369)$=65537^2$ en 40 secondes, mais elle ne trouve pas factor (4295622677)$=65539\times65543$.
C'est d'ailleurs piégeant, car elle affiche factor (4295622677)=4295622677 laissant croire que ce nombre est premier. [Moralité : toujours lire les brochures]

Bref ! Vérifions que $y=L_{520}$ est bien nul modulo M et notre cauchemar prendra fin.
Voici le programme (TI 92) :

```
lucas (p)
Prgm
Local n, y, i
2^p–1 → n: 4→ y
For i, 1, p–2
 mod (y*y–2,n) → y
EndFor
Output 18, 12, "y =": Output 18, 40, y
EndPrgm
```

Ce programme est traduisible dans n'importe quel langage.

(18,12 et 18,40 sont simplement des coordonnées écran pour l'affichage final).

On tape lucas(521) et au bout d'un peu moins de 3 minutes on voit s'afficher y=0, ce qui prouve que $2^{521}-1$ est premier.
Vous pouvez faire encore mieux, vérifiez avec la TI 92 que le nombre de Mersenne M_{607} qui a 183 chiffres est premier. (Il faut 4 bonnes minutes).
Si on essaye lucas (523) on voit s'afficher après quatre bonnes minutes :
y=14680256473956796571461895267127994401862777033702240623969902984116756305265666182050683973334028335919128426880206775536661618554329950113023895495009524952495

ce qui prouve que $2^{523}-1$ n'est pas premier, en utilisant la réciproque du test (non démontrée ici).
Quant à trouver les facteurs de $2^{523}-1$, c'est un autre cauchemar, et il faut beaucoup plus que le test de Lucas-Lehmer pour les obtenir :

$$\mathbf{2^{523} - 1} \quad =$$

27 459190 640522 438859 927603 196325 572869 077741 200573 221637 577853 836742 172733 590624 208490 238562 645818 219909 185245 565923 432148 487951 998866 575250 296113 164460 228607

=

160 188778 313202 118610 543685 368878 688932 828701 136501 444932 217468 039063

×

171417 691861 249198 128317 096534 322116 476165 056718 630345 094896 620367 860006 486977 101859 504089

Comme vous pouvez le vérifier avec la TI 92 !

6. *POUR TOUT SAVOIR SUR LES NOMBRES DE MERSENNE, ALLER SUR :*

http://primes.utm.edu/mersenne/index.html

et pour la manière dont s'y prennent concrètement les spécialistes pour battre les records, ainsi que des détails sur la fondation qui offre le prix de 100 000 dollars, aller sur : http://www.mersenne.org

Douce France : le monde entier nous l'envie

Michel Bridenne, lycée G. Eiffel et Irem de Dijon

Les dessins sont dus à la plume experte de Serge Cecconi (ex-collègue mais toujours ami, et maintenant pensionné de l'état).

Mots clés : *exercices, problèmes, évaluations, tâches, techniques, technologies, théories, contrat didactique.*

En guise d'une pré-introduction.

La commission européenne a confié une mission d'études sur l'enseignement des sciences en Europe à un comité d'experts présidé par Michel Rocard.

Le rapport rappelle (en anglais !) les motivations ayant présidé à cette mission :

> *In recent years, many studies have highlighted an alarming decline in young people's interest for key science studies and mathematics. Despite the numerous projects and actions that are being implemented to reverse this trend, the signs of improvement are still modest. Unless more effective action is taken, Europe's longer term capacity to innovate, and the quality of its research will also decline. Furthermore, among the population in general, the acquisition of skills that are becoming essential in all walks of life, in a society increasingly dependent on the use of knowledge, is also under increasing threat.*
> *In consequence, the European Commission has tasked this group of experts to examine a crosssection of on-going initiatives and to draw from them elements of know-how and good practice that could bring about a radical change in young people's interest in science studies - and to identify the necessary pre-conditions*[1].

[1] Un essai de traduction : « Ces dernières années, plusieurs études ont signalé un déclin alarmant de l'intérêt des jeunes pour les études des sciences fondamentales et pour les mathématiques. En dépit des nombreux projets et actions initiés pour inverser cette tendance, les signes d'amélioration sont encore modestes. A moins d'engager une action décisive, la capacité à innover de l'Europe sur le long terme, et la qualité de ses recherches déclineront de la même façon. Plus encore, parmi la population en général,

S'appuyant sur un certain nombre d'observations ayant piloté le travail, et sur quelques précisions pas inutiles (qu'entend-on, dans ce rapport, par « sciences » ?), le rapport énonce quelques conclusions et sept recommandations.
Le groupe d'experts note une corrélation nette entre le rapport d'autrui à la science et la façon dont la science est enseignée, et retient qu'il peut s'agir d'une relation de cause à effet. Il invite fortement à trouver les moyens de rééquilibrer un enseignement que l'on peut qualifier de quasi-ostensif (le maître montre et démontre les choses, en toute rigueur et en toute conscience professionnelle) au profit d'un enseignement basé sur la recherche de réponses à un questionnement préalable et fondé (IBSE[2]).[3]
On pourra[4] me soupçonner de lier « enseignement hyper ostensif » et « rapport non idoine entre autrui et science ».

Diable !
Et les efforts faits via les diverses olympiades, rallies ou autres Kangourou, que je suis prêt à qualifier de louables, ne corrigent pas grand-chose. Et il y a derrière cela, l'idée de plaisir : on peut prendre son pied à faire des math !
Du plaisir là ? Oui, peut-être, certes, mais corriger les tendances lourdes sans cesse confirmées par les différentes enquêtes françaises ou internationales situent l'enjeu à un autre niveau : il s'agirait d'introduire ce plaisir dans le quotidien de nos salles de classe.
Mais question plaisir à faire des mathématiques, prudence ! C'est une des tartes à la crème dont nous entartent certains. A mon avis, c'est être bien outrecuidant que d'affirmer réussir à dévoluer son plaisir éventuel à faire des mathématiques à des adolescents qui n'y peuvent mais[5].

Bigre ! Entarter, voilà une violence bien étonnante … Mais revenons à des choses plus banales.

---

l'acquisition des savoir-faire devenant essentiels dans tous les domaines, dans une société de plus en plus dépendante de l'utilisation de connaissances, est aussi sous une menace croissante.
En conséquence, la Commission Européenne a chargé ce groupe d'experts d'examiner un échantillon d'initiatives existantes et de dégager à partir d'elles des éléments de savoir-faire et de bon usage qui pourraient conduire à un changement radical de l'intérêt des jeunes pour les études scientifiques – et d'identifier les conditions requises nécessaires à ce changement. »
En référence à l'un de mes maîtres – je parle de Pierre Dac, ce philosophe trop tôt disparu – après ça, si vous le voulez, je vous le fais en danois.

[2] Ce n'est pas une secte : inquiry-based science education.

[3] J'ai bien conscience de l'effet affreusement réducteur de tout raccourci. Le mieux est de renvoyer l'hypothétique lecteur – s'il existe encore – à une adresse où le dit rapport peut être consulté :
http://ec.europa.eu/research/science-society/index.cfm?fuseaction=public.topic&id=1100&lang=1.

[4] Hélas, à juste titre. Mais il ne faut pas croire que je me sente très différent de la majorité des collègues.

[5] R. Barra a écrit de savoureuses petites bulles sur le sujet dans d'anciens bulletins de l'APMEP.

Préambule : tristesse et désolations

Le titre annonce par avance un certain état d'esprit, j'en conviens.
Et le propos semble s'éloigner quelque peu de ce qui précède, mais … ce sera pour mieux y revenir.
Les exercices, problèmes ou autres activités que nous proposons à nos élèves ou étudiants à des fins d'enseignement, d'apprentissage et/ou d'évaluation sont des matériaux précieux pour les échanges[6], pour les informations que l'on peut en tirer[7], voire pour un peu de notre formation[8].
Au risque d'en chagriner quelques-uns, et malgré tout l'intérêt personnel que je porte à la chose, la seule mutualisation des susdits ne me semble pas suffisante si elle ne s'accompagne pas d'ingrédients assurant la consistance et la qualité des échanges[9] …
Lancinantes questions : sur quoi devraient porter les échanges ? consistance et qualité, qu'est-ce à dire ? ingrédients, quèsaco ?

Les sujets d'examen ont cette qualité de ne pas trop impliquer tel ou tel collègue : les responsabilités sont suffisamment diluées pour qu'après tout, ça devienne indolore, chacun pouvant se dire qu'il n'était qu'un rouage et qu'il remplissait ses rôle et devoir de fonctionnaire[10].
En annexe se trouvent des supports ordinaires (à partir d'épreuves de mathématiques des baccalauréats section STI et S de juin 2007) : j'invite d'abord le lecteur à relire ou à prendre connaissance de ces supports et je lui propose ensuite et ci-après de reconsidérer cette lecture avec une approche, non pas biaisée, mais quelque peu interrogative. Rien d'affolant.

Les supports en annexe ont une mise en page voulue : en vis-à-vis (gauche/droite ou dessus/dessous) l'exercice ou le problème versus un « corrigé » (accessibles via l'Internet ou estampillé d'un imprimatur institutionnel[11]).

