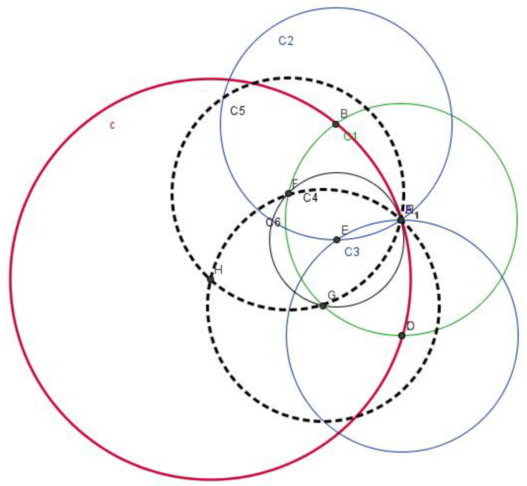
N° 116 – Juin 2010

Feuille de Vigne

Irem de Dijon

- Le problème de Napoléon-Mascheroni en Première S
- Les jeux diophantiens
- Changeons d'unité d'aire



Revue Trimestrielle

Issn 0246-5752

Sommaire

- Bloc-notes 1
- Jeux et Problèmes 3

Articles

- Le problème de Napoléon Mascheroni en première S
  Jean TERRERAN 7
- Les jeux diophantiens
  Michel LAFOND 15
- Changeons d'unité d'aire "Avec la vieille géométrie élémentaire, du neuf peut encore advenir"
  Henry PLANE 23

Éditorial

C'est avec une grande tristesse que j'écris cet éditorial pour le n°116 de notre revue. Jean Terreran, l'auteur de l'un des articles, est décédé brutalement le 23 juin d'un arrêt cardiaque.

Jean Terreran venait de prendre sa retraite (au mois d'octobre 2009), après avoir enseigné de nombreuses années au lycée Janot de Sens, dont il avait profondément marqué l'équipe de mathématiques. Il avait en effet fondé, avec quelques autres professeurs, une équipe au sens le plus fort du terme : un groupe de personnes animées d'un même désir de travailler ensemble de manière approfondie, avec tout ce que cela peut comporter de moments forts, d'engueulades et de satisfactions.

Syndicaliste de tous les combats, membre actif du Réseau Education sans Frontières, Jean a surtout été pour nous le responsable du groupe d'histoire des mathématiques de l'IREM de Dijon, groupe qu'il animait avec tact et conviction depuis quelques années. Nous avons également partagé de nombreux moments lors de stages à Auxerre, dans les réunions à l'IREM de Dijon, ou à la Commission inter-IREM Epistémologie et Histoire, et enfin dans les congrès de l'APMEP. Les stages à Auxerre étaient des moments de plaisir, grâce à lui et son groupe de collègues de Sens particulièrement fidèle à nos sessions.

L'article « Le problème de Napoléon en Première S » est signé avec humour « Jean Terreran, jeune retraité du lycée de Sens » ; Jean n'aura pas profité très longtemps de cette retraite qu'il avait peut-être un peu redoutée comme tous les pédagogues passionnés, mais qu'il goûtait avec beaucoup de bonheur : il nous affirmait encore récemment qu'il n'avait pas le temps de s'ennuyer, et que son nouveau rythme lui convenait fort bien, mis à part la disparition des vacances…

Il aurait sans doute beaucoup aimé les deux articles qui accompagnent le sien dans ce numéro, parce que ce sont des textes excitants pour le professeur de mathématiques ; il aurait sûrement travaillé la proposition d'Henry Plane de « changer d'unité d'aire » et celle de Michel Lafond d'inventer des jeux diophantiens : la retraite de Jean, même sans élèves du lycée Janot, n'était pas dénuée de mathématiques et de réflexion sur leur sens.

Nous perdons un bon collègue, un ami, un camarade. Toutes nos affectueuses pensées vont à son épouse Viviane.

Frédéric Métin.

NOUVELLES ACQUISITIONS A LA BIBLIOTHEQUE

Les ouvrages de la bibliothèque sont à la disposition des enseignants de l'Académie

BOURBAKI, N. Eléments de mathématiques. Topologie générale. Livre II. Chapitre 1 : Structures topologiques. Chapitre 2 : Structures uniformes. Herman 1965.
BOURBAKI, N. Eléments de mathématiques. Livre XX, chapitre 3. Théorie des ensembles. Ensembles ordonnés cardinaux, nombres entiers. Herman 1963.
BOURBAKI, N. Eléments de mathématiques. Livre VI. Algèbre. Chapitre 2. Algèbre linéaire. Herman 1967.
BOURBAKI, N. Eléments de mathématiques. Livre II. Fascicule VII. Algèbre. Chapitre 3. Algèbre multilinéaire. Herman 1958.
ANSEL Jean-Pascal. DUCEL Yves. Exercices et corrigés en théorie de la mesure et de l'intégration. $2^{\text{ème}}$ cycle universitaire. Ellipses 1995.
ANSEL Jean-Pascal. DUCEL Yves. Exercices et corrigés en théorie des probabilités. $2^{\text{ème}}$ cycle universitaire. Ellipses 1996.
ROBERT A., LATTUATI Marie, PENNINCKX J. L'enseignement des mathématiques au lycée : un point de vue didactique. Ellipses 1999.
KOSTYRKO, Pavel. Acta didactica... Issue 9. 2009
DENIERE Jocelyne et Lysiane. 1200 exercices de mathématiques. Classe $6^{\text{e.}}$
DIENES Z.P. La géométrie par les transformations 1. Topologie, géométrie affine et projective.
DIENES Z.P. La géométrie par les transformations 1. Topologie, géométrie affine et projective. (fiches).
LEHNING Hervé. Transformations et fonctions. Représentation et analyse. Ellipses2000.
AZOULAY E. COHEN D. Statistique. Cours et exercices. SEES 1978.
COMBES François. Algèbre et géométrie. Capes et agrégation. Bréal. 1998.
LACROIX S.F. Traité élémentaire du calcul des probabilités. Section première. Les caractères d'Ulysse. 2010.
COLONVAL Matthieu. ROUMADNI Abdelatif. Les mathématiques au quotidien. Ellipses 2009.
VANDEBROUCK Fabrice. La classe des mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants. Octarès 2008 puis 2010.
LE MASNE Roger. Les polyèdres ou la beauté des mathématiques. 2010

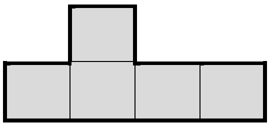
Jeux et Problèmes

Michel LAFOND
mlafond001@yahoo.fr

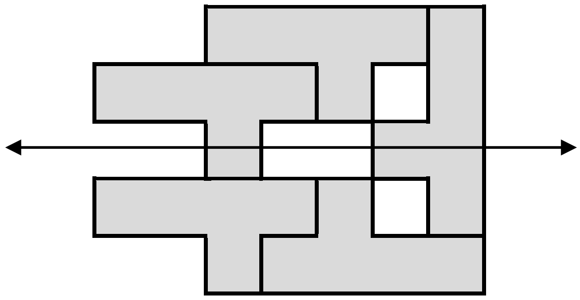
JEU - 66.

Soit F un ensemble du plan sans axe de symétrie.
Le jeu consiste à disposer dans le plan un <u>nombre impair</u> de figures F, sans empiètement, de manière à obtenir une figure ayant un axe de symétrie. Le retournement est autorisé.
Exemple :

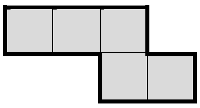
À partir de 5 figures F =



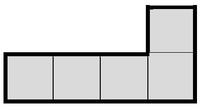
On obtient :



Faire de même avec les figures ci-dessous :



puis



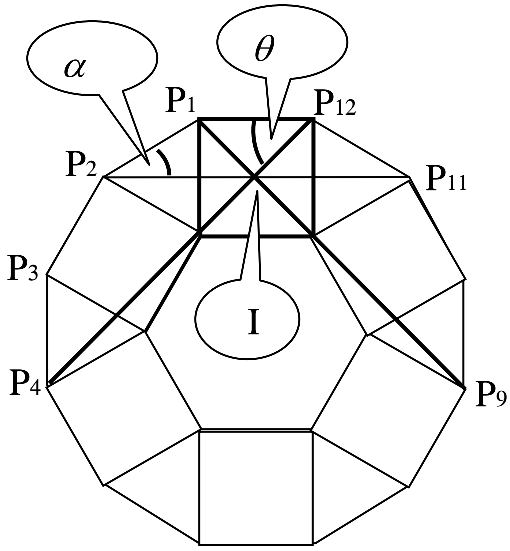
PROBLÈME - 66.

Démontrer que tous les entiers dont l'écriture décimale commence et finit par 1, et qui alternent les 1 et les 0, c'est à dire N = 1 0 1 0 1 0 --- 1 0 1 sont des nombres composés (non premiers) sauf 101.

JEU - 65.

Démontrer simplement que dans un dodécagone régulier P_1 P_2 …P_{12} les diagonales P_1P_9, P_2P_{11} et P_4P_{12} sont concourantes.

Solution :



Partageons le dodécagone en 6 carrés, 6 triangles équilatéraux et un hexagone central comme sur la figure ci-contre :
L'angle θ entre $P_{12}P_1$ et $P_{12}P_4$ mesure la moitié de l'angle au centre (90°) soit 45°.
Par symétrie l'angle θ' entre P_1P_{12} et P_1P_9 mesure aussi 45°.
L'intersection I de P_4P_{12} et P_1P_9 est donc le centre du carré en gras.
Par ailleurs, l'angle α entre P_2P_1 et P_2P_{11} mesure la moitié de l'angle au centre (60°) soit 30°. Ce qui prouve que la diagonale P_2P_{11} est axe de symétrie pour les deux triangles équilatéraux du haut, et donc aussi axe de symétrie du carré en gras.
Par suite, P_2P_{11} passe par I, ce qu'il fallait démontrer.

PROBLÈME - 65.

Soit la suite a_n définie par $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ et $\forall\ n \geq 4$

$$a_n = \frac{1}{7}a_{n-1} + \frac{1}{3}a_{n-2} + \frac{1}{2}a_{n-3}$$

Démontrer que $S = \sum_{n=1}^{n=+\infty} a_n = 100$.

Solution :

Soit (H_n) l'hypothèse de récurrence : $a_n < 1{,}04 \times 0{,}99^n$

(H_1), (H_2), (H_3) sont vérifiées. Si (H_{n-3}) (H_{n-2}) (H_{n-1}) sont vérifiées, alors

$$a_n = \frac{1}{7}a_{n-1} + \frac{1}{3}a_{n-2} + \frac{1}{2}a_{n-3} < 1{,}04 \left(\frac{1}{7}0{,}99^{n-1} + \frac{1}{3}0{,}99^{n-2} + \frac{1}{2}0{,}99^{n-3}\right) \text{ d'où}$$

$$a_n < 1{,}04 \times 0{,}99^{n-3} \times \left(\frac{1}{7}0{,}99^2 + \frac{1}{3}0{,}99 + \frac{1}{2}\right)$$

Or $\left(\frac{1}{7}0{,}99^2 + \frac{1}{3}0{,}99 + \frac{1}{2}\right) < 0{,}99^3$ donc $a_n < 1{,}04 \times 0{,}99^n$ et (H_n) est vérifiée.

La récurrence fonctionne, (H_n) est vraie pour tout n ce qui permet de majorer $\sum_{n=1}^{n=+\infty} a_n$ par $1{,}04 \sum_{n=1}^{n=+\infty} 0{,}99^n = 1{,}04 \times 99 < 103$ prouvant ainsi la convergence de S.

Pour le calcul :

$$S = \sum_{n=1}^{n=+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + (\frac{1}{7}a_3 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{2}a_1) + (\frac{1}{7}a_4 + \frac{1}{3}a_3 + \frac{1}{2}a_2) + ...$$

Regroupons les facteurs des 3 fractions :

$$S = 3 + \frac{1}{7}(a_3 + a_4 + ...) + \frac{1}{3}(a_2 + a_3 + ...) + \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + ...)$$

$$S = 3 + \frac{1}{7}(S - (a_1 + a_2)) + \frac{1}{3}(S - a_1) + \frac{1}{2}S$$

$$S = 3 + \frac{1}{7}(S - 2) + \frac{1}{3}(S - 1) + \frac{1}{2}S = \frac{41}{42}S - \frac{50}{21}$$ d'où **S = 100**.

M. Lucien Sautereau a envoyé des solutions pour JEU - 65 et PROBLEME - 65.

Le problème de Napoléon-Mascheroni en première S

Jean TERRERAN, jeune retraité du lycée de Sens

Mots clés : axe radical ; centre de cercle ; cercle ; constructions au compas ; Mascheroni ; problème de Napoléon ; produit scalaire ; puissance d'un point ; tangentes ; triangles semblables.

Résumé : problème de Napoléon : il s'agit, sous la forme d'un problème du niveau de la classe de 1^{e} S, de justifier la construction du centre d'un cercle à l'aide du produit scalaire, en utilisant la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle et d'axe radical de deux cercles.
On remarque que ce problème peut également se traiter avec des triangles semblables.

Il est facile de retrouver le centre perdu d'un cercle donné. Il suffit d'y inscrire un triangle et de construire le point d'intersection de ses médiatrices.
Mais en 1672 un géomètre, Mohr, montra que toute construction à la règle et au compas pouvait s'effectuer avec le compas seul, ce que réussit Mascheroni, ami de Napoléon, pour le centre du cercle. Les adorateurs de l'Empereur donnèrent son nom à ce problème. Réjouissons-nous de cette victoire obtenue sans tirer ni un seul trait ni un seul coup de canon.
La justification de cette construction, à l'aide du produit scalaire, a été proposée à une classe de Première S du lycée de Sens dans le devoir de recherche suivant.

