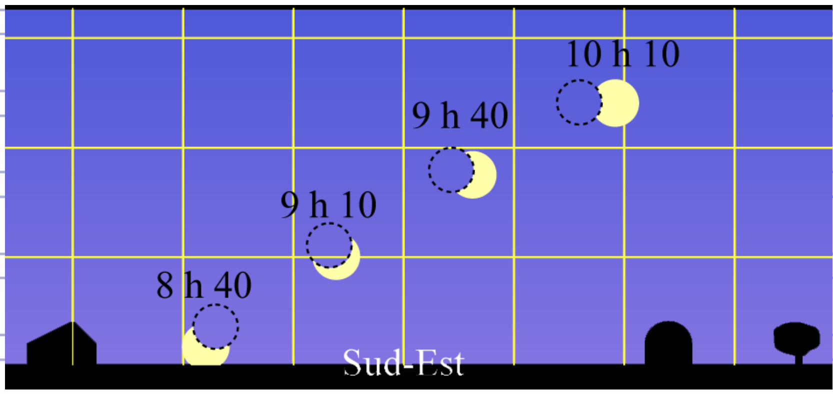
N° 118 – Décembre 2010

Feuille de Vigne

Irem de Dijon

- Patrons et Economie
- Recherche de minima et de maxima en géométrie
- Le problème des rencontres, le jeu de treize



Revue Trimestrielle

Issn 0246-5752

Sommaire

Éditorial

Pas de bonne feuille (de Vigne) sans un édito… À l'IREM, on souhaite « tourner » pour cette tâche. Alors cette fois-ci, on a fait appel à un retraité qui passait par là ! Avant de présenter ce numéro 118, le retraité de service, débarrassé des contraintes hiérarchiques du fonctionnaire qu'il a été, aimerait en profiter pour exprimer quelques états d'âmes qui le « turlupinent » depuis plusieurs années.

Lorsque j'ai commencé à l'IREM de Dijon, c'était une ruche bourdonnante de dizaines de membres dans chacun des quatre départements. On y cherchait tous « azimuts » et tous niveaux[1], sans cloisonnement, au contraire, en communiquant. Actuellement, même si on y produit encore des choses fort intéressantes et si certains stages ou journées de formation réunissent un nombre important de collègues, notre IREM ressemble plutôt à un quarteron d'initiés joint à un club de retraités ! De même, la régionale APMEP ne rassemble qu'une poignée de membres pour ses A.G. À quoi cela tient-il, qu'en Bourgogne, les professeurs de mathématiques semblent aussi peu attirés par le travail en équipe[2] ?

Pour ma part, lorsque j'ai été nommé dans mon premier poste, en Lorraine, j'ai eu la chance d'être aussitôt intégré à un groupe IREM local. Dans ce collège, existaient des classes dites « coopératives » dans lesquelles le travail en groupes était institué. Déjà habitué au travail en équipes par le milieu des centres de vacances, je me suis félicité de l'un et de l'autre et j'ai bénéficié de l'expérience de mes collègues plus expérimentés. Arrivé en Côte-d'Or, c'est tout naturellement que j'ai voulu participer à une équipe IREM. De même, un peu plus tard, les réunions de la Commission nationale inter-IREM Collège, ont été des occasions de formation continue incomparables.

Le but n'est pas de raconter ma carrière, mais simplement de lancer un ***appel*** *pour que les jeunes (et les moins jeunes) comprennent l'importance et l'intérêt du* ***travail en équipe****. Il m'a toujours paru impensable qu'en matière d'éducation et d'enseignement, le travail en équipe ne soit pas une institution, une obligation ! Même si, de nos jours, Internet permet des échanges divers et rapides, rien ne remplace la discussion en direct.*

Pour ce qui est du présent numéro, je pense que ses articles qui ne sont pas à prendre tout crus pour faire cours, peuvent faire l'objet d'une concertation pour les exploiter au collège ou au lycée. Même s'ils paraissent d'un « bon » niveau mathématique, l'ancien professeur de collège voit bien comment on pourrait y trouver matière pour de jeunes élèves. Les patrons de cube de Michel Lafond sont d'abord l'occasion de trouver les 11 patrons, peut-être par des méthodes moins rigoureuses qu'à partir des 35 hexaminos, mais aussi formatrices. À l'heure du développement durable, le jeu du minimum d'aire devient même un jeu « écologique » ! L'article de Tristan Deray me fait penser que, dès la classe de 6^e^, les arbres de choix, les tableaux permettant le dénombrement, sont souvent absents de l'enseignement. Ils se justifient encore plus de nos jours où les statistiques et les probabilités ont le vent en poupe dans les programmes[3].

L'annonce des rallyes bourguignons est là aussi pour rappeler l'agrément du travail en équipes ; qu'on se le dise ! bonne lecture et bonne recherche… concertée.

Jean-François MUGNIER

[1] Il est vrai que les conditions matérielles (2 HSA au minimum) étaient fort différentes et que la reconnaissance de l'institution était tout autre !