---

[6] Forcément sympas, mais souvent entre deux portes ou en partageant un thé ou un café dans la salle des profs. C'est vite fait … Du genre, on s'téléphone, hein ?
[7] Modeste, non ?
[8] Si, si, il existe autre chose que des leçons magistrales (qui ont aussi beaucoup de qualités) sur telle ou telle théorie.
[9] Bien sûr, je pense à Sésamath, Mathenpoche, etc … J'insiste : il faut bien relire le début de la phrase !
[10] Une mécanique bien connue, même à ce niveau.
[11] Dans l'enseignement technique, les corrections des épreuves de baccalauréat par exemple, se font dans les établissements scolaires, centres de regroupement des diverses sections. En mathématiques, les enseignants de mathématiques se voient remettre un sujet, avec un « corrigé » contenant des observations, et jusqu'en 2006, une proposition de barème détaillé.

BAC S, Exercice 3, spécialité mathématiques, juin 2007 : ***quelques remarques.***

L'énoncé n'annonce pas de but(s) mathématique(s) précis. On suit pas à pas les questions posées, un peu étonné quand même, et on reconnaît quelques propriétés des triangles[12] (rappelées dans les corrigés des collègues).
Certes un élève lambda reste un peu le nez dans le guidon, mais ça n'a pas l'air bien méchant.
Disons qu'a priori, le texte est banal, et qu'il devait s'agir d'évaluer quelques connaissances des candidats sur les similitudes planes, en leur demandant de

1. emprunter aux écritures complexes[13] a minima,
2. produire des textes de « démonstrations[14] ».

Pour les deux propositions de corrigés fournis[15], je ne suis évidemment pas capable de dire s'il s'agit du même auteur. Il semble évident que l'un et l'autre respectent les canons des rédactions usuelles : avec le consensus habituel minimal[16], nous reconnaissons tous un caractère rigoureux à ces textes.

Tout de même, quelques interrogations peuvent être formulées.
Sur l'énoncé, en premier lieu, tel qu'il est imprimé[17] dans un sujet d'examen, de bac qui plus est.
Il est annoncé que la figure[18] sera complétée tout au long de l'exercice.
Soit, mais qu'est-il demandé de compléter dans ce texte ? **RIEN**.
Je doute fortement que le concepteur et les différents relecteurs et/ou décideurs concernés par le choix de cet exercice, aient été très vigilants quant à ce qui était évalué.

Comme on peut l'imaginer, sous influence[19], beaucoup d'élèves ont dû se lancer dans des écritures algébrisées : qui dit similitude plane directe, dit quelque chose comme z' = az + b. D'où une procédure et des techniques dont on peut aisément imaginer qu'elles ont été largement majoritaires.

[12] Une visite d'un musée, mais on a oublié de nous dire quelles seraient les œuvres exposées.
[13] R. Douady parlerait de cadres, et R. Duval ferait référence à des registres sémiotiques si l'on veut entrer dans le langage de la didactique.
[14] Ou des preuves, ou des textes mathématiquement argumentés. Mais il ne faut pas se tromper de controverse, comme nous le verrons.
[15] Obtenus en surfant sur l'Internet.
[16] Je reviens là-dessus un peu plus tard.
[17] Je veux dire qu'il n'est là nul besoin de s'interroger sur ce qui a pu précéder cette conclusion, ni de savoir de quel(s) compromis il est issu.
[18] Ce n'est pas dramatique : mais quand acceptera-t-on qu'il y a débat sur les termes « dessin » et « figure » ? Ce qui n'empêcherait en rien les abus de langage … en dehors d'un texte écrit d'examen.
[19] Du contrat didactique, pour ne pas le nommer. Même si chacun sait que ce si exécré concept se révèle plus fortement lors de ruptures.

Pourtant les habillage et outillage « écriture complexe » des similitudes planes ont-ils un caractère nécessaire dans cet exercice, au moins pour les questions 1.a. et 2.b. et c. ? **NON**, bien sûr.
Les points étant « bien » situés sur le quadrillage, des procédures de lecture de la figure[20] (quadrillage compris) sont utilisables et efficaces.

Par exemple, rapidement :
1.a. la droite (AC) est bien particulière : AC, c'est huit fois la diagonale d'un petit carré de côté 1, et AH = 6. D'où le rapport de la similitude.
L'angle – côté et diagonale d'un carré – se lit pour les mêmes raisons[21], l'orientation ne faisant quand même pas souci dans ce cas.
2.b. et c. La perpendiculaire à (AC) porte les diagonales de carrés du quadrillage. Le symétrique de H par rapport à (AC) se lit aisément. Toujours en utilisant le quadrillage (deux triangles rectangles « évidemment » isométriques), AF = EF.
Lâchement, je ne proposerai pas de rédaction[22].

D'ici à ce que certains se disent qu'il n'y a que des matheux pour poser de tels sujets, il n'y a pas long : pourquoi faire simple quand on peut faire si compliqué.
Ah, les beaux discours qu'on entend ici et là … sur les maths, l'évaluation, etc.
Mais là, c'est un bel exemple : le marteau-pilon permet aussi d'écraser les mouches ! Belle catastrophe. Heureusement, nous sommes dans un verre d'eau.

Et puis, plus généralement, les « produits » attendus par chacune des questions posées ne sont pas très clairs, malgré des apparences trompeuses. Ambiguïté ou ambivalence. Est-ce une démonstration, une explication ou un simple résultat « brut » qui est escompté ? J'entends des voix s'élever pour protester : « tout le monde sait ce que l'on veut, ce que cela veut dire ». Où polysémie et contrat implicite font bon ménage.
Que comprendre par (question 2.a.) : quelle est alors la nature de s ?
Si un élève répond « $z' = -i\overline{z} + 1 + i$ donc s est la symétrie d'axe (AC) » : on a envie de dire que c'est une affirmation non prouvée. Pourtant … Et qu'attend-on par (question 2.c.) : « vérifier que E est sur Γ » ?
Quant aux éléments de corrigé réalisés par les collègues[23], Il faut remarquer premièrement qu'ils sont éminemment contractuels. De quoi, hélas, ***alimenter l'idée qu'en mathématiques, l'important n'est pas l'exactitude de ce que l'on fait, mais ce que l'on pense que l'institution ou l'enseignant attend***.

---

[20] Figure, oui, parce que je fais référence à des propriétés caractérisant cette figure.
[21] C'est clair.
[22] Plus sérieusement parce que ce n'est pas l'objet de la réflexion, à ce moment précis.
[23] J'ai déjà dit tout leur sérieux et que les auteurs se sont sentis obligés de pallier un manque : signaler les résultats démontrés par leur généralité.

Deuxièmement, si l'on reprend stricto sensu les preuves avancées, les déductions sont presque exactement du type « s est telle que z' = s(z) et z' = $-i\overline{z} + 1 + i$ donc s est la symétrie d'axe (AC) ». On peut schématiser cette déduction par :

$$\boxed{z' = s(z)} \qquad \boxed{z' = -i\overline{z} + 1 + i}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\text{s est la symétrie d'axe (AC)}}$$

Cette présentation me semble avoir la mérite de faire ressortir l'essentiel : l'organisation globale du raisonnement dans son ordre et ses déductions, les affirmations sources ou déduites, … et les explications venant valider éventuellement tout ou partie du raisonnement.
Voici ce que donne le même travail sur la première proposition de rédaction de l'annexe 1[24]. On se retrouve devant des déductogrammes, en fait des squelettes de raisonnements où les déductions sont symbolisées par des flèches.

σ la similitude directe de centre A qui transforme C en H — k le rapport de cette similitude σ

$$\downarrow$$

$$k = \frac{AH}{AC}$$

$$\downarrow$$

$$k = \frac{|z_H - z_A|}{|z_C - z_A|}$$

$$\downarrow$$

$$k = \frac{|-6i|}{|8-8i|}$$

$$\downarrow$$

$$k = \frac{6}{8\sqrt{2}}$$

$$\downarrow$$

$$k = \frac{3}{4\sqrt{2}}$$

[24] Il n'est évidemment pas question de dire que les abus d'écriture doivent être proscrits ! La suite d'égalités a un côté pratique incontournable : elle est ici abandonnée pour insister sur des déductions présentes.

La similitude (sic) qui, à mon sens, est frappante, est l'absence, dans les deux cas, d'éléments de cours qui viendraient justifier ou valider les déductions[25].
Ne soyons pas dupes, un consensus partagé par tous … les profs, permet de dire que les déductions relevant d'évidences n'appellent pas de justifications particulières. Soit.

Mais reconnaissons qu'il y a problème. Le petit schéma précédent ne serait pas accepté comme une preuve s'il venait d'un élève.
Laissons la réflexion en l'état, et poussons l'autre porte, l'annexe 2.

BAC TECHNOLOGIQUE STI, Génie électronique, Problème, mathématiques, juin 2007 : ***quelques remarques.***

L'énoncé n'est pas plus original[26] que celui de S ; il est classique, n'annonce pas les buts mathématiques mais les titres des différents paragraphes s'en rapprochent (ils peuvent aussi être compris comme : « vous allez être évalués sur vos capacités à réaliser telle ou telle chose »).
Et puis, il y a le bandeau de la page de garde !

Il y a dans l'énoncé quelques petites expressions qui peuvent accrocher le regard :
- « calculer » par exemple, qui intervient 5 fois,

[25] Là, à mon sens, il y a problème. Comment un élève peut-il faire le tri entre l'évident – ne réclamant rien d'autre que sa simple énonciation – du reste ?
[26] Il n'y a pas de raison de viser à l'originalité dans une situation telle que le baccalauréat.

- « déterminer » (3 fois) qui se révèle dans ce texte souvent cousine de la précédente (déterminer a et b, déterminer la limite de f en $+\infty$, …),
- « (en) déduire » (4 fois), « établir », « étudier », « justifier », … « vérifier »,
- des orphelines : « donner une interprétation graphique » et « tracer ».