Enoncé :

Dans ce problème, on utilisera notamment les résultats suivants, établis en cours :

- Si A, B, C sont trois points alignés, alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AC}$.
- Si $\vec{u}$ est un vecteur non nul et k un nombre réel, alors l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\vec{u} = k$ est une droite de vecteur normal $\vec{u}$.

On réalisera les constructions sur les figures de la feuille annexe, à joindre avec la copie.

Partie A : Puissance d'un point par rapport à un cercle

1° (C) est un cercle de centre O et de rayon R, M est un point du plan.
Une droite passant par M coupe le cercle en deux points appelés A et B. *(fig 1)*
On appelle B' le point du cercle diamétralement opposé à B.

a. Montrer que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MB'}.\overrightarrow{MB}$.

b. Montrer que $\overrightarrow{MB'}.\overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2$.

c. En déduire que le produit scalaire $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ ne dépend pas du choix de la sécante au cercle passant par M. (Il s'appelle *puissance du point* M *par rapport au cercle* (C)).

2° (C) et (C') sont deux cercles de centres respectifs O et O' distincts et de rayons respectifs R et R'.
On cherche l'ensemble Δ des points M qui ont même puissance par rapport à (C) et à (C').

a. Montrer que M appartient à Δ si et seulement si $MO'^2 - MO^2 = R'^2 - R^2$.

b. En déduire que M appartient à Δ si et seulement si $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{OO'} = \dfrac{R'^2 - R^2}{2}$, où I désigne le milieu du segment $[OO']$.

c. En déduire la nature de l'ensemble Δ. (Δ s'appelle l'*axe radical* des cercles (C) et (C')).

d. Application : Déterminer l'axe radical de deux cercles sécants en E et F. *(fig 2).*

Partie B : Problème de Napoléon

Question préliminaire :

(C) est un cercle donné sans son centre *(fig 3)*.
Soit A un point de (C).

* Construire un cercle (C_1) de centre A qui coupe (C) en deux points B et D.
* Construire le cercle (C_2) (respectivement (C_3)) de centre B (respectivement D) qui passe par A.
(C_2) et (C_3) se recoupent en E.
* Construire le cercle (C_4) de centre E qui passe par A. Il coupe (C_1) en deux points F et G.
* Construire le cercle (C_5) (respectivement (C_6)) de centre F (respectivement G) qui passe par A.
(C_5) et (C_6) se recoupent en H.

Conjecturer la position de H par rapport au cercle donné (C).

Le but de cette partie est de valider cette conjecture.

1° a. Construire l'axe radical des cercles (C) et (C_1) *(fig 4)*.

b. Soit I le point d'intersection des droites (BD) et (OA).
Montrer que $IA^2 - AB^2 = IO^2 - OA^2$.
En déduire que $\left(2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AO}\right).\overrightarrow{OA} = AB^2 - OA^2$, puis que $\overline{IA} = \dfrac{AB^2}{2\overline{OA}}$.

2° Soit J le point d'intersection des droites (FG) et (EA) *(fig 5)*.

Montrer, en s'inspirant du 1°, que $\overline{JA} = \dfrac{AB^2}{2\overline{EA}}$.

3° a. Montrer que $\overline{IA} = \dfrac{\overline{EA}}{2}$; en déduire que $\dfrac{AB^2}{2\overline{EA}} = \dfrac{\overline{OA}}{2}$.

b. En déduire que J est le milieu du segment [OA], puis que H est bien le centre du cercle (C) donné.

Nom : .... Prénom : .... **Feuille annexe :**

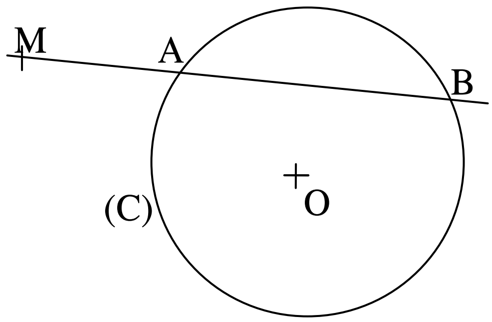


fig.1

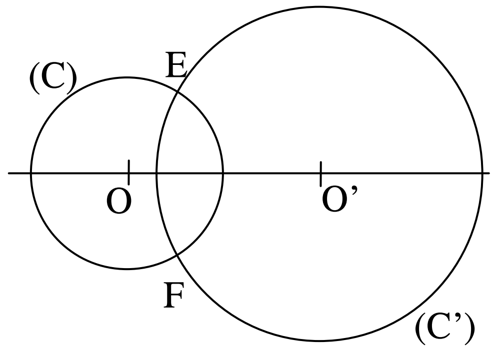


fig.2

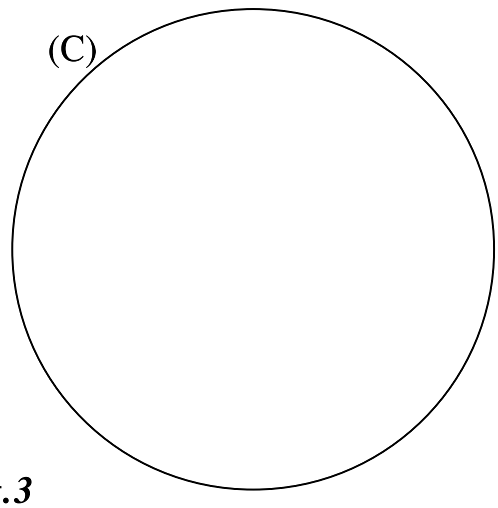


fig.3

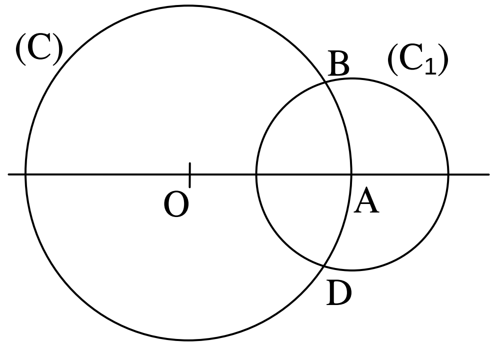


fig.4

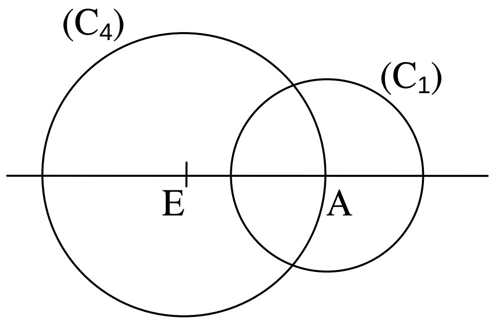


fig.5

Commentaires :

Il faut d'abord noter l'incrédulité de certains élèves face à l'intérêt de Napoléon pour les mathématiques.
Si l'axe radical est bien trouvé, il y a eu quelques libertés prises avec la rigueur ainsi que des « raccourcis » bien commodes pour arriver à tout prix aux relations demandées dans la partie A : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2 . \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{OO'} = \dfrac{R'^2 - R^2}{2}$.
La partie B est moins bien réussie car les élèves maîtrisent mal la notion de mesure algébrique.

<u>Corrigé :</u>

Partie A : Puissance d'un point par rapport à un cercle

1°a. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'A}\right).\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MB'}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{B'A}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MB'}.\overrightarrow{MB}$ car B'AB est rectangle en A.

b. $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OB}$, donc

$\overrightarrow{MB'} = \overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB'}\right).\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right) = \left(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OB}\right).\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right) = MO^2 - R^2$.

c. Le produit scalaire $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2$ ne dépend que de M, de O et de R, c'est-à-dire du point et du cercle et non des points A et B c'est-à-dire du choix de la sécante au cercle issue de M.

2° a. M appartient à Δ signifie que les puissances sont égales, soit :

$$MO'^2 - R'^2 = MO^2 - R^2 .$$

Ce qui revient à dire que $MO'^2 - MO^2 = R'^2 - R^2$[1]. (1)

b.

$$MO'^2 - MO^2 = \left(\overrightarrow{MO'} + \overrightarrow{MO}\right).\left(\overrightarrow{MO'} - \overrightarrow{MO}\right) = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IO'} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IO}\right).\left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MO'}\right) = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{OO'}$$

car I étant le milieu du segment $[OO']$, $\overrightarrow{IO'} + \overrightarrow{IO} = \overrightarrow{O}$.

c. *O* ≠ *O'*, donc $\overrightarrow{OO'} \neq \overrightarrow{O}$, $\dfrac{R'^2 - R^2}{2}$ est un nombre réel, donc l'ensemble Δ est une droite perpendiculaire à (*OO'*).

---

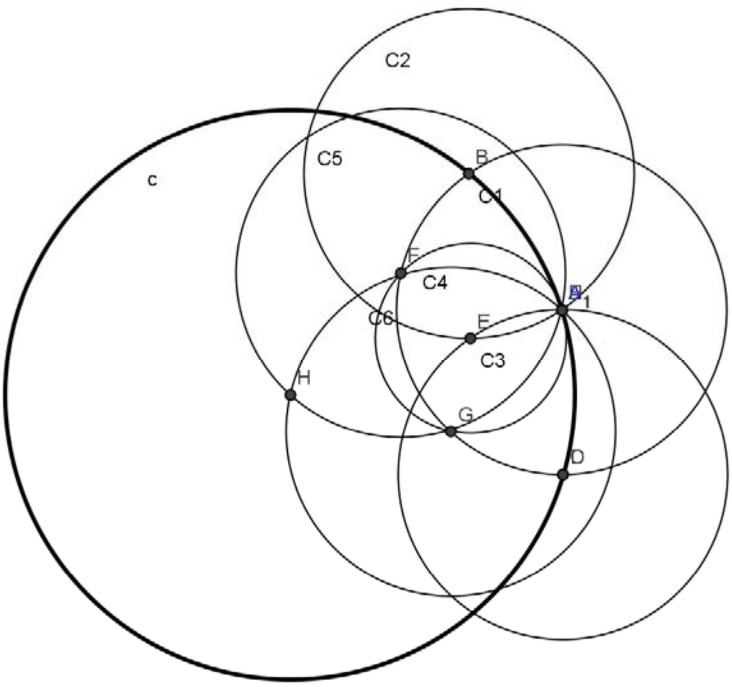
[1] Équivaut donc à 2 $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{OO'}$ = R'² – R², soit à : $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{OO'} = \dfrac{R'^2 - R^2}{2}$

Remarque : si les cercles sont concentriques, $O = O'$, $\overrightarrow{OO'} = \vec{O}$, $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{OO'} = 0$, mais dans ce cas $R \neq R'$, (sinon les deux cercles seraient confondus) et $\frac{R'^2 - R^2}{2} \neq O$: il n'y a pas d'axe radical dans ce cas.

d. La puissance de E par rapport à (C) est $EO^2 - R^2 = 0$ car E est sur (C).
La puissance de E par rapport à (C') est $EO'^2 - R'^2 = 0$ car E est sur (C').
E a donc même puissance par rapport à (C) et (C'), il est sur l'axe radical.
Pour la même raison, F est sur cet axe.
Conclusion, l'axe radical des (C) et (C') est la droite (EF).

Partie B : Problème de Napoléon

Question préliminaire :



Le point H semble être le centre du cercle (C).

1° a. L'axe radical des cercles (C) et (C_1) sécants en B et D est la droite (BD) d'après A.2°d.

b. I est sur l'axe radical des cercles (C) et (C'), donc $IA^2 - AB^2 = IO^2 - OA^2$, car $AB = R$ et $OA = R'$. On a alors : $IA^2 - IO^2 = AB^2 - OA^2$, avec

$$IA^2 - IO^2 = \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IO}\right).\left(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IO}\right) = \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AO}\right).\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA}^2$$

Il vient : $2\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}^2 = AB^2 - OA^2$ soit $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{OA}=\dfrac{AB^2}{2}$.

Mais I, O, A sont alignés, donc $\overline{IA}\times\overline{OA}=\dfrac{AB^2}{2}$ et finalement : $\overline{IA}=\dfrac{AB^2}{2\overline{OA}}$.

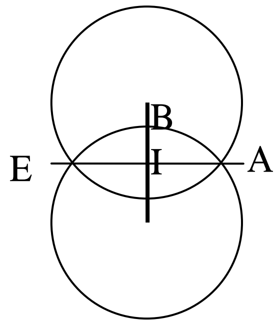
2° (C_1) et (C_4) se coupent en F et G, (FG) est donc leur axe radical.

J est sur cet axe, donc $JA^2 - AB^2 = JE^2 - EA^2$, d'où $JA^2 - JE^2 = AB^2 - AE^2$, et comme ci-dessus, en remplaçant I par J et O par E, $\overline{JA}=\dfrac{AB^2}{2\overline{EA}}$.

3°a. Les cercles (C_2) de centre B et (C_3) de centre D se coupent en A et E.
BE = BA et DE = DA, donc (BD) est la médiatrice de [EA].

Par suite, I est le milieu de [EA] et on a $\overline{IA}=\dfrac{\overline{EA}}{2}$

Mais $\overrightarrow{IA}=\dfrac{AB^2}{2\overrightarrow{OA}}$, donc $\dfrac{AB^2}{2\overrightarrow{OA}}=\dfrac{\overrightarrow{EA}}{2}$ ou $\dfrac{AB^2}{2\overrightarrow{EA}}=\dfrac{\overrightarrow{OA}}{2}$.



b. En 2°, on a vu que $\overrightarrow{JA}=\dfrac{AB^2}{2\overrightarrow{EA}}$, donc $\overrightarrow{JA}=\dfrac{\overrightarrow{OA}}{2}$, soit J milieu de [$OA$]. Or, (FG) est la médiatrice de [HA].par construction, J est donc le milieu de [HA].