[2] Je n'accuse personne, les responsabilités sont sans doute très diverses et historiques, mais dans quelques académies, les IREMs sont encore très actifs et mieux dotés.

[3] Et c'est très bien ainsi car nécessaire à la formation du citoyen.

Agenda

NOUVELLES ASTRONOMIQUES DE DECEMBRE 2010

Une éclipse de Soleil à plus de 60%, ce n'est pas si courant. Elle aura lieu le mardi 4 janvier (maximum à 9 h 10).
Pour l'observer avec vos élèves, le Comité de Liaison Enseignants et Astronomes (CLEA) propose des filtres testés, à prix coûtant : 10 € les 7 (frais de port compris). Il s'agit du "Viséclipse Sol Obs 14" un verre de soudeur n°14 sur support antichoc, bénéficiant du label de RETINA FRANCE et recommandé par le Secrétariat d'État à la Santé et par l'Académie Nationale de Médecine. Il est réutilisable pour les prochaines éclipses.
http://acces.inrp.fr/clea/aLaUne/viseclipses/

Et une éclipse de Lune aura lieu deux semaines avant, le matin du 21 décembre au coucher de la Lune.

Tous les détails sur ces deux éclipses sur : http://www.inrp.fr/Acces/clea/cahiers-clairaut/CLEA_CahiersClairaut_131_05.pdf

Pour tout savoir sur ces éclipses, une conférence de la Société Astronomique de Bourgogne, le mardi 14 décembre à 18 h 30, salle de la NEF, 1 place du théâtre à Dijon, animée par Pierre Causeret : Comment observer ces éclipses ? Quelles précautions faut-il prendre ? Combien de temps durent ces phénomènes ? Pourquoi voit-on si peu d'éclipses ? Quelles seront les prochaines ? Vous aurez les réponses à toutes ces questions et à beaucoup d'autres lors de cette conférence.

Autres petites nouvelles :
C'est bien Vénus que vous voyez le matin à côté de la Lune. Elle sera visible tout l'hiver le matin. Elle est au maximum de luminosité actuellement.
Par contre le soir, c'est Jupiter que l'on aperçoit au sud.

Si vous voulez voir l'exposition sur la Lune au jardin des sciences de Dijon (parc de l'Arquebuse), dépêchez-vous, elle se termine le 2 janvier !

13 JANVIER 2011

Journée de formation : ***« Jeux et mathématiques »,*** *animée par* **Nicolas PELAY,** Doctorant en Didactique des Mathématiques à Lyon 1**.**

Objectifs de la formation :

- Découvrir et utiliser le jeu en classe comme support pédagogique.

Contenus :

- Appréhender l'aspect pédagogique et didactique de nombreux jeux et activités existants.
- Connaître des jeux pour les utiliser en classe afin de diversifier l'enseignement des mathématiques.
- Créer des activités ou des variantes de jeux avec un objectif précis (en groupe classe, en remédiation…).

Démarche pédagogique :

- Alternance de mise en situation des stagiaires et d'exposés de nature théorique

Référents théoriques :

- Outils théoriques de la didactique des mathématiques

Vous pouvez vous inscrire par mail à l'IREM : iremsecr@u-bourgogne.fr

---

21 JANVIER 2011

Rallye mathématique des collèges (21 & 71)

---

26 JANVIER 2011

Rallye mathématique des lycées de Bourgogne

Jeux et Problèmes

Michel LAFOND
mlafond001@yahoo.fr

JEU - 68

Soient :

A = $\sqrt{5}+\sqrt{22+2\sqrt{5}}$ B = $\sqrt{11+2\sqrt{29}}+\sqrt{16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}}}$.

A-t-on A = B ?

PROBLÈME - 68

Démontrer que : si p est un nombre premier, alors la partie entière de $\frac{(p-1)!}{p}$ est paire.

Solutions

JEU - 67

Quelle est la « suite logique » de :

$0{,}6^2 + 0{,}8^2 = 1$
$0{,}28^2 + 0{,}96^2 = 1$
$0{,}936^2 + 0{,}352^2 = 1$
$0{,}8432^2 + 0{,}5376^2 = 1$?

Solution :

C'est : $(0{,}07584)^2 + (0{,}99712)^2 = 1$.

En effet :
La clé est l'identité de Lagrange : $(x^2 + y^2) \times (u^2 + v^2) = (ux - vy)^2 + (vx + uy)^2$

qui permet d'écrire : $(x^2 + y^2)\left(\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2\right)=\left(\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y\right)^2+\left(\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y\right)^2$.

D'où l'implication : $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y\right)^2+\left(\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y\right)^2=1$

que l'on peut écrire matriciellement : $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y \\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{pmatrix}$

et que l'on peut interpréter comme la rotation du vecteur unitaire $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ d'un angle θ de cosinus : $\frac{3}{5} = 0{,}6$ et de sinus : $\frac{4}{5} = 0{,}8$. ($\theta \approx 53{,}1°$).