Un commentaire sur l'expression « calculer »[27] : je rejoins ceux qui pensent que ce mot seul, ne signifie par grand-chose, et qu'il est source de gros malentendus[28] chez beaucoup d'élèves.
La pratique du calcul en « situations », c'est-à-dire dans la résolution de petits problèmes où le fait de calculer est un moyen de trouver une réponse adaptée à une ou plusieurs questions, montre assez que calculer consiste à transformer des écritures sous couvert et sous le contrôle de savoirs pour s'arrêter dès que l'écriture est porteuse des éléments en accord avec une éventuelle consigne ou une question posée.
Par exemple, pour le calcul d'une dérivée, si le but de ce calcul est d'étudier les variations d'une fonction via l'étude du signe de la dérivée, alors il s'agit d'obtenir une écriture sur laquelle pourront s'exercer aisément des outils d'étude de signes. Pour traiter la question A.1., il suffit donc d'écrire $g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$ sachant que x est dans $]0\ ;\ +\infty[$.
Il serait temps dans les différents textes où un calcul est demandé, d'indiquer un point d'arrêt à ce calcul (par une forme, ou par le but assigné au calcul …).
Et puis, juste une question : si, dans la question D.2.b., un élève calculait l'arrondi en prenant 2,72 pour e, … ou 2,71 ?[29] Refermons cette parenthèse.
L'examen de l'énoncé montre que l'évaluation est, comme à l'accoutumée, fortement focalisée sur la demande de preuves, et laisse entrevoir des points délicats dans la mise en forme des raisonnements – dès lors qu'on s'imagine qu'il va falloir exhiber, à certains moments, les savoirs validant les affirmations[30].

Et puis, ouf !, le corrigé.

Je ne sais pas de qui on se moque, mais il y a de quoi être estomaqué.
Peut-être certains responsables de l'institution – inspecteurs pédagogiques régionaux ? – se montrent-ils inquiets des compétences de certains fonctionnaires.
Présenter de telles propositions comme support aux débats d'une commission d'harmonisation de baccalauréat relève d'un petit scandale.

---

[27] Dans le tome VIII de la publication MOTS de l'APMEP, brochure n°67, 1987 (hou là, là), « calculer » est classé dans les mots flous.
[28] C'est volontairement faible.
[29] Naïvement, je ne sais pas ce qui est évalué.
[30] Déductions ou autres. Surtout, encore une fois, que le bandeau « nous » a avertis …

La présentation sous forme de déductogrammes donnerait par exemple :
pour A.1.

$$\boxed{g'(x) = \frac{2x^2+1}{x}}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in]0\ ;\ +\infty[,\ g'(x) > 0}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } \in]0\ ;\ +\infty[.}$$

pour B.1.

$$\boxed{f'(x) = a - \frac{1-\ln x}{x^2}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{ax^2 - 1 + \ln x}{x^2}}$$

pour B.2.

$$\boxed{f(1) = 0} \qquad \boxed{f'(1) = 0}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\boxed{a + b = 0} \qquad \boxed{a - 1 = 0}$$

$$\longrightarrow \boxed{a = 1 \text{ et } b = -1}$$

Le reste est à l'avenant.

Je me demande quand même à quoi peut servir ce corrigé.

Ce n'est pas tant l'auteur de ce corrigé qui est en cause, mais bien l'institution qui montre une réelle incapacité à trouver les moyens d'informer des collègues sur les points essentiels à discuter lors d'une évaluation. Et ce ne sont certainement pas les observations, qu'en dire !, qui atténuent le ridicule de l'affaire.

Ah, le bandeau ! … pour quelle bouillie au final.

Je l'avais annoncé : tristesse et désolations.

A défaut de panacée, des éléments pour nous outiller : hommes et femmes de bonne volonté, parcourrons un bout de chemin ensembles[31].

La conférence[32] remarquée, à défaut d'être appréciée d'Yves Chevallard est en parfaite résonance avec le rapport de la pré-introduction, plus fine bien sûr puisque centrée sur l'enseignement des mathématiques. L'analyse, est, de façon heureuse[33], sans concession[34], et ne se borne pas à un constat : l'enjeu est de (re)trouver des questionnements qui redonneraient ses raisons d'être à la chose enseignée. C'est sur ces questionnements que *devraient* se construire des parcours d'enseignement et de recherche (PER) ou des activités d'enseignement et de recherche (AER)[35].
Tenons pour acquis que, bon an mal an, chacun d'entre nous, a voulu[36] faire vivre des PER et des AER à toutes les têtes brunes ou autres qu'il a eues devant lui. Tenons pour acquis que chacun d'entre nous est professionnellement consciencieux[37].

Parmi les différentes phases d'enseignement et d'apprentissages[38] dans lesquels chacun d'entre nous place les élèves, certaines concernent les évaluations.

---

[31] Lyrique. Je ne désespère pas : la retraite approche.

[32] Chevallard Y. (2006), Les mathématiques à l'école : pour une révolution épistémologique et didactique, conférence aux journées nationales APMEP de Clermont-Ferrand , in bulletin APMEP n°471, pp 439-461, juillet - août 2007.

[33] Ce qui n'a rien d'étonnant.

[34] Je serais curieux de connaître le point de vue d'Alain Finkielkraut, qui n'est pas que contempteur du pédagogisme.

[35] C'est un énorme chantier que de formuler ces questionnements et de s'y astreindre pour construire un enseignement retrouvant son sens par les nécessités de trouver des réponses (éventuellement partielles) à ces questionnements, et enjoignant chaque élève à apprendre ce qui est en relation avec ce sens retrouvé (des apprentissages qui redeviennent utiles dans tous les sens du terme, culturel compris). Il a été ouvert ce chantier, notamment avec l'appui de plusieurs IREM (Bordeaux, Aix-Marseille, Montpellier, Poitiers, Clermont-Ferrand pour ne citer qu'eux ; Dijon vient de s'y rattacher) et de l'INRP, et certains résultats remarquables sont consultables sur le site de l'INRP.
Il n'y a pas si longtemps de cela, j'ai tenté de me frotter, bien modestement, à la problématique de Chevallard concernant l'enseignement des statistiques en seconde. Il n'est pas dans mon intention de développer ni ce qu'il en fût, ni ce qu'il en est advenu.
Pillant sans vergogne dans les idées des autres, j'ai proposé l'étude du problème suivant, sur une période assez longue (environ 3 mois) :

> Un élève du lycée G. Eiffel de Dijon dit avoir enregistré, sur son ordinateur, au format MP3, 8 Go de musique. Il dit avoir alors beaucoup de choix pour son baladeur. Pour ce qui concerne les élèves de ce lycée, peut-on dire que cet élève a enregistré beaucoup de musique au format MP3 ?

Ponctuée de présentations des avancements des travaux, des interventions critiques des uns et des autres, est-il imaginable de penser que l'étude de cet énoncé ait pu motiver et couvrir l'étude des statistiques en seconde jusques et y compris les fluctuations d'échantillonnages ?
Amorce d'un PER ? Peut-être, mais là n'est pas … la question pour aujourd'hui.

[36] C'est d'intentions qu'il s'agit.

[37] Ce que je crois très sincèrement. Laissons les marges.

[38] Ca frise le détournement, mais je suis prêt à assumer … Jusqu'à un certain point cependant. Responsable mais …

Et c'est de cela qu'il s'agit, de façon très terre à terre.

Pour aller plus avant, pour regarder à nouveau les énoncés d'évaluation, à côté des connaissances que nous partageons tous en tant qu'enseignants de mathématiques, c'est bien à Yves Chevallard que, à ma façon certes[39], j'emprunterai quelques notions didactiques, en nombre[40] limité. Pas d'affolement prématuré !

Développant le concept de praxéologie dans un champ plus vaste que celui des mathématiques, mais s'appliquant bien à notre domaine, Chevallard[41] introduit les notions de tâche/types de tâches, de techniques, de technologies et de théories.

Prenons la tâche comme un exercice (ou un problème) à résoudre : celui-ci se rattache le plus souvent à un type d'exercices (ou de problèmes). Suivant les besoins, tel exercice ou tel problème peut être lui-même subdivisé en un ensemble de sous-exercices ou sous-problèmes pour chacun desquels, il me semble que l'on puisse à nouveau parler de tâche. De même, tel type d'exercices ou problèmes peut relever d'un type plus rassembleur. La résolution des équations du second degré à une inconnue dans **R** relève du type plus grand de la résolution des équations à une inconnue, etc.

Le plus souvent un exercice[42] peut être traité de plusieurs façons – Chevallard parle ici de techniques – chacune d'elles pouvant éventuellement être justifiée par ce que Chevallard nomme des technologies – discours rationnels ayant pour objet premier d'assurer que la technique employée permet bien de traiter le problème[43]. Je considèrerai les technologies comme étant les savoirs[44] validant les techniques.

On conçoit

1. qu'une technique puisse être très localisée et efficace pour un exercice précis mais se révéler inopérante dans un exercice de même type (il est alors question de la portée d'une technique),
2. qu'une technique puisse être valable sans pouvoir être validée à un niveau donné, simplement parce que les savoirs ne sont pas présents par exemple au

---

[39] Ou bien il me pardonne les horribles contre-sens que cela suppose, ou bien il mettra cela sur le compte – éternellement débiteur – de l'incontournable transposition didactique. Il en sait des tonnes là-dessus.

[40] Très ?

[41] L'original est toujours meilleur. Je conseille par exemple :
Chevallard Y. (1998), Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques : l'approche anthropologique, in Actes de l'Université d'été de La Rochelle, pp 91-118.
Chevallard Y. (?), Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique

[42] Dans la suite, je ne distingue plus exercice et problème.