Remarques :

Cette notion de puissance était probablement connue avant l'apparition du produit scalaire. Par exemple, pour résoudre le problème suivant :

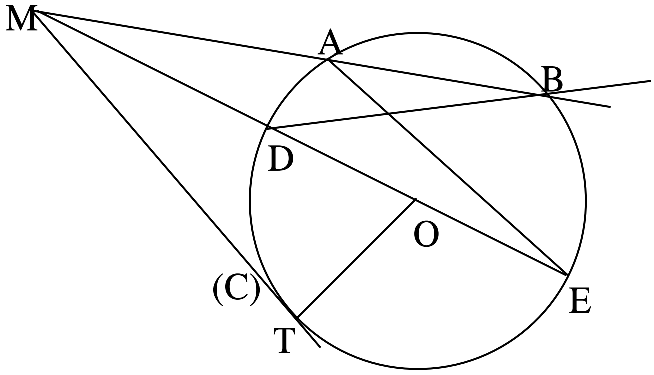
Deux cercles (C) et (C') étant donnés. Soit T et T' les points de contacts respectifs des tangentes issues d'un point M à ces deux cercles. Comment choisir M pour que $MT = MT'$?

Ce problème pouvait se résoudre à l'aide des triangles semblables comme suit :

Les points M, A et B étant alignés, le produit scalaire $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ n'est autre que MAxMB ou $-MA$xMB suivant que le point M est à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle.

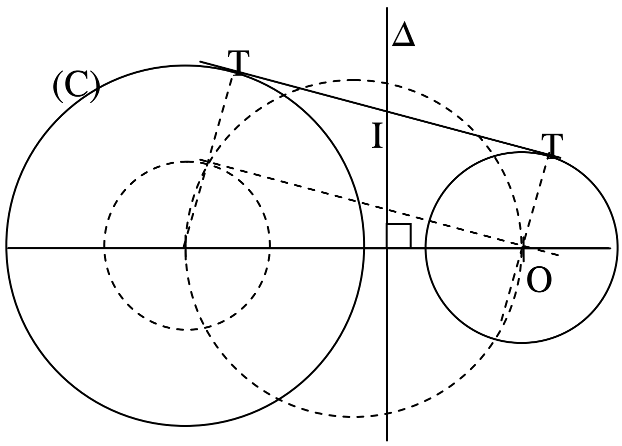
Ce problème pouvait alors se traiter en Seconde (avant la disparition des triangles semblables du programme).

Les triangles MAE et MDB sont semblables ($\widehat{MBD} = \widehat{MEA}$, ils interceptent le même arc et l'angle en M est commun). On en déduit :
$\frac{MB}{ME} = \frac{MD}{MA}$, soit : MAxMB = MDxME.
Mais MDxME = (MO – R)(MO + R).
D'où : MAxMB = MO² – R².



(Si M est à l'intérieur du cercle, on obtient : MAxMB = R² – MO².)
Dans le triangle OMT, rectangle en T, on a OM² – R² = MT².

Application : La puissance du point par rapport au cercle est donc égale à MT^2, cette dernière relation permet de construire l'axe radical de deux cercles sans points communs, c'est-à-dire quand la construction de la partie A2° d) est en défaut.



On construit une tangente (*TT'*) commune : le petit cercle en pointillés a pour rayon $R - R'$; la tangente menée de *O'* à ce cercle s'obtient grâce au grand cercle en pointillés ; on en déduit (*TT')*.

Le milieu I de [TT'] vérifie IT² = IT'², il est donc sur l'axe radical.
Cet axe est alors la perpendiculaire à (OO') passant par I. De tout point de M de Δ, on peut mener des tangentes égales telles que MT² = MT'², soit MT = MT' sur les deux cercles. Il suffit donc de choisir M sur cette droite.

Les jeux diophantiens

Michel LAFOND,

Mots clé : Arithmétique ; logique ; jeux ; stratégie.

Résumé : Un lien entre Jeux et Mathématiques.

Explorons le lien très étroit qui existe entre Jeux et Mathématiques.

Il s'agit en fait beaucoup plus que d'un lien, puisque nous allons voir que dans le domaine de l'arithmétique des nombres entiers naturels, à de très nombreux énoncés comme par exemple

E : "Il existe une infinité de nombres premiers"

on peut associer un jeu à deux joueurs A, B dans lequel A et B jouent à tour de rôle, A jouant le premier, de telle sorte que :

Affirmer que E est vrai équivaut à affirmer qu'il existe une stratégie gagnante pour le joueur A.

En ce qui concerne l'énoncé E : "Il existe une infinité de nombres premiers" mentionné plus haut, le jeu associé est décrit en détail dans le paragraphe 4.

Réciproquement, pour n'importe quel jeu diophantien (voir la définition ci-dessous), l'affirmation selon laquelle il existe une stratégie gagnante pour l'un des joueurs équivaut à un énoncé vrai (théorème) concernant les entiers naturels.

1. Qu'est-ce qu'un jeu diophantien ?

C'est un jeu qui se joue à 2 joueurs A et B.
La règle est tout entière contenue dans la donnée d'un polynôme P que les deux joueurs connaissent.
Ce polynôme a ses variables parmi un ensemble fini V que nous désignerons systématiquement par :
V = $\{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \text{- - -}\ a_n, b_n\}$. On peut qualifier n de "Taille du jeu".
Le domaine des variables est l'ensemble N des entiers naturels. D'où l'adjectif diophantien.
Les coefficients du polynôme sont des entiers relatifs.
Seules l'addition et la multiplication des variables sont autorisées (les 2 opérations de l'arithmétique), mais on admettra bien sûr les écritures comme b_1^3 pour $b_1 \times b_1 \times b_1$.

Par contre, les variables en exposant sont interdites, ainsi $b_1^{a_3}$ est interdit.
Exemples de polynômes "jeux" qui seront utilisés dans la suite :

P = $b_1 + a_2 - 2b_2 - 2b_3 - b_2b_3 - 4$

Q_1 = $2b_3^2 + 23a_1b_2 - (7a_2 + 4b_1)^3 + b_4 - 5670001$

$Q_2 = a_1 + b_1$

$Q_3 = 23$

<u>Remarques</u> :
La taille n du polynôme P ci-dessus vaut 3 mais seules les variables $\{b_1, a_2, b_2, b_3\}$ sont utilisées.
a_1 et a_3 sont absentes, mais on peut parfaitement les réintroduire sans changer le jeu en leur affectant un coefficient nul. P deviendrait ainsi

$$P = b_1 + a_2 - 2b_2 - 2b_3 - b_2b_3 - 4 + 0(a_1 + a_3)$$

Ainsi dans la suite, par commodité, on ne considérera que des polynômes ayant pour variables un ensemble tel que V = $\{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \text{- - -}\ a_n, b_n\}$. Par contre les variables affectées d'un coefficient nul, donc sans effet, seront souvent omises dans l'écriture pour plus de lisibilité.
Dans Q_3 il n'y a aucune variable. Q_3 est un polynôme constant. On peut admettre que sa taille est $n = 0$.

2. Comment joue-t-on à un jeu diophantien ?

C'est extrêmement simple :
Le polynôme J du jeu étant donné :
A commence et annonce pour la variable a_1 un entier naturel de son choix qu'on désignera encore par abus par a_1. Le choix est public, c'est-à-dire que B en a immédiatement connaissance.
Bien entendu, si la variable a_1 ne figure pas dans J, ou si elle a un coefficient nul, le choix de A est sans importance et tout se passe comme si A passait son tour.
(Signalons que dans de nombreux jeux il est possible de passer son tour : une enchère au bridge est "Je passe" ; au go à tout moment un joueur peut passer…).
Ensuite c'est à B de jouer. Il choisit pour la variable b_1 un entier naturel qu'on désignera encore par b_1.
Le choix est public, c'est-à-dire que A en a immédiatement connaissance.
Si la variable b_1 ne figure pas dans J, ou si elle a un coefficient nul, B choisira n'importe quel entier ou passera son tour.
(Il peut même se faire que ni a_1 ni b_1 ne figurent dans J. Mais dans ce cas tout se passe comme si A et B passaient leur premier tour. Ce cas est un peu ridicule et il suffit de renuméroter les variables pour l'éviter.)
Ensuite, A choisit pour la variable a_2 un entier naturel a_2 ou passe son tour si a_2 est absente de J.
Et ainsi de suite comme dans tous les jeux, tant qu'il y a des variables dans J.
Un jeu diophantien de taille n comporte donc n tours, et dans le cas exceptionnel où $n = 0$, le jeu est terminé avant d'avoir commencé !

Les indices servant de numéros aux variables sont très importants puisqu'ils imposent l'ordre des choix.

3. Qui gagne à un jeu diophantien ?

C'est encore plus simple : à l'issue des n tours, quand chacun a choisi ses n variables, de deux choses l'une : ou bien la valeur Z = J (a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, - - - a_n, b_n) est non nulle et c'est A qui gagne ou bien Z = 0 et c'est B qui gagne.
Il n'y aura donc jamais "nulle".
En résumé : B doit annuler pour gagner.

Voyons deux exemples de parties :

- Le jeu $Q_2 = a_1 + b_1$ cité plus haut :

Pour gagner B doit faire en sorte d'annuler $a_1 + b_1$. Si A a un peu de jugeote, il jouera a_1 strictement positif, et B perdra puisqu'il ne pourra pas annuler Q_2.
On dira que le statut de Q_2 est "gagnant pour A" ou plus brièvement que A gagne.

- Le jeu P = $b_1 + a_2 - 2b_2 - 2b_3 - b_2 b_3 - 4$ associé à l'énoncé E du début.

Considérons coup par coup la partie suivante :
A joue $a_1 = 0$ (ou n'importe quoi puisque a_1 est absente des variables de P).
B joue $b_1 = 13$,
A joue $a_2 = 17$,
B joue $b_2 = 9$.
A joue n'importe quoi pour a_3 (qui est absente de P) ou passe son tour.
B doit jouer le dernier coup b_3 et d'après la règle, il gagnera si

$$Z = P(0, 13, 17, 9, 0, b_3) = 13 + 17 - 2 \times 9 - 2\, b_3 - 9\, b_3 - 4 = 0.$$

C'est malheureusement impossible car Z = 8 – 11 b_3 et on joue dans **N**. B a perdu.

B pouvait-il "gagner à coup sûr" en jouant différemment ?
Il faut d'abord définir ce qu'on entend par "gagner à coup sûr" et c'est le bon moment pour définir ce qu'est une "Stratégie gagnante" pour B (ou pour A).

Dire que A a une stratégie gagnante au jeu J signifie précisément ceci :
Il existe un coup a_1 tel que quelle que soit la réponse b_1 il existe un coup a_2 tel que quelle que soit la réponse b_2 il existe un coup a_3 tel que quelle que soit la réponse b_3 - - - il existe un coup a_n tel que quelle que soit la réponse b_n A gagne.
Cela s'écrit (1)

$$\exists\, a_1\ \forall\, b_1\ \exists\, a_2\ \forall\, b_2\ \exists\, a_3\ \forall\, b_3 \text{ - - - } \exists\, a_n\ \forall\, b_n\quad J(a_1, b_1, a_2, b_2, \text{ -- - } a_n, b_n) \neq 0$$

Rappelons que les écritures du genre $\forall\ x \in$ E bien que répandues sont abusives ici car le symbole $\in$ fait partie de la théorie des ensembles, pas de l'arithmétique. Voir à ce sujet les écritures du paragraphe VI.
Si (1) est vraie, A a une stratégie gagnante, c'est parfait pour lui, et il jouera les coups $a_1\ \ a_2$ - - - a_n dont l'existence est garantie par (1).

<u>Supposons maintenant que A n'a pas de stratégie gagnante,</u> c'est-à-dire que (1) est fausse.
En se souvenant qu'en logique, le contraire de "tous les chats sont gris" est "il y a un chat non gris", et le contraire de "il y a un méchant" est "tout le monde est gentil", si $\rceil$ désigne la négation, et P une proposition, alors la négation de $\forall a$ P est $\exists\ a\ \rceil$P et la négation de $\exists\ a$ P est $\forall a\ \rceil$P.
La négation de (1) qui est vraie puisque (1) est fausse s'écrit donc :
$\forall a_1\ \exists\ b_1\ \forall a_2\ \exists\ b_2\ \forall a_3\ \exists\ b_3$ - - - $\forall a_n\ \exists\ b_n\ \ \rceil$J $(a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, - - - a_n, b_n) \neq 0$
ou encore
(2) $\forall a_1\ \exists\ b_1\ \forall a_2\ \exists\ b_2\ \forall a_3\ \exists\ b_3$ - - - $\forall a_n\ \exists\ b_n$ J $(a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, - - - a_n, b_n) = 0$

Si on décortique (2), la traduction est exactement celle-ci :
Quel que soit le coup a_1 il existe une réponse b_1 telle que quel que soit le coup a_2 il existe une réponse b_2 telle que quel que soit le coup a_3 il existe une réponse b_3 - - - quel que soit le coup a_n il existe une réponse b_n telle que B gagne.
En résumé : B a une stratégie gagnante !
Ainsi,

Pour tout jeu diophantien J : Ou bien il existe une stratégie gagnante pour A, ou bien il existe une stratégie gagnante pour B.

Ce n'était pas évident a priori, d'ailleurs ce résultat ne s'applique pas aux échecs par exemple, car le contraire de "A fait mat" n'est pas "B fait mat" !

4. Etude complète du jeu P = $b_1 + a_2 - 2b_2 - 2b_3 - b_2b_3 - 4$.

On va prouver qu'à ce jeu, c'est A qui a une stratégie gagnante, et par la même occasion, on va voir que l'affirmation "A a une stratégie gagnante" est logiquement équivalente à la vérité de l'énoncé du début
E : "Il y a une infinité de nombres premiers".