[43] D'après Chevallard Y. (1998), page 93.

[44] Pour faire rapide : définitions, propriétés, théorèmes ...

niveau où l'on se trouve[45] (c'est le cas de beaucoup de problèmes de recherche d'extremum, de résolution d'équations par approximations successives en classes de seconde).

Enfin, les technologies sont-elles mêmes validées par les théories les contenant : le théorème des valeurs intermédiaires trouve sa justification dans une théorie des fonctions continues.

Un exemple ultra-classique au niveau d'une classe de seconde.

Dans l'énoncé « le quadrilatère qui tourne »[46] sous une forme que j'avais utilisée, on peut[47] aboutir par exemple à la recherche du minimum de la fonction f définie sur [0 ; 21] et telle que $f(x) = 29{,}7\times 21 - 2\left[\frac{(21 - x)x}{2} + \frac{(29{,}7 - x)x}{2}\right]$, ou encore à la résolution sur [0 ; 21] de $29{,}7\times 21 - 2\left[\frac{(21 - x)x}{2} + \frac{(29{,}7 - x)x}{2}\right] = k$ (en fixant la constante k suivant les besoins que l'enseignant ressent : 400 par exemple).

---

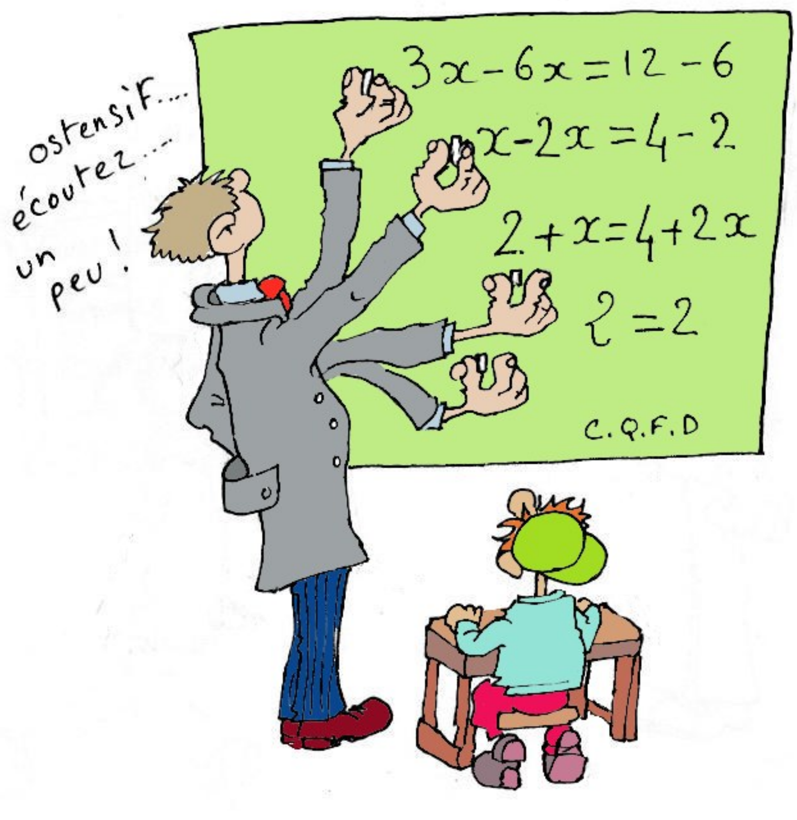
[45] Je ne trouve pas cela choquant, cela va sans dire.

[46] Germain G., Zuccheta J.-F.(1993), Le quadrilatère qui tourne, in Maths en seconde : énoncés et scénarios, pp. 49-58.
PS : L'âge ne fait rien à l'affaire … quand on est bon, on est bon. Mille excuses … et mercis à G. Brassens.

[47] Voir l'article cité : ce sont des prolongations envisageables. On remarquera que les dimensions du rectangle sont celles d'une feuille de format A4 (arrondies).

On imagine aisément des techniques numériques sans cesse affinées jusqu'à une certaine limite imposée par les moyens employés pour ces techniques (calculatrices, calculs mentaux ou non), des techniques graphiques (cribles de points et lissages, calculatrices graphiques, logiciels ...) agrémentées de considérations géométriques sur la présence d'un candidat axe de symétrie, des techniques algébrisées en passant par des transformations d'écritures (forme canonique d'un polynôme du second degré) puis en utilisant des techniques de résolution algébriques (de nouveau diverses) de résolution d'équations ou d'inéquations ou de comparaison de nombres ou encore d'études de variations (on peut vouloir promouvoir la bien belle écriture $f(x) = 2\left(x - \frac{507}{40}\right)^2 + \frac{241911}{800}$ qui ouvre de grands horizons), ou encore des utilisations partielles et ordonnées de toutes ces techniques.

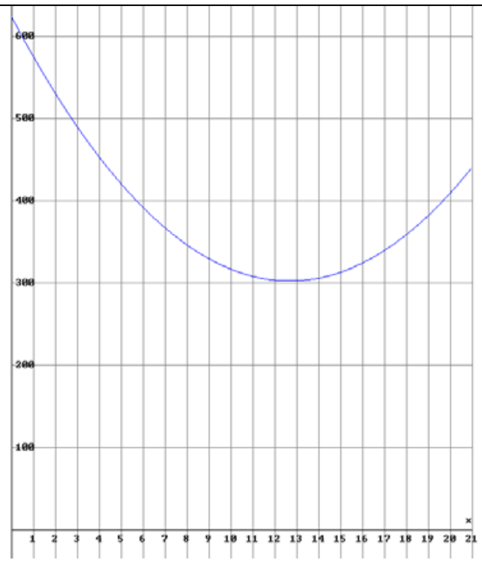
Il ne s'agit pas de savoir ici[48] si telle ou telle technique est mobilisable par un élève seul ou par un groupe d'élèves, mais de savoir si elle est disponible et accessible au moins sous la conduite[49] d'un enseignant.



Un deuxième axe de réflexion (pas nécessairement dissocié, ni indépendant du premier), est de mettre en évidence quelques-uns des éléments technologiques venant valider les techniques utilisées.

[48] Sous d'autres cieux, ça vaudrait le coup de s'y intéresser.
[49] Ostentatoire ostension.

Développons, pour illustration et au niveau présenté ci-dessus, un ensemble de techniques pour calculer le minimum de f, et la valeur pour laquelle le minimum est atteint.

Si les calculs sont faits « à la main », dans le but de visualiser un tableau de valeurs puis de réaliser une représentation graphique point par point, ils invitent à un changement d'écriture : $f(x) = 2x^2 - 50{,}7x + 623{,}7$. Cette transformation est bien sûr inutile dans le cas d'une utilisation immédiate de la commande « table de valeurs » d'une calculatrice, ou de la commande « représentation graphique sur l'écran » (il faudrait alors envisager une mise en forme de l'écran par des techniques adaptées). On peut alors obtenir une représentation comme celle ci-contre.	 (sous Derive)

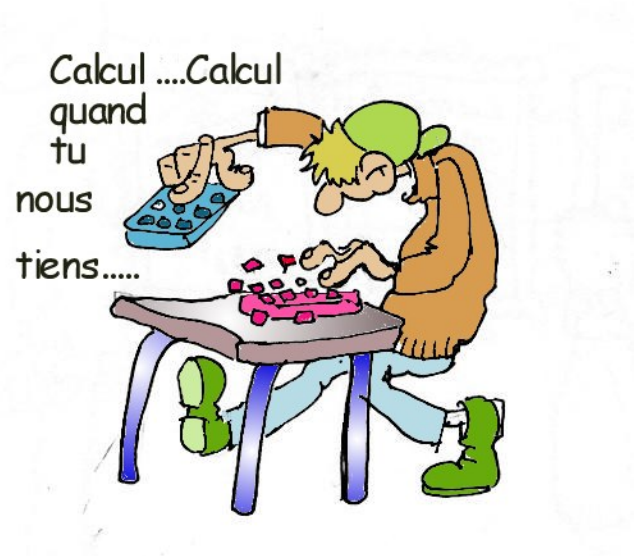
Sous certaines conditions (modélisation et lectures graphiques), on conjecture la présence de minimum(s) (environ 300), atteint(s) aux environs de 12,5, et de plus, la courbe laisse entrevoir un axe symétrie « partielle ».
La nature du problème peut inviter à s'interroger la dualité valeur approximative/valeur exacte. Cette interrogation sera à peine abordée : il s'agira de trouver la valeur « exacte ».
D'où une stratégie de résolution :

1) chercher les a de [0 ; 21] tel que f(a) = f(7),
2) compte tenu de la symétrie, en appelant b la demie somme de a et de 7, montrer que pour tout x de [0 ; 21], f(x) est supérieur à f(b).