En effet, P peut s'écrire P = $b_1 + a_2 - (b_2 + 2)(b_3 + 2)\ + 0.(a_1 + a_3)$.
A joue a_1 [ce qui n'aura aucun effet sur le résultat final]
B joue b_1
A se met alors à la recherche d'un nombre premier $p \geq b_1$. Il en existe, et même une infinité.

A joue alors $a_2 = p - b_1$ qui est bien dans **N**,
B joue b_2,
A joue a_3 [ce qui n'aura aucun effet sur le résultat final à cause du facteur 0 de a_3]
Hélas pour B, il est impossible que le résultat Z = $b_1 + a_2 - (b_2 + 2)(b_3 + 2) + 0.(a_1 + a_3)$ soit nul, puisque Z = $p - (b_2 + 2)\ (b_3 + 2)$, et si on avait Z = 0, p aurait deux diviseurs plus grands que 1, ce qui est en contradiction avec la primalité de p.
A gagne systématiquement au jeu P, et tout ce qu'il doit faire pour cela est de trouver, immédiatement après le coup b_1 de B, un nombre premier p supérieur ou égal à b_1.
On voit bien ici que l'existence d'une stratégie gagnante pour A est très exactement équivalente au fait qu'il y a des nombres premiers arbitrairement grands.

Si, dans un univers imaginaire, les nombres premiers étaient majorés par M, B aurait une stratégie gagnante consistant à choisir $b_1 = M + 1$ par exemple. Alors $C = b_1 + a_2 = M + 1 + a_2$ est strictement plus grand que M donc composé (dans notre univers imaginaire). De plus $b_1 + a_2 = M + 1 + a_2$ étant plus grand que 1, on peut écrire $C = X\,Y$ avec X et Y au moins égaux à 2.
B n'aurait plus qu'à jouer pour ses deux derniers coups : $b_2 = X - 2$ et $b_3 = Y - 2$.
Alors, Z = $b_1 + a_2 - (b_2 + 2)(b_3 + 2) = C - X\,Y = 0$. B annule, il gagne !

Attention :
Lorsqu'on dit que tout ce que A doit faire pour gagner au jeu P est de trouver un nombre premier p supérieur à b_1, cela risque d'être difficile dans notre univers, car si B, futé, choisit disons $b_1 = 10^{10^8}$, A devra trouver un nombre premier ayant plus de 100 millions de chiffres. Hélas, le plus grand nombre premier connu fin 2008 a un peu moins de 13 millions de chiffres [c'est le nombre de Mersenne $2^{43\,112\,609} - 1$], et il faut espérer que A n'a pas devant lui un sablier d'une minute pour jouer son coup a_2.
Comme souvent en mathématiques, l'existence d'un objet, bien que prouvée, n'est pas associée à un procédé effectif de construction, ou bien le temps de calcul nécessaire est rédhibitoire.

5. D'autres jeux diophantiens pour jouer en famille.

Rappelons que B doit annuler pour gagner.

- $J_1 = a_1 - a_2\, b_1\, b_2$

A gagne en choisissant comme stratégie : $a_1 = 1$ puis $a_2 = 0$. $J_1(a_1, a_2, b_1, b_2) = 1$ ne sera jamais nul quel que soit le choix de B.

- $J_2 = a_1 + a_2 - b_1\, b_2$

B gagne en choisissant comme stratégie : $b_1 = 1$ puis $b_2 = a_1 + a_2$.

B n'a d'ailleurs pas le choix, car s'il joue disons $b_1 = 2$, A joue a_2 pour rendre $a_1 + a_2$ impair, et quelle que soit la réponse b_2, $J_2(a_1, a_2, b_1, b_2)$ sera impair donc non nul.

- $J_3 = (2\, b_1 - a_1)\,(2\, b_1 - a_1 + 1)$

<u>B gagne</u>. Le théorème associé est "Tout entier de N s'écrit $2k$ ou $2k + 1$"

- Certains jeux diophantiens sont "ouverts" en ce sens qu'on ne sait pas dire qui est le gagnant !

C'est le cas de $J_4 = (b_1 + a_2)^2 + 1 - (b_2 + 2)\,(b_3 + 2)$
A peut rendre $m = b_1 + a_2$ arbitrairement grand, donc B gagnera s'il peut factoriser à coup sûr $m^2 + 1$,
m étant arbitrairement grand. Mais, à ma connaissance la démonstration de l'existence d'une infinité de nombres premiers de la forme $m^2 + 1$ n'est toujours pas établie. Si la démonstration est faite un jour, le statut de J_4 deviendra illico "gagnant pour A".

- Au jeu $J_5 = (1 + b_1)^3 + (1 + b_2)^3 - b_3^3$, <u>A gagne</u> à cause du théorème de Fermat !

Et depuis la démonstration de Wiles, on sait qu'on peut dans J_5 remplacer l'exposant 3 par n'importe quel entier supérieur. Remarquer la présence des 1 dans J_5 sans quoi B gagnerait.

- Je laisse aux lecteurs les trois exercices suivants qu'on peut considérer comme des jeux à moins que ce ne soient des problèmes de maths. Mais y a t-il vraiment une différence ?

$J_6 = a_1\, a_2\, b_1\, b_2 + a_2\, a_3 - b_3^2 - b_4^2 - b_5^2$.
Il est assez facile de démontrer que A gagne en jouant $a_1 = 8$; $a_2 = 4$; $a_3 = 7$.

$J_7 = a_1\,(1000 - b_1) - b_3\,(2 + a_2^2 - 10\, b_2)$.
Indice : Quel que soit a_1, B joue $b_1 = 874$, puis selon le coup a_2 - - -

$J_8 = 4\, a_1^2\,(a_1 + a_2 + 1)^2 + (1 + b_2)^2 - b_3^2$.
Indice : Pythagore.

La fabrication d'un jeu diophantien à partir d'un thème imposé, est un exercice passionnant en soi.

6. Bibliographie ou "Comment j'ai découvert les jeux diophantiens".

Le moins qu'on puisse dire est que la littérature n'est pas bavarde sur le sujet.
Ce qui m'a mis sur la piste des jeux diophantiens est le livre extraordinaire :

GÖDEL, ESCHER, BACH Les Brins d’une Guirlande Éternelle.
De Douglas HOFSTADTER *InterEditions*.

Encore sur les rayons plus de 20 ans après sa publication ! Ce n’est pas un livre de maths bien que l’auteur démontre au passage le théorème d’incomplétude de Gödel d’une manière accessible à tous !
Dans le chapitre VIII : "Un système explosif : la TNT", l’auteur expose un système (TNT = Théorie des Nombres Typographique") permettant d’écrire tous les énoncés de l’arithmétique usuelle des nombres entiers à l’aide d’un nombre réduit de symboles. En gros les deux quantificateurs : $\forall$; $\exists$; les connecteurs logiques usuels : $\rceil$ pour la négation ; $\wedge$ pour la conjonction ; $\vee$ pour la disjonction ; $\Rightarrow$ pour l’implication ; le symbole relationnel = ; les parenthèses ouverte et fermée, un alphabet pour désigner les variables (<u>uniquement des entiers naturels</u>), et les constantes 0, 1, 2, etc.
Dans l’arithmétique (de Péano) on a une addition +, une multiplication $\times$ mais <u>pas d’exponentiation</u>. C’est très important pour la suite.

On traduit ainsi dans le langage de la TNT :

"n est pair" par $\exists\, k\ \ n = 2 \times k$. [Rappelons que le symbole $\in$ est inconnu]
"2 n’est pas un carré" par $\forall a \rceil (a \times a = 2)$ [a^2 est inconnu sauf définition préalable]
"p est premier" par $\forall a\ \ \forall b\ \ ((\exists\, c\ \ a = 2 + c) \wedge (\exists\, d\ \ b = 2 + d)) \Rightarrow \rceil\ (p = a \times b)$.

Cet exercice de traduction est déjà amusant (Essayez par exemple de traduire : "Il y a une infinité de nombres premiers"), mais là où ça devient encore plus intéressant, c’est lorsqu’on aborde l’exponentiation :

<u>Comment écrire dans la TNT "*x* est une puissance de 2"</u> ?

Il faut peu de temps pour s’apercevoir qu’on élimine le terme gênant "puissance" en disant : x est une puissance de 2 si et seulement si tout diviseur de x autre que 1 est pair. Après quoi on obtient l’écriture

$$\forall d\ \ (\exists\, k\ \ x = k \times d) \Rightarrow ((d = 1) \vee (\exists\, l\ \ d = 2 \times l))$$

Et voilà le plus beau : Douglas HOFSTADTER demande dans le chapitre VIII :
<u>Traduire dans la TNT la phrase "*x* est une puissance de 10"</u>.

Et il ajoute "Pour écrire cette phrase dans la TNT il faut curieusement beaucoup d’astuce. Je vous conseille de ne vous y coller que si vous êtes prêt à y passer des semaines et si vous avez des connaissances assez poussées de la théorie des nombres".
En lisant ceci, je me suis dit : ça tombe bien, j’ai du temps et des connaissances en théorie des nombres.
Bien entendu, les semaines se sont écoulées sans succès. Il me manquait l’astuce.
Plusieurs années après, je tombe sur le livre :

Le dixième problème de Hilbert. Son indécidabilité.
De Youri MATIIASSEVITCH *Masson*.

Dans ce livre Youri MATIIASSEVITCH prouve que "L'exponentiation est diophantienne" c'est-à-dire en gros qu'on peut traduire la phrase "x est une puissance de y" dans la TNT. C'est très intéressant, l'auteur détaillant avec humour sa démarche avec tous ses aléas dans sa collaboration avec Julia Robinson.

Le problème de Douglas HOFSTADTER : <u>traduire dans la TNT "x est une puissance de 10</u>" était résolu ipso facto. Ce qui me rassure, c'est que Youri MATIIASSEVITCH y a passé beaucoup plus que quelques semaines !

Enfin, c'est dans ce dernier livre que Youri MATIIASSEVITCH décrit au chapitre 10 les Jeux diophantiens qui ne sont qu'un aspect des représentations diophantiennes au cœur de son ouvrage.

Ce serait bien si des lecteurs proposaient des jeux diophantiens comme énigmes.
Ils seraient publiés dans la revue.

Changeons d'unité d'aire

"Avec la vieille géométrie élémentaire, du neuf peut encore advenir"

Henry PLANE,

Résumé : Si au lieu de choisir un carré comme unité d'aire on avait considéré un triangle équilatéral : quelles formules d'aires aurions nous apprises, quels théorèmes auraient pu être démontrés ?

Mots clés : unité d'aire ; calcul d'aire ; formule d'aire ; égalité remarquable ; résolution d'équation du second degré ; relation de Pythagore.

Que répondre à la question :
Pourquoi a-t-on choisi comme unité d'aire celle du carré construit sur le segment de droite unité de longueur ?

Réponses :

- Cela a toujours été ainsi.
  2500 ans est-ce suffisant ?
- C'est la figure la plus simple.
  Avez-vous évalué les moyens mis en œuvre, à la règle et au compas, pour réaliser ce carré ?
- À cause des qualités.
  Certes ce polygone est équilatère et équiangle, mais est-ce le seul ?

L'auteur de ces lignes ne sait pas répondre à la question posée. C'est pourquoi il a voulu voir où cette aventure de prendre comme unité d'aire celle du triangle équilatéral, le conduirait en géométrie plane.

Le triangle équilatéral de côté l'unité de longueur est donc pour l'aire, l'unité. Qu'en est-il de celui dont le côté mesure a ?
- Si a est un entier, on meublera celui-ci d'"unités d'aire" :

$a = 2$
Aire = 4

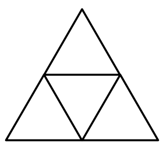


Figure 1

$a = 3$
Aire = 9

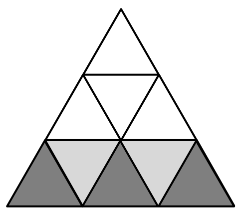


Figure 2

On peut démontrer par un raisonnement par récurrence que l'aire d'un triangle de côté a est a^2 :

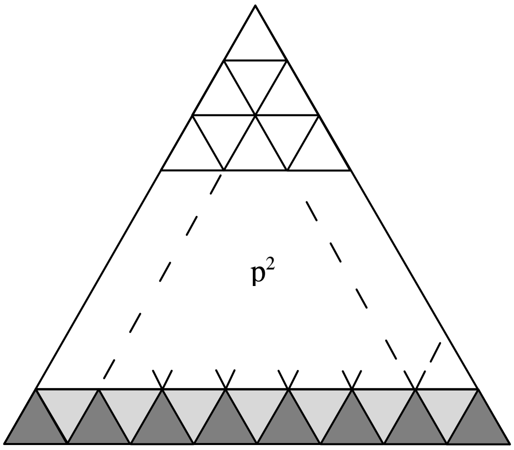


Figure 3

La propriété est vraie aux rangs 1, 2, 3.
Au rang p, notons A(p) l'aire d'un triangle de côté p. On a : $A(p) = p^2$. Qu'en est-il de A(p+1) ?
On bordera le triangle équilatéral de côté p par p "triangles unités" adossés et de (p+1) autres "unités" pour compléter.
Alors :

$$A(p+1) = A(p) + p + (p+1)$$
$$= p^2 + 2p+1$$
$$= (p+1)^2$$

On a justifié pour tout a entier naturel : A (a) = a^2.
- Si $a \in \boldsymbol{Q}$, on usera d'une unité intermédiaire : a= $\frac{m}{n}$, on prendra comme nouvelle unité la nième partie de l'unité précédente. La nouvelle unité étant $\frac{1}{n}$, le côté mesurera m "nouvelle unité". Et on est ramené au cas précédent.
- Si $a \in \boldsymbol{R}$, on procédera par encadrement : $\frac{m}{n} \leq a < \frac{m+1}{n}$. Un passage à la limite permet de conclure.

L'aire d'un triangle équilatéral de côté de longueur a est a^2.

Il s'agit ici de lire *a-deux* et non a-carré car il n'y a pas de "carré" en jeu dans l'affaire, mais une puissance deux.

Allons vers d'autres figures.
Un précieux auxiliaire :
Le "losange-duo" formé de deux triangles équilatéraux. C'est un quadrilatère équilatère mais non équiangle.
Si son côté mesure a, son aire est : $2a^2$.

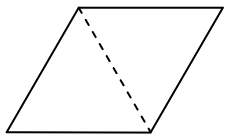


Figure 4

Avec lui intervient l'axiome d'Euclide (unicité de la parallèle ou somme des angles d'un triangle). Le "losange-duo" a deux angles de $\frac{\pi}{3}$ et deux de $\frac{2\pi}{3}$.
Le "parallélogramme-duo". On peut le paver de "losanges-duo". Si ses dimensions sont a et b, il contient a colonnes de b "losanges-duo".

AB = a ; AD = b ; AE = AG = 1.

Son aire est :
(ABCD) = a(AEFD)
= a.b(AEHG)
= a.b.2 = 2a.b
(ABCD) = 2.AB.AD

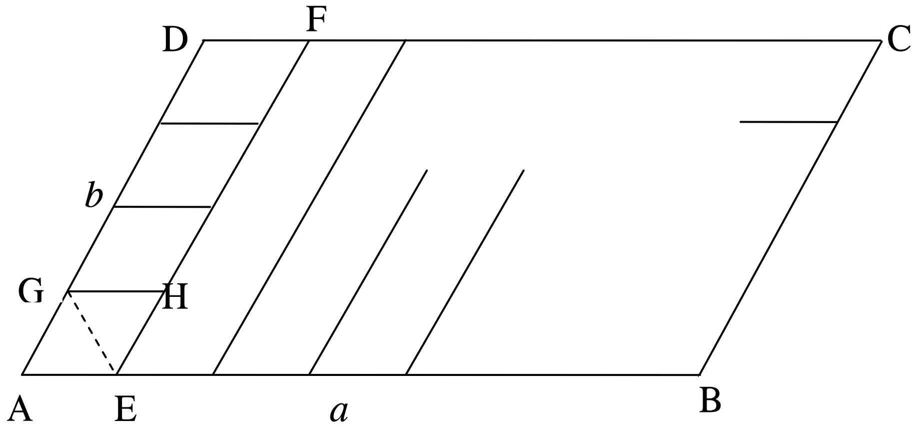


Figure 5

L'aire d'un "parallélogramme-duo" est le double du produit des mesures de ses côtés.
Arrêtons-nous sur les deux moitiés de cette figure. Elles sont de deux types :
L'une est un triangle dont un angle vaut $\frac{\pi}{3}$ (nous l'appellerons "tiernal"). L'autre est un triangle dont un angle vaut $\frac{2\pi}{3}$ (triangle "bitiernal").

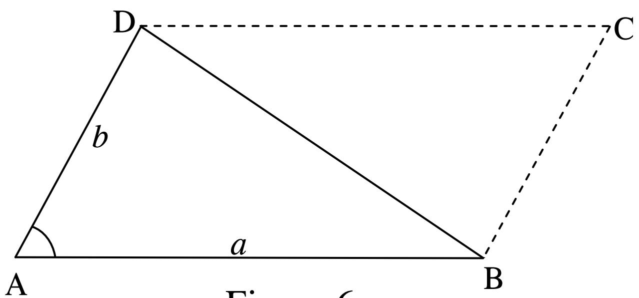


Figure 6

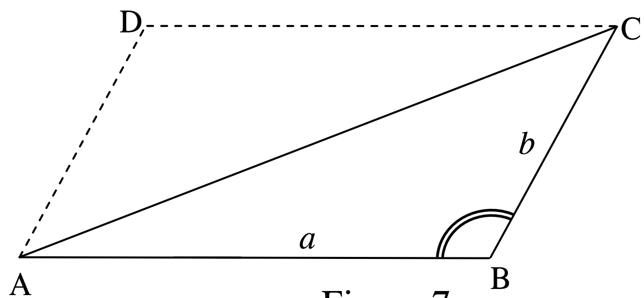


Figure 7

Dans les deux cas l'aire est la moitié de celle du parallélogramme, donc $\frac{1}{2}(2a.b) = a.b$.

L'aire d'un triangle dont deux côtés font un angle de $\frac{\pi}{3}$ ou de $\frac{2\pi}{3}$ est égale au produit des longueurs de ces deux côtés.

On peut alors se poser la question : cette façon d'aborder la géométrie conduira-t-elle à l'algèbre comme jadis Mésopotamiens, Perses et Arabes ?
On est un peu tenté de dire, comme dans certains ouvrages chinois : regarde !
Ainsi, avec les triangles équilatéraux ABC, ADF et BDE.
Si $AB = a$ et $BD = b$ alors $AD = a+b$.
Quant aux aires nous avons :
$(ADF) = (ABC) + (BDE) + (BCFE)$

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab}$$

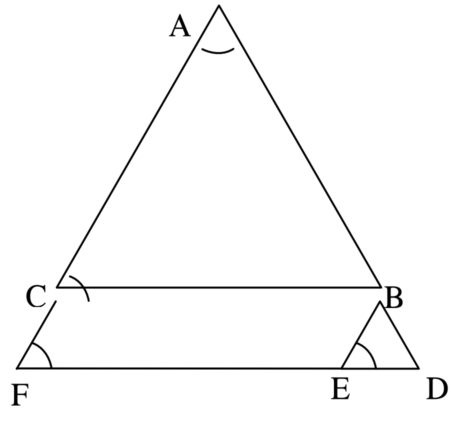


Figure 8

De même, toujours avec des triangles équilatéraux, avec $AB = a$ et $BD = b$ donc $AD = a\text{-}b$, il vient en aires :

$(ADF)+(BCFE)=(ABC)+(EBD)$

$$(a - b^2) + 2ab = a^2 + b^2$$

Soit

$$\boxed{(a - b^2) = a^2 + b^2 - 2ab}$$

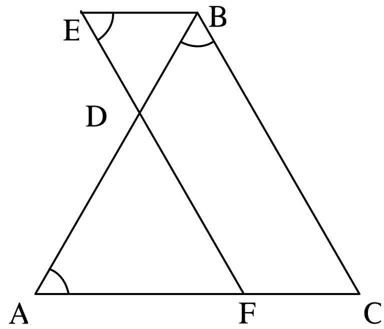


Figure 9

Et encore :

Avec AB = a et BD = DE = CF = b, il vient AD = a-b, AF = a+b.
DEFC est un parallélogramme (quelconque) et les triangles IDE et IFC sont égaux.
D'une part :
($ADEC$) = ($ADIC$) + (DEI)
= ($ADIC$) + (CIF) = (ADF)
D'autre part
(ABC) – (DBE) = ($ADEC$)
= (ADF) = AF.AD

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$$

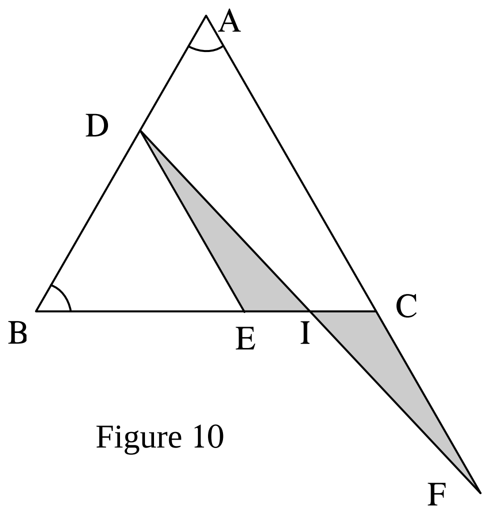


Figure 10

Bien entendu on lira : a-deux, b-deux, (a+b)-deux, etc.
On n'hésitera pas à comparer la simplicité des figures. Ces figures sont mêmes plus simples avec des triangles équilatéraux que celles tracées avec des carrés ou des rectangles pour démontrer ces mêmes formules avec pour unité un carré.

Tout cela est bel et bien, mais la résolution des équations du second degré ? Toute cette géométrie qu'à la Renaissance et même avant, l'Occident est allé puiser chez les Arabes.

À côté de tables qui donnent r tel que $r^2 = q$, en connaissant q, il y a une figure donnant place à l'unité de longueur.

Avec $\widehat{xoy} = \frac{\pi}{3}$

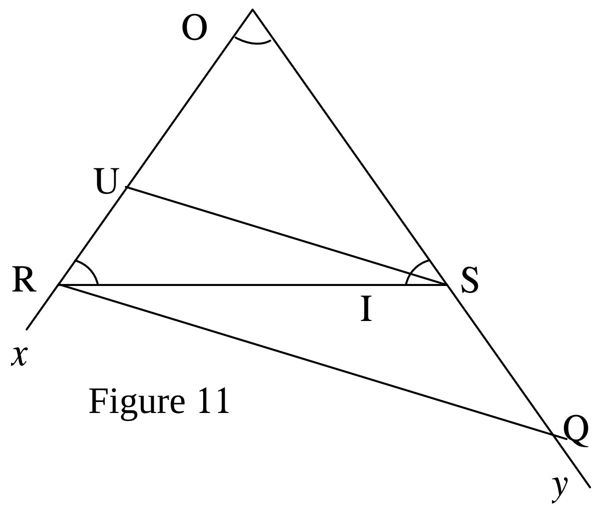


Figure 11

Si OU = 1, OQ = q.

Si on a pu tracer OR = OS et US parallèle à RQ, alors $\frac{OU}{OR} = \frac{OS}{OQ}$

donc OU.OQ = OR.OS
soit 1.q = r^2 et OR = r

Sachant donc déterminer un nombre connaissant sa puissance-deux, attaquons-nous aux trois types d'équations du second degré.

1. $x^2+px = q$ avec p et q positifs

ABC équilatéral de côté $AB = x$ qui sera prolongé de $BD = \frac{p}{2}$ et soient les triangles équilatéraux ADE et CEF.
On aura
$(ADE) = (ABC)+(BDFC)+(ECF)$
$= x^2+2\left(\frac{p}{2}x\right) + \left(\frac{p}{2}\right)^2$
$= x^2 + px+\frac{p^2}{4}$

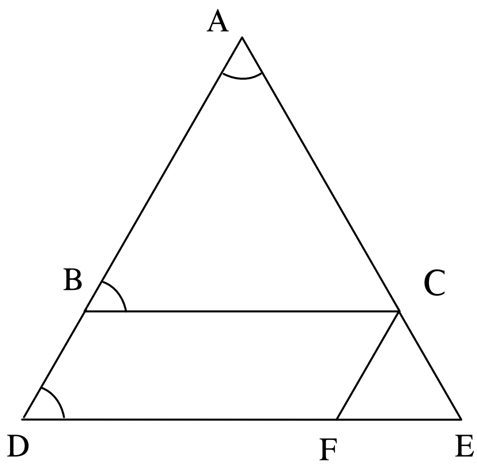


Figure 12

$(ADE) = q+\frac{p^2}{4}$

Mais $(ADE) = (AD)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$; x est connu à l'aide de p et q seuls, AD = $\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$

puisque p et q sont positifs, $x=\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}-\frac{p}{2}$.

x est bien positif, c'est bien une longueur.

2. $x^2+q = px$

Toujours ABC équilatéral avec AB = x.
Supposons $x > \frac{p}{2}$, alors, sur [AB] prenons D tel que $BD = \frac{p}{2}$.
Il vient :
$(ADE) + (BDFC) = (ABC) + (EFC)$
$(ADE) + 2\left(x\frac{p}{2}\right) = x^2+\left(\frac{p}{2}\right)^2$

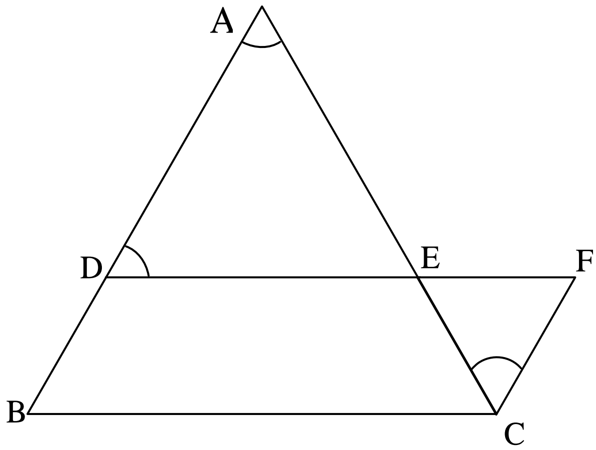


Figure 13

$(ADE) + px = x^2 + \frac{p^2}{4}$

$(ADE) + q = \frac{p^2}{4}$ soit : $(ADE) = \frac{p^2}{4} - q$. Alors,

- lorsque $\frac{p^2}{4} > q$, comme $(ADE) = AD^2$.

$AD = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ et puisque AB = AD + $\frac{p}{2}$, on a $x = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

- lorsque $\frac{p^2}{4} < q$, l'équation n'a pas de solution.

Peut-on avoir $x < \frac{p}{2}$? Les calculs ci-dessus sont exactement les mêmes, on retrouve $x = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ ce qui contredit l'hypothèse $x < \frac{p}{2}$.

3. $x^2 = px+q$

On ne sait si $\frac{p}{2}$ est supérieur ou non à x. Il y a donc deux figures possibles. Mais un seul calcul dans les deux cas, ce qui aurait satisfait L. Carnot[1].