Et succinctement,

Type problème	Exemples de techniques	Eléments de technologies au niveau
1) résolution d'une équation	graphiques	?
	numériques par encadrements successifs	?
	utilisation d'un « logiciel » (ordinateur, calculatrice) contenant des commandes traitant le problème, au moins partiellement	?

	algébriques (un exemple) $f(a) = f(7)$ $\Updownarrow$ $2a^2 - 50{,}7a = 2\times7^2 - 50{,}7\times7$ $\Updownarrow$ $2(a^2 - 7^2) - 50{,}7(a - 7) = 0$ $\Updownarrow$ $(a - 7)(2a - 36{,}7) = 0$ $\Updownarrow$ $a = 7$ ou $a = 18{,}35$ D'où la réponse que l'on peut fournir.	Règles de « particularisation », substitution, changement de statut, $a = b \leftrightarrows a + c = b + c$ $ab + ac = a(b + c)$ $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ $ab = 0 \leftrightarrows a = 0$ ou $b = 0$ (à condition que c ne soit pas nul) $ca = b \leftrightarrows a = \frac{b}{c}$



La présence des points d'interrogation n'est là que pour indiquer que les techniques étant envisageables (et descriptibles, même si je me suis abstenu ici), les technologies ne font pas partie du corpus des savoirs à disposition des élèves. En aucun cas, ces points d'interrogation ne veulent dire que ces techniques sont à proscrire, comme on pourra s'en apercevoir plus tard. La remarque que l'on peut faire tient aux valeurs approchées obtenues dans la plupart des cas avec ces techniques.
Quant à la technique algébrique développée, je n'étonnerai personne : elle doit être vue comme l'œuvre d'un enseignant. Mais elle s'accompagne d'éléments technologiques présents dans le corpus des savoirs des élèves.
Si l'on devait « rédiger » une réponse à cette question 1), il apparaît clairement que des questions de choix de ce que l'on veut voir ou faire apparaître vont intervenir. Et ces choix sont une des clés des évaluations notamment.

Ci-après une tentative de schéma fléché (déductogramme) de la procédure algébrique, incluant des éléments technologiques.

Pour tout x de [0 ; 21], $f(x) = 2x^2 - 50{,}7x + 623{,}7$

Reconnaissance du problème posé, …
Particularisation, substitution.

a de [0 ; 21], $2a^2 - 50{,}7a + 623{,}7 = 2\times 7^2 - 50{,}7\times 7 + 623{,}7$

Th.1 : $a = b \leftrightarrows a + c = b + c$
Th.2 : $ab + ac = a(b + c)$

a de [0 ; 21], $2(a^2 - 7^2) - 50{,}7(a - 7) = 0$

Th.3 : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
Th.2

a de [0 ; 21], $(a - 7)\,(2a - 36{,}7) = 0$

Th.4 : $ab = 0 \leftrightarrows a = 0$ ou $b = 0$
Th.5 : (à condition que c ne soit pas nul) $ca = b \leftrightarrows a = \dfrac{b}{c}$

a de [0 ; 21], $a = 7$ ou $a = 18{,}35$

18,35 est la seule autre valeur recherchée …

Par abus d'écriture (discutable), les énoncés des éléments technologiques sont supposés être quantifiés universellement, les restrictions éventuelles étant signalées.
La présentation choisie ne dit pas comment ça fonctionne (souvent généralisation à cas particulier, et règle du modus ponens), mais tente de faire émerger certains des savoirs justificatifs des déductions (doubles le cas échéant).
Il resterait à « rédiger » si on le trouve utile. C'est faisable, et je laisse le lecteur s'en persuader par sa seule mise en œuvre.

C'est cela, la plupart du temps, qui est formellement demandé dans la grande majorité des questions des évaluations, et notamment dans celles que j'ai mises en annexe.
Ce n'est pas cela qui est fourni par les corrigés. Certes on peut me faire remarquer qu'on ne peut écrire toutes les justifications, mais de là à ce qu'il n'y en ait aucune, il y a un pas de géant.
Ce sont quelques-unes des questions qui me semblent incontournables dans une évaluation (pas les seules, j'y reviendrais) : quelles techniques voulons-nous voir développées ? Ont-elles besoin d'être accompagnées d'éléments technologiques ? Si oui, lesquels voulons-nous voir formulés ?

Ci-après un regard rapide sur la deuxième question, et je laisse le lecteur envisager quelques réponses aux questions précédentes :

2) comparaison de deux nombres	graphiques	?
	numériques par tâtonnements successifs	?
	utilisation d'un « logiciel » (ordinateur, calculatrice) contenant des commandes traitant le problème, au moins partiellement	?
	algébrique (un exemple) Soit x dans [0 ; 21], $d = f(x) - f\left(\frac{7+18,35}{2}\right)$ $\downarrow\uparrow$ d = (x – 12,675)(2x – 25,35) $\downarrow\uparrow$ $d = 2(x - 12,675)^2$ D'où, pour tout x de [0 ; 21], $f(x) - f\left(\frac{7+18.35}{2}\right) \geq 0$ donc, pour tout x de [0 ; 21], $f(x) \geq f(12,675)$.	Règle de substitutions ab + ac = a(b + c) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ $a^2 \geq 0$ règle des signes $a \geq b \leftrightarrows a - b \geq 0$

Un, deux, trois, quatre ou cinq « t » ? Qu'importe le flacon, pourvu qu'on ait l'ivresse.[50]

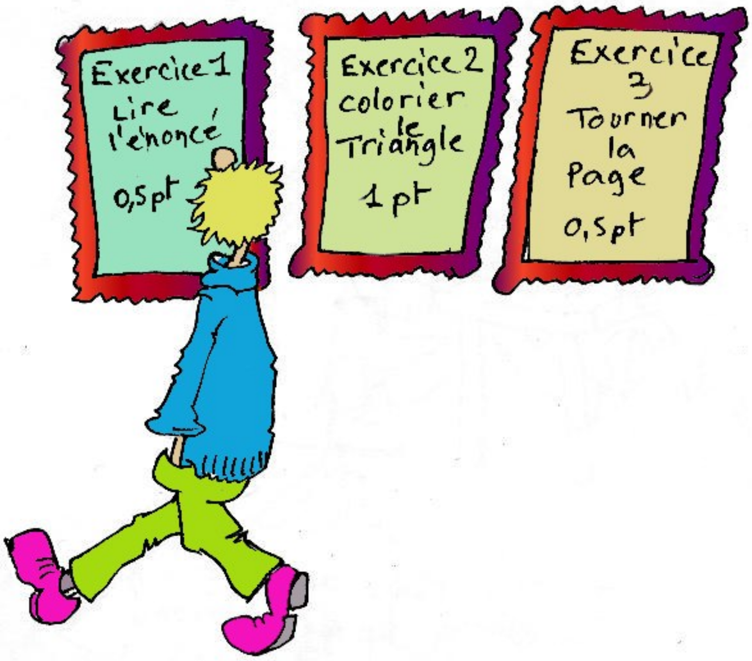
Si l'on en revient donc aux textes d'évaluation, petits scrupules à côté des bottes de sept lieux chaussées par les auteurs cités, l'idée que je défends est que les notions de tâches, techniques, technologies et théories, dans le sens développé par Chevallard, sont déjà des outils d'analyse particulièrement bien adaptés de ces textes.
Pensons à quelques questions que l'on peut en tirer :

- la tâche support de l'évaluation est-elle bien cernée ? Relève-t-elle d'un type de tâches important ou n'est-elle en fait qu'anecdotique par rapport au reste[51] ? …
- par rapport à cette tâche, est-il question de repérer la maîtrise d'une technique ? Si oui, comment s'a1ssurer que c'est bien cette technique qui sera utilisée ? Veut-on laisser le choix de la technique ? Veut-on faire valider cette technique, ou non ? …
- par rapport à cette tâche, en supposant que les techniques usuelles de résolution sont acquises, veut-on s'assurer de la connaissance de ce qui garantit leur validité ? Les éléments essentiels (et lesquels ?) doivent-ils être écrits ? …
- la tâche abordée est-elle la justification d'un énoncé « de cours », consiste-t-elle donc à une reconstitution partielle d'une théorie ? …
- etc …

[50] A. Musset
[51] Il y a là un peu d'écologie, et de durée de vie …

Pour enfoncer le clou, ce sont une partie des questions sur lesquelles les commissions d'élaboration, de « cobayage », d'harmonisation de sujets d'examen devraient exercer leur vigilance et auxquelles elles devraient apporter des réponses claires.

Des tentatives sont faites certainement (QCM, ROC …), pas très adroites, mais prenons les pour des prémisses encourageantes.



Il me paraît évident que, dans le même mouvement, dans le banal quotidien d'enseignant, ce sont des outils de conception, d'élaboration de nos propres textes d'évaluation, en ayant toujours le souci de nous demander si la forme choisie et le produit attendu sont en conformité avec nos intentions d'évaluation.

A qui veut bien considérer que la formation des enseignants de mathématiques ne se borne pas aux effets cumulatifs d'une expérience[52] parfois corrigée ou pilotée par des discours dignes du café du commerce, où l'opinion personnelle, voire l'argument d'autorité, tient lieu et place d'icelle, ces « t » là offrent des matériaux précieux d'échanges entre enseignants[53], et de formation par conséquent précisément.

[52] S'ajoutant à une formation disciplinaire de haut niveau.
[53] Inspecteurs pédagogiques régionaux compris. Il n'est jamais trop tard …

Pour terminer la première partie de cet article, j'invite le lecteur à prendre connaissance en annexe 3, d'un exemple, à titre d'essai, d'une présentation du problème de juin 2007 du bac STI électronique[54].

Cet essai, construit en m'appuyant sur les notions de tâches/types de tâches, techniques et technologies, demande sans doute quelques explications supplémentaires.

Ayant les bonnes lunettes, il reste à les ajuster :

1. J'ai voulu ne pas trop[55] m'écarter de ce que j'ai cru deviner des intentions du (des ?) concepteur(s).
2. C'est une proposition qui concerne bien évidemment la section présentée, et ses corpus.
3. Le texte proposé veut préciser la nature et la forme du produit attendu (résultat numérique ou algébrique – formule – dessin – tableau en laissant le choix et l'application de la[56] technique dans le domaine privé du travail sur brouillon[57], présentation écrite et développée d'une technique sans demande de justification, formulation d'éléments technologiques ayant présidé à l'obtention d'un résultat donné, formulation d'éléments technologiques validant une technique qui est présentée dans le texte, formulation d'un type de tâches, développement d'une technique **accompagnée** d'éléments technologiques[58] la validant ...)[59]. Il invite ainsi à diversifier les travaux mathématiques et d'évaluation[60].
4. Certaines formulations restent délicates et ne sont assez informatives (claires pour l'élève) ni des gestes mathématiques espérés, ni de la forme ou de la nature des résultats escomptés. Ca se travaille.

L'annexe 4 présente des exemples de « produits » attendus ; elle les exemplifie, mais la marge reste important, et le lecteur peut faire des suggestions ou exprimer tout autre sentiment.

[54] Quant à l'exercice 3 « spécialité math » du Bac S de juin, j'ai lu récemment l'article de Catherine Combelles dans le bulletin APMEP n°472 (p.804). Il y a bien des remarques que je partage. On y trouve une partie des raisons pour lesquelles mon essai ne porte pas sur cet exercice.
[55] Ce qui ne veut pas dire « pas du tout ».
[56] Ce la là est bien sûr trop singulier !
[57] Je n'oublie pas que les techniques utilisables dans le domaine privé peuvent intégrer des connaissances et des médias inhérents au domaine (les calculatrices en sont un exemple, et ça fait suffisamment de faux débats ...)
[58] On pourrait appeler ça une démonstration, non ?
[59] Voici les TD pour la prochaine (parce qu'il va y avoir une prochaine fois !) : qu'est-ce qui est quoi ?
[60] Je suppose que les compétences sous-jacentes relevant des théories de l'évaluation sont assez visibles.

Dans la suite à venir de cet article[61], je soumettrai d'autres exemples à différents niveaux. Toutes les réactions sont les bienvenues via l'IREM de Dijon[62].

Bonne année.

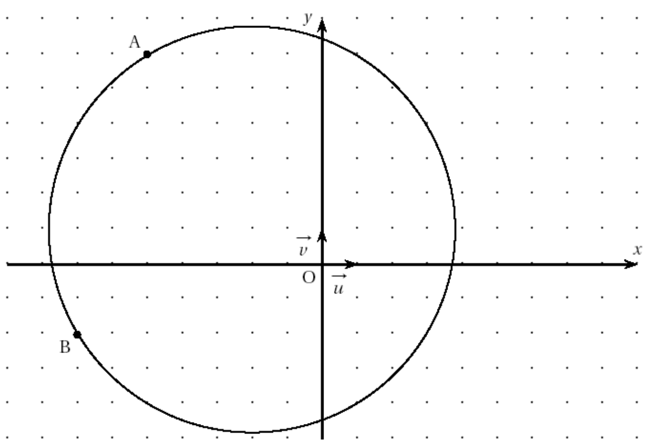
[61] … et puis, plus tard, peut-être, une mise sur site ou une brochure réunissant l'ensemble des exemples « bruts ».

[62] Par mèl éventuellement : iremsecr@u-bourgogne.fr, à mon attention.

ANNEXE 1 : <u>BAC S, spécialité mathématiques Session juin 2007</u>

Exercice 3, juin 2007 : l'énoncé.

« La figure est proposée en annexe 1. Elle sera complétée tout au long de l'exercice.
Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C, d'affixes respectives -5 + 6i, -7 − 2i et 3 − 2i. On admet que le point F, d'affixe -2 + i est le centre du cercle Γ circonscrit au triangle ABC.
1. Soit H le point d'affixe -5. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe de centre A qui transforme le point C en le point H.
2. a. Étant donné des nombres complexes z et z', on note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe z'. Soient a et b des nombres complexes. Soit s la transformation d'écriture complexe $z' = a\overline{z} + b$ qui, au point M, associe le point M'.
Déterminer a et b pour que les points A et C soient invariants par s. Quelle est alors la nature de s ?
b. En déduire l'affixe du point E, symétrique du point H par rapport à la droite (AC).
c. Vérifier que le point E est un point du cercle Γ.
3. Soit I le milieu du segment [AC]. Déterminer l'affixe du point G, image du point I par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{2}{3}$. Démontrer que les points H, G et F sont alignés.

Annexe 1 *A compléter et à rendre avec la copie* **Exercice 3**	 »

Exercice 3, juin 2007 : des éléments de corrigés, exemple 1

Je ne présente ici que les réponses aux questions **1.** et **2.b.c..**

1. Soit σ la similitude directe de centre A qui transforme C en H. Le rapport de cette similitude est $k = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{|z_H - z_A|}{|z_C - z_A|} = \dfrac{|-6i|}{|8-8i|} = \dfrac{6}{8\sqrt{2}} = \dfrac{3}{4\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{8}$.

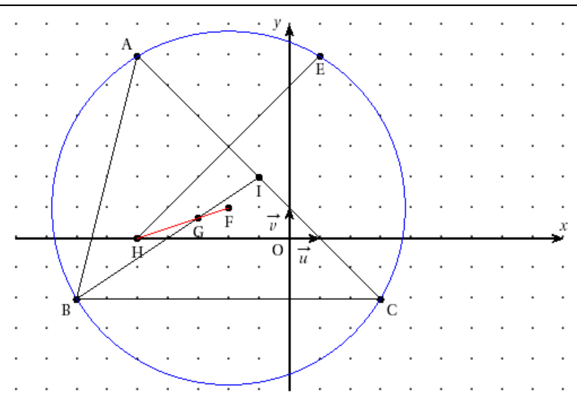
Un angle de cette similitude est : $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH}\right) = \arg\left(\dfrac{z_H - z_A}{z_C - z_A}\right) = \arg\left(\dfrac{-6i}{8-8i}\right)$

$$= \arg\left(-\frac{6}{8} \times \frac{i}{1-i}\right) = \arg\left(-\frac{3}{8} \times (-1+i)\right) = \arg\left(\frac{3}{8}(1-i)\right) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

σ est la similitude directe de centre A, de rapport $\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

2.b. E est le symétrique de H par rapport à la droite (AC), donc E est l'image de H par s ; $z_E = -i\overline{z_H} + 1 + i = -i(-5) + 1 + i = 1 + 6i$.
c. Le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC est FA $= |z_A - z_F| = |5 + 6i + 2i| = |3+5i| = \sqrt{34}$, FE $= |z_E - z_F| = |1 + 6i + 2i| = |3 + 5i| = \sqrt{34}$
FE = FA donc E appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.
(*Remarque : H est en fait l'orthocentre du triangle ABC et on a vérifié une propriété générale dans un triangle disant que le symétrique de l'orthocentre d'un triangle par rapport à un côté de ce triangle appartient au cercle circonscrit*).

<u>Dessin joint :</u>



Il faut noter qu'à la fin de son texte, l'auteur de ces éléments de corrigé écrit :
(remarque : on a remontré dans un cas particulier que dans un triangle non équilatéral, le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité et l'orthocentre d'un triangle sont alignés sur une droite appelée droite d'Euler.)

Exercice 3, juin 2007 : des éléments de corrigés[63], exemple 2

1) Nous connaissons déjà le centre de cette similitude : A

Le rapport de cette similitude est donné par : $\frac{AH}{AC} = \frac{6}{\sqrt{8^2+8^2}} = \frac{6}{8\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$.

L'angle θ de cette similitude est donné par :

$\theta = \left(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AH}\right) = \arg\left(\frac{z_H - z_A}{z_C - z_A}\right) = \arg\left(z_H - z_A\right) - \arg\left(z_C - z_A\right)\ [2\pi]$

Or $\left(z_H - z_A\right) = -6\mathbf{i}$, donc $\arg\left(z_H - z_A\right) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $\left(z_C - z_A\right) = 8 - 8\mathbf{i}$ donc $\arg\left(z_C - z_A\right) = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$. D'où : $\theta = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

La similitude de centre A qui transforme le point C en le point H a pour rapport $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ et pour angle $-\frac{\pi}{4}$.

2) b) On a donc : E = s(H), $z_E = -i \times (-5) + 1 + i = 1 + 6i$

c) Il suffit de calculer les longueurs FE et le rayon R= FA du cercle Γ :

$FE = \left|z_E - z_F\right| = |3 + 5\mathbf{i}| = \sqrt{34}$, $FA = \left|z_A - z_F\right| = |-3 + 5\mathbf{i}| = \sqrt{34}$, donc $E \in \Gamma$.

Remarque : *on peut remarquer que H est l'orthocentre du triangle ABC*. On a donc démontré ici une belle propriété : *le symétrique de l'orthocentre par rapport aux côtés du triangle appartient au cercle circonscrit à ce triangle*.

[63] Je remercie très sincèrement l'auteur de m'avoir autorisé à publier ses éléments de corrigé.


Mais ....?
de qui se
moque-t-on ?

ANNEXE 2 : BAC TECHNOLOGIQUE STI, Génie électronique, ...

Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Problème, juin 2007 : l'énoncé.

Le plan P est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

On s'intéresse dans ce problème à une fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. On note C la courbe représentative de la fonction f dans le plan P. On note ln la fonction logarithme népérien.

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$.
On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g.

1. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   En déduire le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$
2. Calculer $g(1)$ et en déduire l'étude du signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B : détermination de l'expression de la fonction f

On admet qu'il existe deux constantes réelles a et b telles que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f(x) = ax + b - \dfrac{\ln x}{x}$.