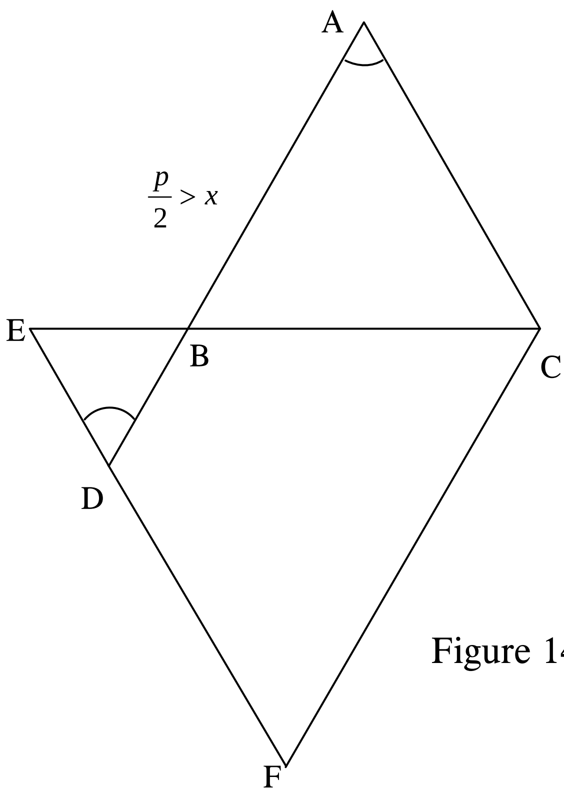


Figure 14

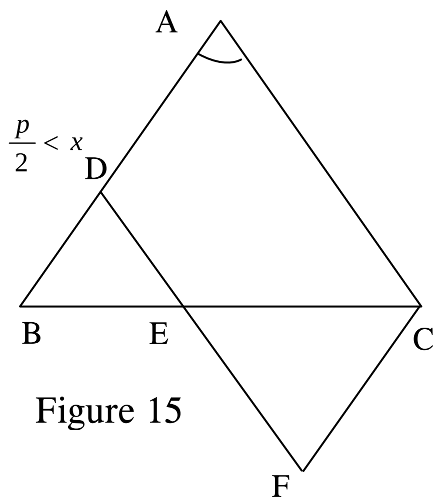


Figure 15

[1] "De la corrélation des figures en géométrie" (Paris 1801)

AB = x, AD = $\frac{p}{2}$.

Construisons les triangles ABC et BDE équilatéraux.

Raisonnons toujours avec les aires : ($ADFC$)+(BDE)=(ABC)+(ECF)

$px + (BDE) = x^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2$

$px + (BDE) = px + q + \frac{p^2}{4}$

$(BDE) = q + \frac{p^2}{4}$.

Pour $\frac{p}{2} > x$: $\frac{p}{2} - x = \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}$.

Pour $\frac{p}{2} < x$: $x - \frac{p}{2} = \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}$.

Il y a donc deux possibilités $x = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$ et $x = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$ trouvées conjointement.

Ces figures peuvent répondre à l'objectif de simplicité.

Revenons à la géométrie et aux relations entre segments grâce aux deux triangles déjà distingués. Que dire du troisième côté, celui opposé à l'angle particulier ?

a) Triangle "tiernal" $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.

Prolongeons AB de BM = AC = b et AC de CN = AB = c.

AMN est équilatéral. Si on prend P sur [MN] tel que MP = c alors PN=b et les triangles ABC, MPB et NCP sont égaux. PBC est également équilatéral.

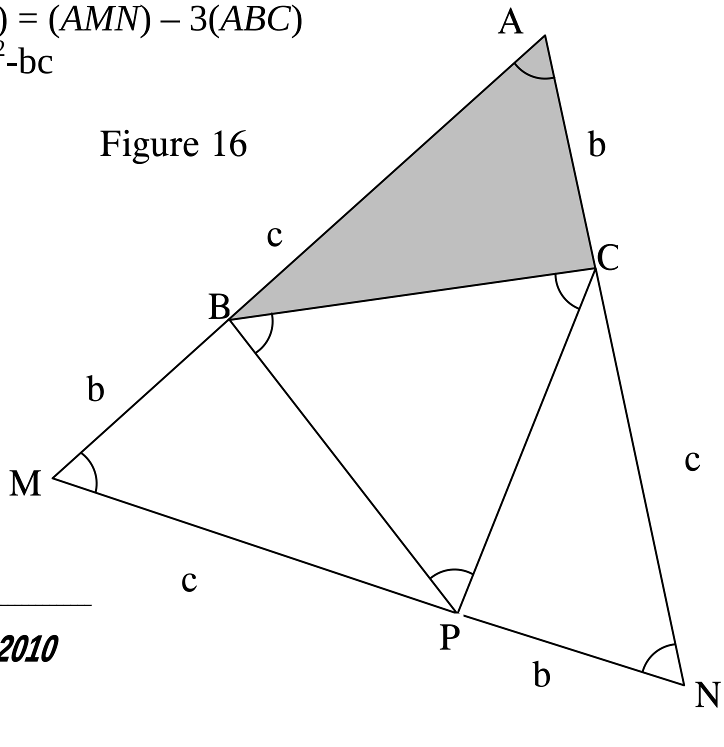
On peut écrire :

(BPC) = BC^2 et (BPC) = (AMN) – 3(ABC)

= (b+c)^2 – 3(b.c) = b^2+c^2-bc

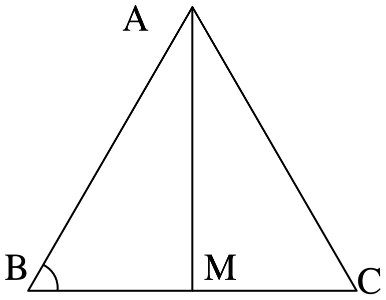
$\boxed{BC^2 = AC^2+AB^2-AC.AB}$

Figure 16



<u>Application</u> :
Médiane du triangle équilatéral

Figure 17



BM = MC, le triangle AMB est tiernal avec BA = 2BM
Donc !
$AM^2 = BA^2 + BM^2 - BA.BM$
$AM^2 = 4BM^2 + BM^2 - 2BM^2 = 3BM^2$
ou $AM^2 = \frac{3}{4}AB^2$.

Nous venons de voir réapparaître le bon vieil angle droit, il n'est pas question de le proscrire.

b) *Triangle "bitiernal"* $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$

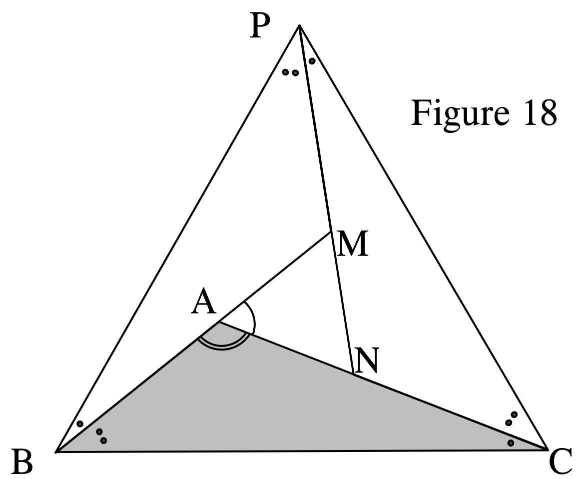


Figure 18

Si M sur (BA) et N sur (AC) nous construisons les triangles MPB et NCP égaux à ABC, le triangle PBC est équilatéral comme le triangle AMN.
$\widehat{PBC} = \widehat{PBM} + \widehat{ABC} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC}$
$= \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$
On a
(PBC) = (AMN) + 3(ABC)
$BC^2 = (BM\text{-}BA)^2 + 3AB.AC$
$= (AC\text{-}AB)^2 + 3AB.AC$
$= AC^2 + AB^2 - 2AB.AC + 3AB.AC$
$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2 + AB.AC}$

c) Triangle rectangle $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$.
Comme $\widehat{ACB} + \widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}$, un des deux angles aigus est supérieur ou égal à $\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$ soit $\frac{\pi}{4}$ et est donc supérieur à $\frac{\pi}{6}$.
Soit C cet angle. Il existe T sur [AB] tel que $\widehat{TCA} = \frac{\pi}{6}$.

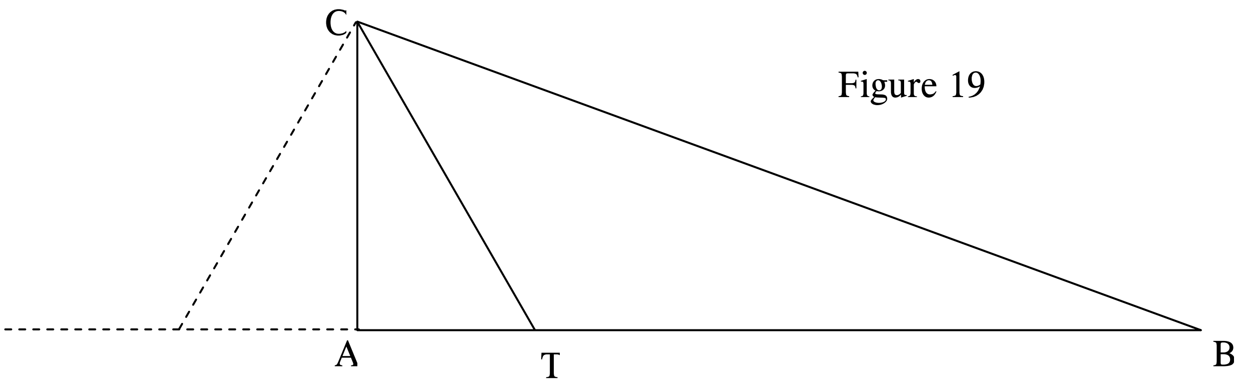


Figure 19

Alors $\widehat{BTC} = \frac{2\pi}{3}$ et $\widehat{ATC} = \frac{\pi}{3}$

donc $BC^2 = TC^2 + TB^2 + TC.TB = 4AT^2 + (AB\text{-}AT)^2 + 2AT.(AB\text{-}AT)$

$= 4AT^2 + AB^2 - 2AB.AT + AT^2 + 2AB.AT - 2AT^2 = 3AT^2 + AB^2$

Or on sait que : $AC^2 = 3AT^2$

Il s'en suit : $BC^2 = AC^2 + AB^2$

Il s'agit d'un peu autre chose qu'une (p+1)$^{\text{ème}}$ démonstration de la relation du grand homme de Samos, car n'entrent pas directement ici, des figures construites sur les côtés du triangle rectangle (BC-deux égale AB-deux plus AC-deux).

Venons-en enfin au triangle "quelconque"

On trace le triangle équilatéral de sommet A et de base TT' sur la droite (BC).

Quatre éventualités de figure mais là encore il n'y a pas d'incidence sur le raisonnement.

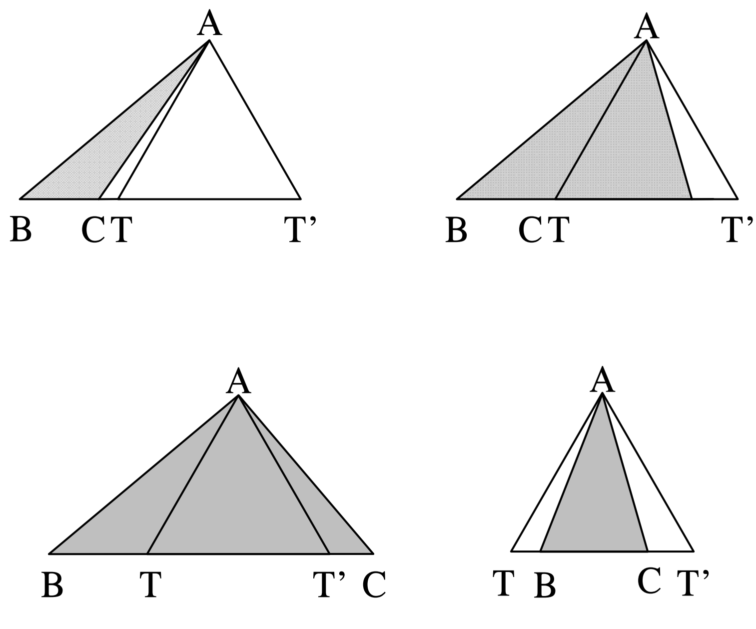


Figure 20

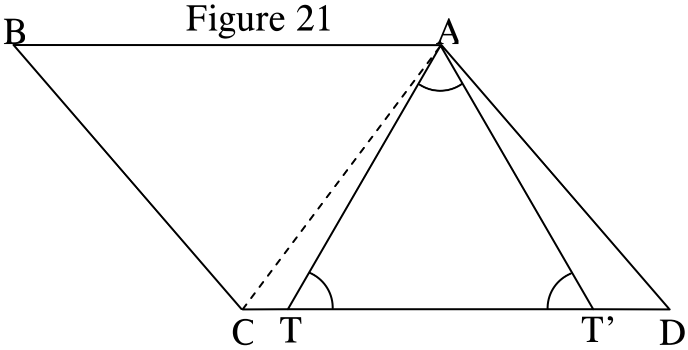
Les triangles ABC (quelconque) et ATT' (équilatéral) ont un sommet commun A et des bases co-linéaires.

$$(ABC) = (ATT').\frac{BC}{TT'} = AT^2.\frac{BC}{AT} = AT.BC$$

AT sera la "tierseur".
L'aire du triangle est égale au produit de la base (BC = b) par la tierseur (AT = t) correspondante.
On objectera qu'il passe par A deux droites faisant un angle de $\frac{\pi}{3}$ avec (BC). Les segments AT et AT' sont égaux… et égaux à TT' lequel est co-linéaire à BC ; par suite la forme (ABC) = TT'.BC se prêtera à l'algébrisation de la notion d'aire.