1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Calculer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
2. Sachant que la courbe C passe par le point de coordonnées $(1\,;\,0)$ et qu'elle admet en ce point une tangente horizontale, déterminer les nombres a et b.

Partie C : étude de la fonction f

On admet désormais que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f(x) = x - 1 - \dfrac{\ln x}{x}$.

1. **a)** Déterminer la limite de la fonction f en 0 et donner une interprétation graphique de cette limite.
   b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. **a)** Vérifier que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   b) Etablir le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   c) En déduire le signe de $f(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Problème, juin 2007 : des éléments de corrigés[64].

A.1. $g'(x) = \dfrac{2x^2+1}{x}$.

Pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $g'(x) > 0$ d'où g est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2. $g(1) = 0$

Tableau de variation de g.

x	0	1	$+\infty$
Signe de g'(x)	||	+	
Variation de g	||	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	
Signe de g	||	– 0 +	

B.1. $f'(x) = a - \dfrac{1-\ln x}{x^2} = \dfrac{ax^2 - 1 + \ln x}{x^2}$

2. $f(1) = 0$ d'où $a + b = 0$

$f'(1) = 0$ d'où $a - 1 = 0$

Par suite, $a = 1$ et $b = -1$.

C.1.a. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0} x - 1 = -1 \end{array}\right\}$ d'où $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à C.

b. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty \end{array}\right\}$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2.a. $f'(x) = \dfrac{ax^2 - 1 + \ln x}{x^2}$. Pour $a = 1$ on a $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

b.

	0	1	$+\infty$
Signe de f'(x)	–	0	+
Variations de f	$+\infty$ $\searrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

c. 0 est un minimum de f d'où pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $f(x) \geq 0$.

Observations

Aucune rédaction particulière concernant la justification du signe de g n'est attendue.

[64] Ce document est remis à tous les correcteurs des jurys concernés. Il sert de base à la concertation.

3. On considère la droite D d'équation $y = x - 1$.

a) Justifier que la droite D est asymptote à la courbe C.

b) Etudier les positions relatives de la courbe C et de la droite D.

c) Tracer la droite D et la courbe C dans le plan P muni du repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Partie D : Calcul d'aire

On note A la mesure, exprimée en cm^2, de l'aire de la partie du plan P comprise entre la courbe C, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

1. On considère la fonction H définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $H(x) = (\ln x)^2$.
   On désigne par H' la fonction dérivée de la fonction H.
   a) Calculer $H'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   b) En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$
2. **a)** Calculer A.
   b) Donner la valeur de A arrondie au mm^2.

<table>
<tr><th></th><th>Observations</th></tr>
<tr><td>

3. a. $f(x) - (x - 1) = -\dfrac{\ln x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
d'où D est asymptote à la courbe C.

b. Sur $]0\,;\,+\infty[$ le signe de $-\dfrac{\ln x}{x}$ est égal à celui de $-\ln x$.
Si $x \in\ ]0\,;\,1[$, $\ln x < 0$ d'où $-\dfrac{\ln x}{x} > 0$ et C est au dessus de D.
Si $x \in\ ]1\,;\,+\infty[$, $\ln x > 0$ d'où $-\dfrac{\ln x}{x} < 0$ et C est au dessous de D.

c. Tracé correct de C et D.

D.1.a. $H'(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$
b. $F(x) = \dfrac{x^2}{2} - x - \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.
2.a. $A = 4 \times \int_1^e f(x)\,dx = 4\big(F(e) - F(1)\big)$
$= 2e(e - 4)$
b. $A \approx 3{,}90\ cm^2$.

</td><td>

On valorisera la prise en compte des résultats établis par le candidat. On ne pénalisera pas l'absence de tracé de la tangente horizontale.

</td></tr>
</table>

ANNEXE 3 : un essai à partir du **problème de juin 2007, BAC TECHNOLOGIQUE STI, Génie électronique, ...**

Il est rappelé aux candidats qu'il est impératif de respecter les consignes et donc de donner les réponses adaptées (résultats numériques, théorèmes, justifications, raisonnements rédigés ou autres) aux questions et dans les endroits prévus à cet effet.
L'exactitude des résultats, le respect des consignes, la clarté et la précision des raisonnements sont les clés de l'appréciation des copies.

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

On s'intéresse dans ce problème à une fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
On note C la courbe représentative de la fonction f dans le plan P. On note ln la fonction logarithme népérien.

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire
Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 1 + 1n\ x$.
On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g.

<table>
<tr><td>1. Pour x dans]0 ; +∞[, écrire g'(x) sous une forme permettant d'en déduire facilement son signe.</td><td colspan="2">g'(x) =</td></tr>
<tr><td>2. Ecrire g(1) sous la forme d'un nombre rationnel.</td><td colspan="2">g(1) =</td></tr>
<tr><td rowspan="4">3. Compte tenu des résultats précédents et des connaissances à disposition, compléter le tableau ci-contre. Aucune justification n'est demandée.</td><td>Valeurs de x</td><td></td></tr>
<tr><td>Signe de g'(x)</td><td></td></tr>
<tr><td>Sens de variation de g</td><td></td></tr>
<tr><td>Signe de g(x)</td><td></td></tr>
</table>

Partie B : détermination de l'expression de la fonction f
On admet qu'il existe deux constantes réelles a et b telles que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f(x) = ax + b - \dfrac{\ln x}{x}$. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. Pour x dans $]0\ ;\ +\infty[$, écrire f'(x) sous forme fractionnaire.	f'(x) =
2. Ecrire le système d'équations linéaire à deux inconnues vérifié par a et b pour que la courbe C passe par le point de coordonnées (1 ; 0) et qu'elle admette en ce point une tangente horizontale.	

3. Quelles sont les connaissances de cours ayant permis d'obtenir ce système ?

Partie C : étude de la fonction f

On admet que, pour tout nombre réel x appartenant à]0 ; $+\infty$[, $f(x) = x - 1 - \dfrac{\ln x}{x}$.

1. a) Ecrire la limite de la fonction f en 0	$\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$
b) Quelle(s) information(s) graphique(s) tire-t-on de cette limite ?	
2. a) Ecrire la limite de la fonction f en $+\infty$.	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$
b) Citer les théorèmes essentiels utilisés dans le calcul de cette limite.	

3. On considère la droite D d'équation $y = x - 1$.

a) Justifier que la droite D est asymptote à la courbe C au voisinage de $+\infty$.
b) Quel(s) problème(s) résoudre pour en déduire les positions relatives de la courbe C et de la droite D ?
c) Résoudre ce(s) problème(s) et donner les positions relatives de C et de D.

4. Un calcul permet d'établir que pour tout réel x de $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

a) Présenter un calcul établissant le résultat précédent.

b) Compte tenu des résultats précédents et des connaissances à disposition, compléter le tableau ci-contre. Aucune justification n'est demandée.

Valeurs de x	
Signe de f'(x)	
Variation de f	
Signe de f(x)	

5. Représenter C dans le plan P muni du repère $\left(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}\right)$, en faisant apparaître les différents renseignements tirés des réponses aux questions précédentes, un tableau de valeurs adapté (valeurs éventuellement approchées) et les coefficients directeurs des tangentes représentées.

On appelle E la partie du plan P comprise entre la courbe C, l'axe des abscisses, et les droites d'équations x = 1 et x = e.

6. Représenter les bords de E en rouge sur le dessin de la question partie C, 5..

Partie D : Calcul de l'aire de E.

On suppose que le repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ a 2cm pour unité graphique, et on note A le nombre d'unités d'aire de E.

On considère la fonction H définie sur]0 ; +∞[par H(x) = $(\ln x)^2$. Un calcul permet d'obtenir, sur]0 ; +∞[, H'(x) = $\frac{2\ln x}{x}$.

1. Voici comment peut-être calculé H'(x) : sur]0 ; +∞[par H(x) = $(\ln x)^2$ <u>**donc**</u> sur]0 ; +∞[par H'(x) = $2\times\frac{1}{x}\times\ln x$. Quels théorèmes (propriétés, règles de calculs, ...), ont permis d'obtenir H'(x) ?	
2.**a)** Présenter un calcul justifié de A.	
b) <u>En prenant 2,718</u> comme valeur de e, écrire une valeur de l'aire de E arrondie au mm^2.	

ANNEXE 4 : éléments pour un corrigé de l'essai à partir du **problème de juin 2007, <u>BAC TECHNOLOGIQUE STI, Génie électronique, ...</u>**

Il est rappelé aux candidats qu'il est impératif de respecter les consignes et donc de donner les réponses adaptées (résultats numériques, théorèmes, justifications, raisonnements rédigés ou autres) aux questions et dans les endroits prévus à cet effet. **L'exactitude des résultats, le respect des consignes, la clarté et la précision des raisonnements sont les clés de l'appréciation des copies.**

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

On s'intéresse dans ce problème à une fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
On note C la courbe représentative de la fonction f dans le plan P. On note ln la fonction logarithme népérien.

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire
Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$.
On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g.

1. Pour x dans $]0\ ;\ +\infty[$, écrire g'(x) sous une forme permettant d'en déduire facilement son signe.	$g'(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$ $\left[\text{ou } g'(x) = \dfrac{2x^2+1}{x}\right]$
2. Ecrire g(1) sous la forme d'un nombre rationnel.	$g(1) = 0$

3. Compte tenu des résultats précédents et des connaissances à disposition, compléter le tableau ci-contre. Aucune justification n'est demandée.

Valeurs de x	0		1		$+\infty$
Signe de g'(x)	||		+		
Sens de variation de g			$\nearrow$		
Signe de g(x)	||	−	0	+	

Partie B : détermination de l'expression de la fonction f
On admet qu'il existe deux constantes réelles a et b telles que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f(x) = ax + b - \dfrac{\ln x}{x}$. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. Pour x dans $]0\ ;\ +\infty[$, écrire f'(x) sous forme fractionnaire.	$f'(x) = \dfrac{ax^2 - 1 + \ln x}{x^2}$
2. Ecrire le système d'équations linéaire à deux inconnues vérifié par a et b pour que la courbe C passe par le point de coordonnées (1 ; 0) et qu'elle admette en ce point une tangente horizontale.	$\begin{cases} a+b=0 \\ a-1=0 \end{cases}$

3. Quelles sont les connaissances de cours ayant permis d'obtenir ce système ?
Soit C la courbe représentative d'une fonction f. Dire que C passe par $P(x_0 ; y_0)$ signifie $y = f(x)$. Si f est dérivable en x_0, dire que C, passant par $P(x_0 ; y_0)$, admet en ce point une tangente horizontale signifie $f'(x_0) = 0$.

Partie C : étude de la fonction f

On admet que, pour tout nombre réel x appartenant à $]0 ; +\infty[$, $f(x) = x - 1 - \dfrac{\ln x}{x}$.

1. a) Ecrire la limite de la fonction f en 0	$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$
b) Quelle(s) information(s) graphique(s) tire-t-on de cette limite ?	La droite d d'équation $x = 0$ est asymptote à C.
2. a) Ecrire la limite de la fonction f en $+\infty$.	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
b) Citer les théorèmes essentiels utilisés dans le calcul de cette limite.	Th. : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ Th. : limite d'une somme, limite d'un produit (pas de forme indéterminée)

3. On considère la droite D d'équation $y = x - 1$.

a) Justifier que la droite D est asymptote à la courbe C au voisinage de $+\infty$.
Par définition, une droite D d'équation $y = mx + p$ (m et p constantes) est asymptote, au voisinage de $+\infty$, à une courbe C représentative d'une fonction f si $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - (mx + p)\right) = 0$. Ici, D a pour équation $y = x - 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - (x - 1)\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ (th. cité en C.2.b). Par suite D est asymptote à C au voisinage de $+\infty$.
b) Quel(s) problème(s) résoudre pour en déduire les positions relatives de la courbe C et de la droite D ?
Par exemple, étudier le signe de $f(x) - (x - 1)$ sur $]0 ; +\infty[$.
c) Résoudre ce(s) problème(s) et donner les positions relatives de C et de D.
Sur $]0 ; +\infty[$, $f(x) - (x - 1) = \dfrac{\ln x}{x}$. Sur $]0 ; +\infty[$, $x > 0$, donc $f(x) - (x - 1)$ a le même signe que ln x. On sait (propriétés de la fonction ln) que : $\ln x > 0$ si et seulement si $x > 1$ et $\ln 1 = 0$. On en déduit : si $0 < x < 1$ alors $f(x) - (x - 1) < 0$ et C est en dessous de D si $1 < x$ alors $f(x) - (x - 1) > 0$ et C est au dessus de D D et C se coupent au point d'abscisse 1.

4. Un calcul permet d'établir que pour tout réel x de]0 ; +∞[, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

a) Présenter un calcul établissant le résultat précédent.

Pour tout x de]0 ; +∞[, $f(x) = x - 1 - \dfrac{\ln x}{x}$,

donc, pour x dans]0 ; +∞[, $f'(x) = 1 - \dfrac{x \times \frac{1}{x} - \ln x}{x^2} = 1 - \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2}$.

Or $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$, d'où $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) Compte tenu des résultats précédents et des connaissances à disposition, compléter le tableau ci-contre. Aucune justification n'est demandée.

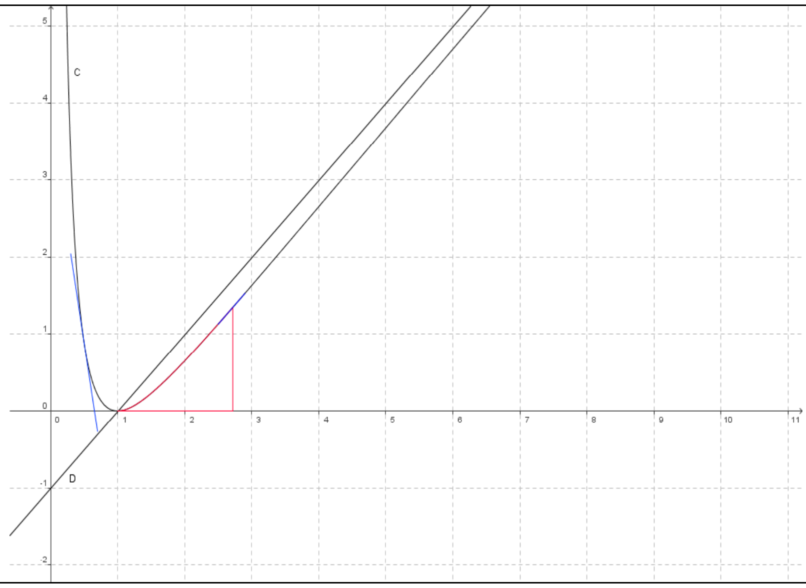
Valeurs de x	0			1			+∞
Signe de f'(x)		–		0		+	
Variation de f	+∞	↘		0		↗	+∞
Signe de f(x)		+		0		+	

4. Représenter C dans le plan P muni du repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, en faisant apparaître les différents renseignements tirés des réponses aux questions précédentes, un tableau de valeurs adapté et les coefficients directeurs des tangentes représentées.

Tableau de valeurs utilisé (valeurs éventuellement approchées)

x	f(x)	f'(x)
1	0	0
0,5	0,88	-5,77
e	1,35	1

Représentation



On appelle E la partie du plan P comprise entre la courbe C, l'axe des abscisses, et les droites d'équations x = 1 et x = e.

6. Représenter les bords de E en rouge sur le dessin de la question partie C, 5.

Partie D : Calcul de l'aire de E.

On suppose que le repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ a 2cm pour unité graphique, et on note A le nombre d’unités d’aire de E.

On considère la fonction H définie sur]0 ; +∞[par $H(x) = (\ln x)^2$. Un calcul permet d’obtenir, sur]0 ; +∞[, $H'(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$.

1. Voici comment peut-être calculé H’(x) : sur]0 ; +∞[par $H(x) = (\ln x)^2$ <u>**donc**</u> sur]0 ; +∞[par $H'(x) = 2\times\dfrac{1}{x}\times\ln x$. Quels théorèmes (propriétés, règles de calculs, …), ont permis d’obtenir H’(x) ?	Th. : $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ Th. : pour $x > 0$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ Ou Th. : pour $x > 0$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ Th. : $(vou)' = u'(v'ou)$

<table>
<tr><td colspan="2">2.a) Présenter un calcul justifié de A.</td></tr>
<tr><td>La fonction f étant dérivable et positive sur [1 ; e], alors (th.1) $A = \int_1^e f(x)\,dx$.

De plus, si F est une primitive de f sur [1 ; e], alors (th.2 et déf.) $\int_1^e f(x)\,dx = F(e) - F(1)$.
Sachant que, sur]0 ; +∞[, $f(x) = x - 1 - \dfrac{\ln x}{x}$
$= x - 1 - \dfrac{1}{2}.\dfrac{2\ln x}{x}$, et que $H'(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$,
on en déduit que (th.3), sur]0 ; +∞[,
$F(x) = \dfrac{x^2}{2} - x - \dfrac{1}{2}H(x) = \dfrac{x^2}{2} - x - \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.
D’où (th.4)
$A = \left[\dfrac{e^2}{2} - e - \dfrac{1}{2}(\ln e)^2\right] - \left[\dfrac{1^2}{2} - 1 - \dfrac{1}{2}(\ln 1)^2\right]$
$= \dfrac{e^2}{2} - e$.</td>
<td>Th.1 : Si f est dérivable et positive sur [a ; b], alors le nombre d’unités A de la partie du plan comprise entre l’axe des abscisses, la courbe représentant f et les droites d’équation x = a et x = b est donné par $A = \int_a^b f(x)\,dx$.

Déf. : Si F’ = f sur [a ; b], alors F est appelée primitive de f sur [a ; b].
Th.2 : Si F’ = f sur [a ; b], alors $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Th.3 : Si F’ = f et G’ = g alors aF + bG est une primitive de af + bg.

Th.4 : ln e = 1 et ln 1 = 0.</td></tr>
</table>

b) <u>En prenant 2,718</u> comme valeur de e, écrire une valeur de l’aire de E arrondie au mm^2.	3,90

MISE EN PAGE :
Françoise BESSE

COMITE DE REDACTION ET DE LECTURE :
Fakredine GHOMMID
Patrick GABRIEL
Frédéric METIN
Marie-Noëlle RACINE

REDACTEUR EN CHEF :
Patrick GABRIEL

DIRECTEUR DE LA PUBLICATION :
Patrick GABRIEL, Directeur de l'IREM

DEPOT LEGAL :
n° 182 – 2ème semestre 2007

IMPRESSION :
Service Reprographie

FEUILLE DE VIGNE
Université de Bourgogne – UFR Sciences et Techniques
IREM
9 Avenue Alain Savary – BP 47870 – 21078 Dijon cedex
☎ 03 80 39 52 30 – Fax 03 80 39 52 39
@ : iremsecr@u-bourgogne.fr.
http://www.u-bourgogne.fr/irem