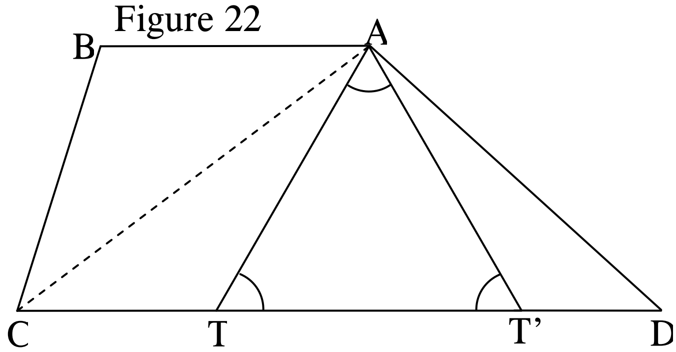
Parallélogrammes et trapèzes useront de "tierseurs". Voici quelques applications en exercices

Figure 21



(ABCD) = 2(ACD) = 2.TA.CD
= 2TT'.CD

Figure 22



(ABCD) = (ABC)+(ACD)
= AB.T'A+CD.TA
= (AB+CD).TA
= (AB+CD).TT'

Après ce travail qui peut apparaître comme "du cours", il convient d'adjoindre des "exercices" (vocabulaire suranné).
Avec une projection orthogonale A' de A sur BC.
$\hat{B}$ aigu, $\widehat{ATB} = \frac{\pi}{3}$, on a AT = 2A'T,
TC = BC – BT
alors
$AB^2 = TB^2 + TA^2 – TB.TA$
$AC^2 = TC^2 + TA^2 + TC.TA$
$AC^2 - AB^2 = TC^2 – TB^2 + TA.(TC+TB)$
$= (TC+TB).(TC-TB+TA)$

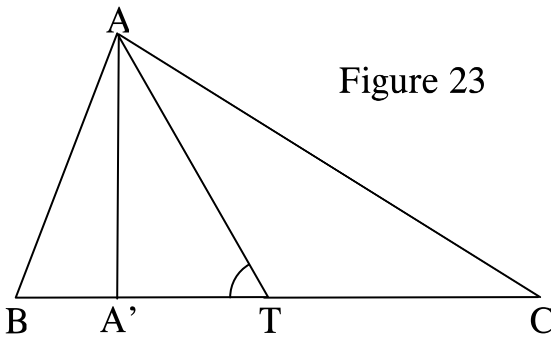


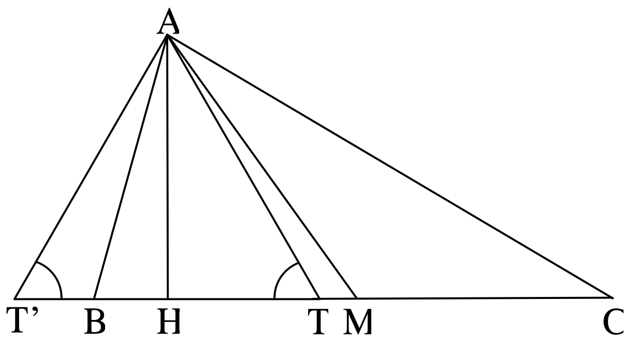
Figure 23

$= BC.(BC-2BT+2TA') = BC^2 - 2BC.(BT+TA') = BC^2 - 2BC.BA'$
$AC^2 = BA^2 + BC^2 – 2BC.BA'$

Laissons au lecteur le soin d'étudier le cas où $\hat{B}$ est un angle obtus ou d'algébriser…

Autres exemples toujours avec "puissance deux"

Figure 24



Soient
- Triangle ABC
- Triangle équilatéral ATT' introduisant les "tierseurs" du côté BC
- M milieu de [BC] et H milieu de [TT'].

Sur la figure, $\widehat{ATB} = \frac{\pi}{3}$, $\widehat{ATC} = \frac{2\pi}{3}$,
$TC = TM+MC$, $TB = MB-MT$
$MB = MC = \frac{1}{2}BC$ (les divers "cas de figure" conduisent aux mêmes résultats, par des calculs similaires).

Les relations dans les triangles "tiersangles" et "bitiersangles" donnent :
$AC^2 = AT^2 + TC^2 + AT.TC$
$AB^2 = AT^2 + TB^2 – AT.TB$
$AM^2 = AT^2 + TM^2 + AT.TM$
Par ailleurs :
$TB^2 = (MB-MT)^2 = MB^2 – 2MB.MT + MT^2$ et $TC^2 = (TM+MC)^2 = MT^2 + 2TM.MC +MC^2$.
et
$TC-TB = TM + MC - (MB-MT) = 2MT$
Alors
1) $AC^2 + AB^2 = 2AT^2+ TC^2 + TB^2 + AT(TC-TB)$
$=2(AM^2-TM^2-AT.TM)+MB^2+MC^2+2MT^2+2AT.TM=2AM^2+MB^2+MC^2$

$$\boxed{AC^2 + AB^2 = 2AM^2+ \frac{BC^2}{2}}$$

2) $AC^2 - AB^2 = TC^2 - TB^2 + AT(TC+TB)$
$AC^2 - AB^2 = (TC-TB) (TC+TB) + AT(TC+TB) = (TC+TB) (TC-TB+TA)$
$AC^2 - AB^2 = BC(2TM + TA)$
or $TA = TT' = 2TH$ où AH est médiatrice de [TT']
$AC^2 - AB^2 = BC(2MT+2TH)$

$$\boxed{AC^2 - AB^2 = 2BC.MH}.$$

La formule de Stewart

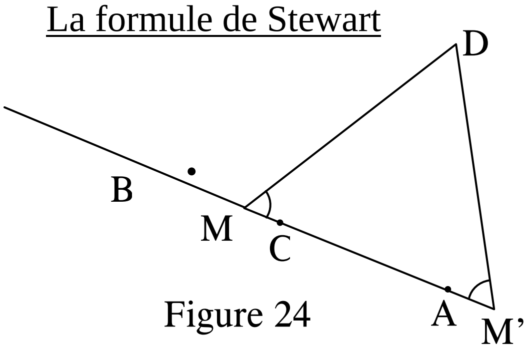


Figure 24

Elle est algébrique et réclame orientation.

1^er^ cas : quatre points alignés sur un axe :

$$DA^2.\overline{BC}+DB^2.\overline{CA}+DC^2.\overline{AB}+\overline{AB}.\overline{BC}.\overline{CA}=0$$

2^ème^ cas : un des points étant hors de l'axe (voir figure 24), on mènera DM faisant $\frac{\pi}{3}$, avec l'axe.

$DA^2 = DM^2 + MA^2 - \overline{DM}\,.\overline{MA} = DM^2 + MA^2 - \overline{MM'}.\overline{MA}$ (où DMM' est équilatéral)

$DB^2 = DM^2 + MB^2 - \overline{MM'}.\overline{MB}$

$DC^2 = DM^2 + MC^2 - \overline{MM'}.\overline{MC}$

La combinaison linéaire $\overline{BC}.DA^2+\overline{CA}.DB^2+\overline{AB}.DC^2$ conduit à la somme de $DM^2.\left(\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AB}\right)$ nulle et de $\overline{MM'}.(\overline{MA}.\overline{BC}+\overline{MB}.\overline{CA}+\overline{MC}.\overline{AB})$ nulle car A, B, C et M sont alignés. Quant à $MA^2.\overline{BC}+MB^2.\overline{CA}+MC^2.\overline{AB}$ pour la même raison est opposé à $\overline{AB}.\overline{BC}.\overline{CA}$ ce qui étend la relation au cas où D n'est pas sur la droite contenant A, B et C :

$$\boxed{DA^2.\overline{BC}+DB^2.\overline{CA}+DC^2.\overline{AB}+\overline{AB}.\overline{BC}.\overline{CA}=0}$$

Un exercice (qui peut servir pour un T.I.C.E.)

Sur un cercle trois points A, B, C forment un triangle équilatéral. Un point M décrit ce cercle. On se propose d'établir un lien entre les aires des triangles équilatéraux BMD, CME, ABC et celle du triangle BMC.

Deux éventualités :

1. M sur le petit arc *BC* : $\widehat{BMC}=\frac{2\pi}{3}$

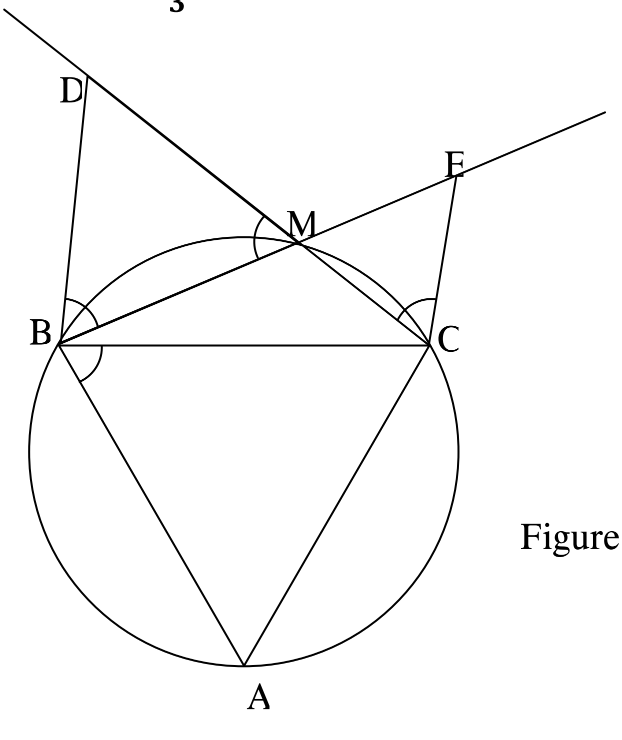


Figure 25

2. M sur le grand arc *BAC* : $\widehat{BMC} = \frac{\pi}{3}$

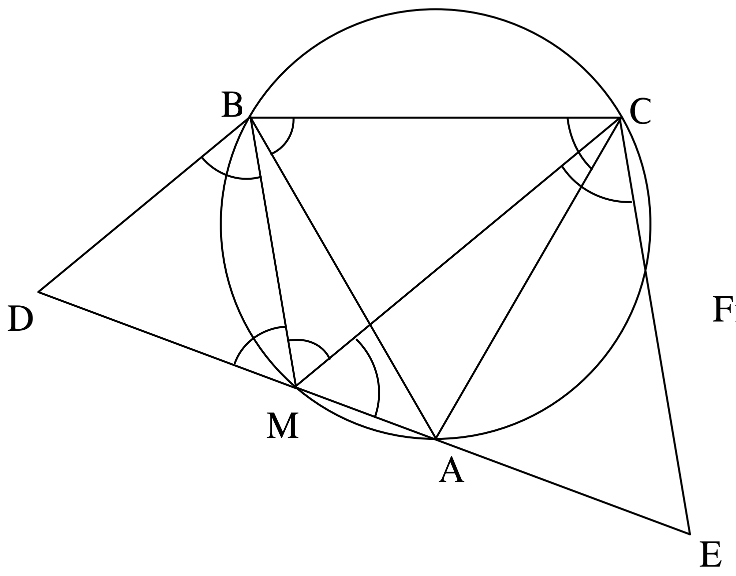


Figure 26

On évaluera, on conjecturera, puis on démontrera.

1. (*BDMEC*) = (*BDM*)+(*MEC*)+(*BMC*) = (*ABC*)

$$MB^2 + MC^2 + MD.MC = BC^2$$

2. (*BDM*) + (*MEC*) – (*BMC*) = (*ABC*)

$$MB^2 + MC^2 - MD.MC = BC^2$$

Sans oublier : points alignés, positions particulières, etc.

* Double ou triple d'un triangle équilatéral

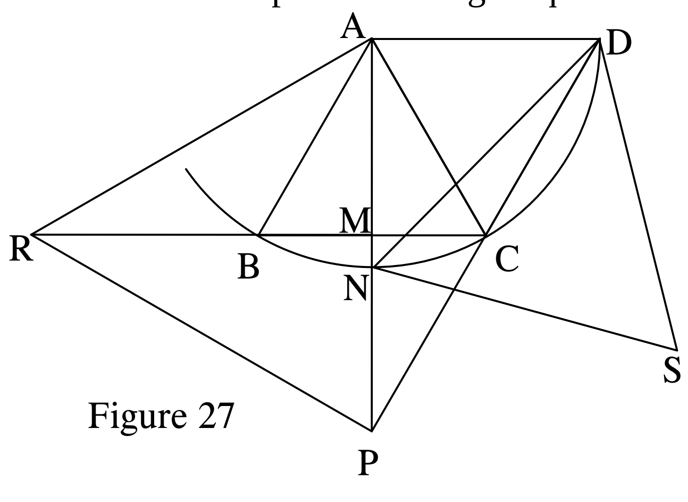


Figure 27

ABC équilatéral et "duo" : ABCD

BM = MC AP = 2AM = AB$\sqrt{3}$

APR équilatéral : (*APR*) = 3(*ABC*)

D, C, N, B cocycliques (cercle centre A)

DN = AD$\sqrt{2}$ = AB$\sqrt{2}$

DNS équilatéral : (*DNS*) = 2(*ABC*).

* Voici peut-être un résultat plus inattendu :

Pour certains résultats, nous raisonnons sur du papier quadrillé. Et pourquoi toujours du papier quadrillé ?

Avec du papier triangulé la formule dite de Picq reste valable. $S + 2 = P + 2.I$

où, pour un polygone dont les sommets sont des nœuds du triangulage (ou du papier triangulé) S est l'aire, P le nombre de points sur le périmètre, I le nombre de points intérieurs

$$S+2 = 10 + 2\times6=22 \;; \qquad S = 20\text{u}.$$

Le lecteur vérifiera sans peine ces relations dans l'exemple ci-dessous :

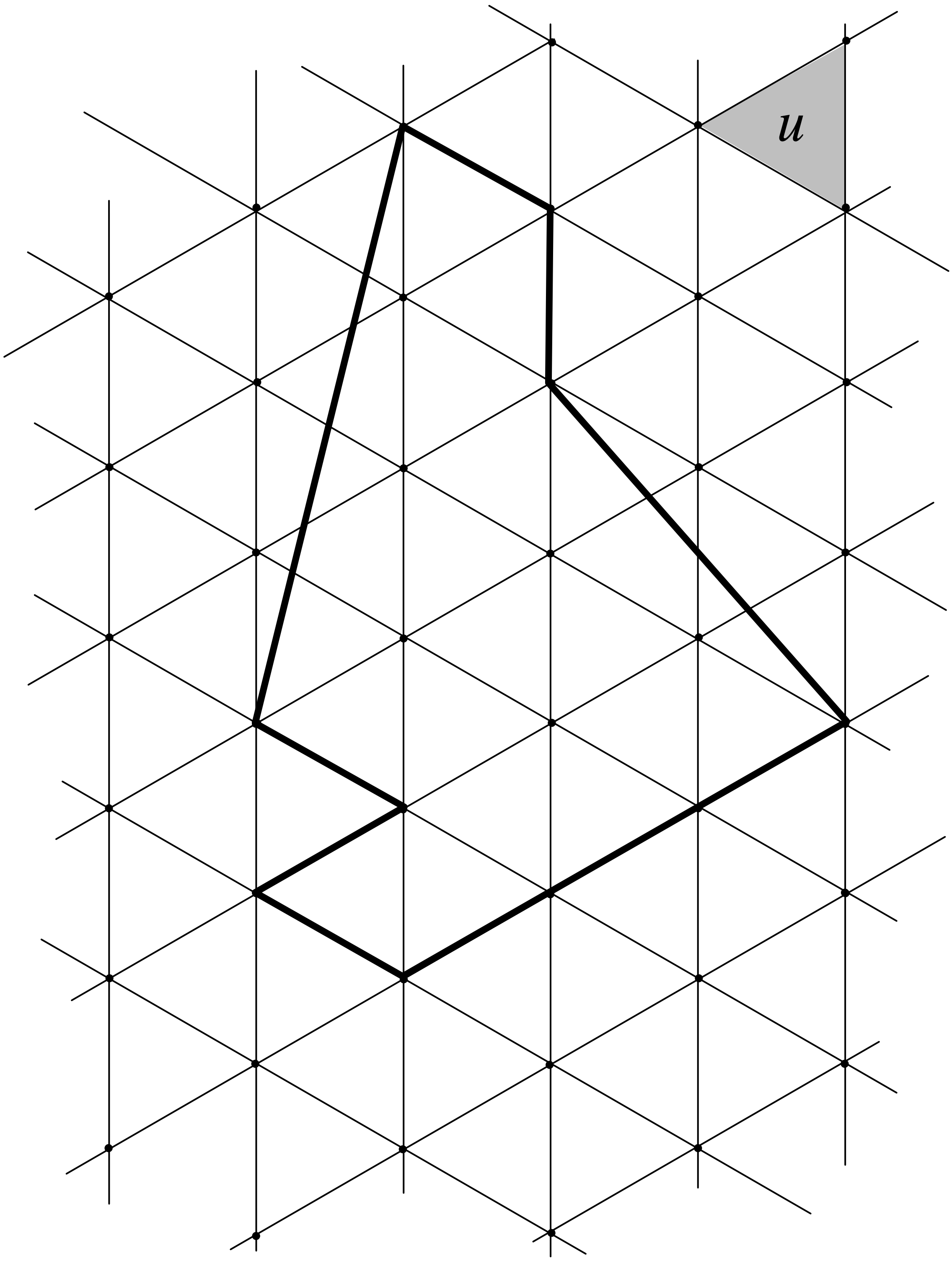
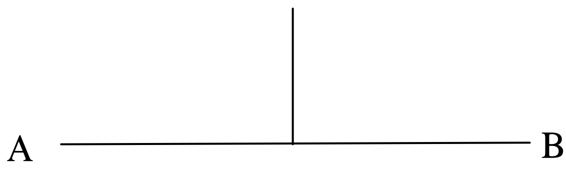


Figure 28

NOTES

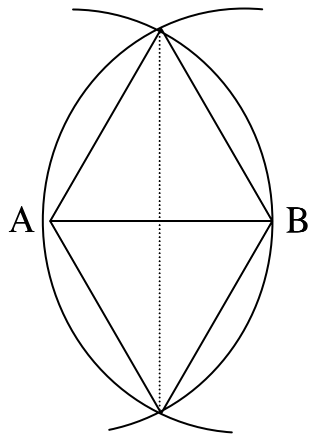
Rappels pour qui n'est plus familier avec $\frac{\pi}{3}$, tiers d'un angle plat.
La moitié d'un plat est définie, en paire par la négative : une perpendiculaire à une droite (D) en un point est LA droite qui ne penche ni d'un côté, ni de l'autre.

Figure 29



Le tiers, lui, se construit en triple et même en double triple, six d'un coup, par deux cercles égaux. Qui plus est cela engendre orthogonalité et moitiés.

Figure 30



Construction : mener d'un point A extérieur à une droite (Δ), une droite faisant un angle de $\frac{\pi}{3}$ avec celle-ci.

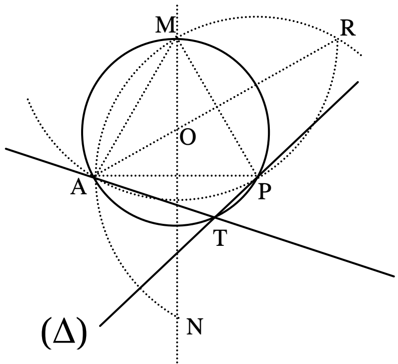


Figure 31

On prend un point arbitraire P sur (Δ). On trace les triangles équilatéraux AMP, ANP et MPR. Les droites (MN) et (AR) se coupent en O centre du cercle circonscrit au triangle AMP. Ce cercle recoupe (Δ) en T. L'angle de (AT) et (Δ) vaut $\frac{\pi}{3}$.

Trois cercles de rayon AP et de centres A, P et M suffisent pour déterminer les droites (AR) et (MN) puis le point O.
L'angle $\widehat{ATP}$ est inscrit dans le cercle et l'arc AP vaut $\frac{\pi}{3}$.
Correspondance entre les deux systèmes de mesure des aires :

$\mathcal{Q}$ système à carré de base

$\mathbf{T}$ système à triangle équilatéral de base.

Soit un triangle ABC de hauteur AH et de "tierceur" AT.

On a $(ABC)_{\mathcal{Q}} = \frac{1}{2}$ AH.BC

$(ABC)_{\mathbf{T}}$ = AT.BC

Dans le régime $\mathcal{Q}$ avec le théorème de Pythagore, et dans le régime $\mathbf{T}$ avec celui de Samos on a établi 2.AH = AT.$\sqrt{3}$

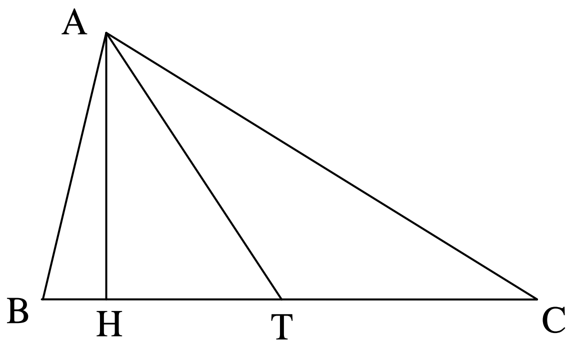


Figure 32

Donc $4(ABC)_{\mathcal{Q}} = \sqrt{3}\,(ABC)_{\mathbf{T}}$

---

et cetera,

Complément

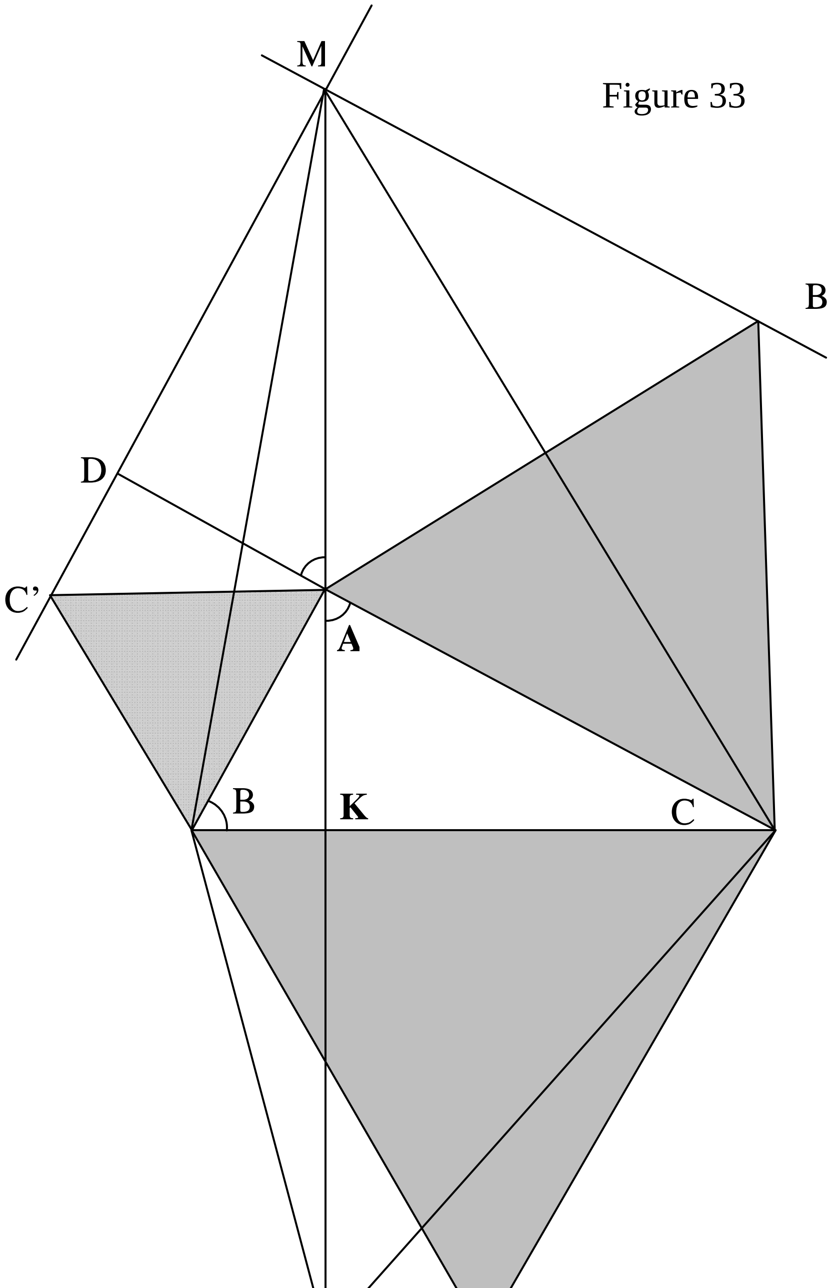


Figure 33

"Pythagore" est une affaire de similitude. Pappus avait ouvert la voie dans ce sens avant Clairaut.
Revoyons la démonstration sous son égide.
Sur les côtés d'un triangle ABC rectangle en A, dressons les trois triangles équilatéraux A'BC, B'CA et C'AB.
La parallèle à (AB) en C' coupe (AC) en D et la parallèle à (AC) menée par B' coupe (C'D) en M.
DA peut être considéré comme hauteur de C'AB et MD de B'CA. De plus (MD) et (DA) sont orthogonales.

Les hauteurs de triangles équilatéraux étant proportionnelles aux côtés : DA = kAB, MD = kAC (inutile d'évaluer k).
De plus, comme $\widehat{ADM} = \widehat{BAC} = 1$ droit, les triangles DAM et ABC ont même forme.

Par suite AM = kBC et, si on prolonge (MA) jusqu'en K sur (BC), $\widehat{KAC} = \widehat{DAM}$ (opposés par le sommet). Or, $\widehat{KAC} = \widehat{CBA} = \widehat{MAD}$, donc (AK) est orthogonale à (BC) et, si sur (AK) on prend le point L, tel que KL = MA = kBC alors (LA') est parallèle à (BC) puisque ce segment KL est égal à la hauteur du triangle équilatéral A'BC. On peut donc, avec des triangles de bases égales dans une même bande, écrire les égalités d'aires. *BC*

$$(B'AC) = (MAC) = (KLC)$$

de même (BC)

$$(C'AB) = (MAB) = (KLB)$$

Et en additionnant :

$$(B'AC) + (C'AB) = (KLC)+(KLB) = (LBC) = (A'BC)$$

ce qui, avec l'unité d'aire choisie donne :

$$\boxed{AC^2 + AB^2 = BC^2} \qquad \text{(AC-deux, AB-deux, …..)}$$

ou l'aire du triangle équilatéral construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égale à la somme des aires des triangles équilatéraux construits sur les autres côtés.
L'important est la relation entre les mesures des côtés.

MISE EN PAGE :
Françoise BESSE

COMITE DE REDACTION ET DE LECTURE :
Pascale AMP
Frédéric METIN
Marie-Noëlle RACINE

REDACTEUR EN CHEF :
Catherine LABRUERE CHAZAL

DIRECTEUR DE LA PUBLICATION :
Catherine LABRUERE CHAZAL, Directrice de l'IREM

DÉPÔT LÉGAL :
n° 193 – 1ER semestre 2010

IMPRESSION :
Service Reprographie

FEUILLE DE VIGNE
Université de Bourgogne – UFR Sciences et Techniques
IREM
9 Avenue Alain Savary – BP 47870 – 21078 Dijon cedex
☎ 03 80 39 52 30 – Fax 03 80 39 52 39
@ : iremsecr@u-bourgogne.fr.
http://math.u-bourgogne.fr/IREM