Ainsi, en posant : $x_0 = 0{,}6$ et $y_0 = 0{,}8$

avec la récurrence : $x_{n+1} = \frac{3}{5}x_n - \frac{4}{5}y_n$ et $y_{n+1} = \frac{4}{5}x_n + \frac{3}{5}y_n$,

on obtient successivement :

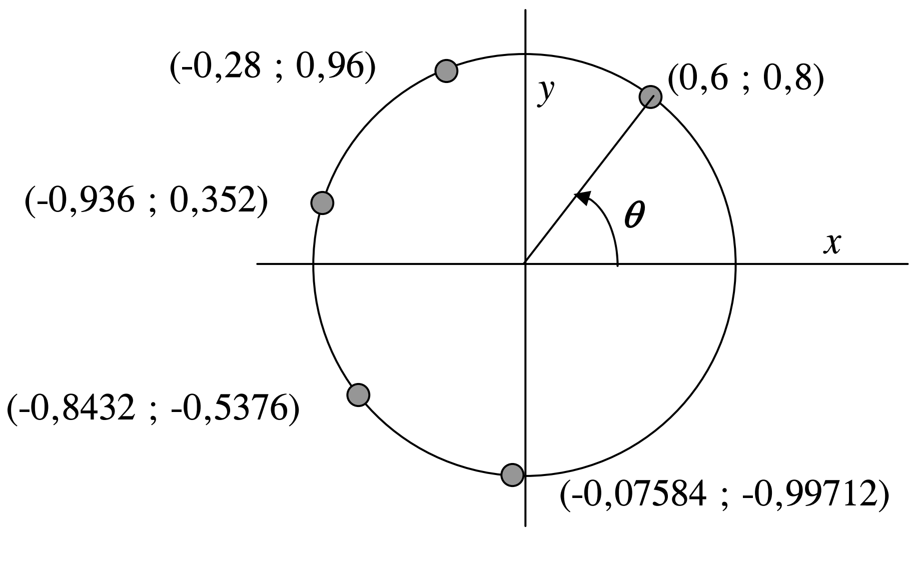
$x_1 = -\,0{,}28$ $y_1 = +\,0{,}96$ $x_2 = -\,0{,}936$ $y_2 = +\,0{,}352$

$x_3 = -\,0{,}8432$ $y_3 = -\,0{,}5376$ $x_4 = -\,0{,}07584$ $y_4 = -\,0{,}99712$.

La suite logique de ce qui est proposé est donc (les signes sont ignorés) :

$$(0{,}07584)^2 + (0{,}99712)^2 = 1.$$

Interprétation géométrique :



PROBLÈME - 67

Quel est le seul nombre premier qui peut s'écrire sous la forme :

$n^4 - 22\,n^3 + 148\,n^2 - 282\,n + 27$ avec n entier naturel ?

Solution :

La réponse est 7.

En effet :
3 et 9 sont des racines « évidentes » du polynôme $n^4 - 22\,n^3 + 148\,n^2 - 282\,n + 27$ lequel se factorise donc selon : $P = (n - 3)\,(n - 9)\,(n^2 - 10\,n + 1)$.
Les facteurs $(n - 3)$ et $(n - 9)$ diffèrent de 6. Donc pour que P soit premier, il faut que $(n - 3)$ ou $(n - 9)$ soit égal à -1 ou $+1$.

Cela laisse 4 possibilités : $n \in \{2 ; 4 ; 8 ; 10\}$.
Le troisième facteur $(n^2 - 10\,n + 1)$ vaut alors respectivement

$-15 ; -23 ; -15 ; 1.$

Seul le dernier cas : $n = 10$ convient ; pour lequel P vaut : $(7)\,(1)\,(1) = 7$.

M. Lucien Sautereau a résolu les deux énoncés Jeu-67 et Problème-67.

Patrons et Economie

Michel LAFOND,

Mots clé : Cube, découpages, minimum, patron.

Résumé : Une étude des « patrons » du cube axée sur l'économie de papier…

Ici, l'économie est celle du papier et les patrons sont plus souples que dans la réalité. Tout le monde a construit un cube à partir d'un rectangle de papier ou de carton, il est donc naturel de se poser la question suivante :

Trouver un rectangle de surface minimale dans lequel on puisse découper un patron du cube unité.

Ce problème figure sous la référence D431 sur le site diophante.fr.
Il a été posé par Lucien Pianaro dans « Jouer Jeux Mathématiques n°8 ».
L'auteur affirme que le rectangle minimum a une aire égale à 189/26, mais en l'absence d'une définition précise de PATRON, on va voir que la réponse est loin d'être aussi simple.

Une remarque avant d'entamer le débat :
La surface latérale du cube unité ayant une aire égale à 6, on a déjà une borne inférieure aux aires des rectangles contenant un patron du cube. Le rectangle de Lucien Pianaro a une aire d'environ 7,27.

A. Une définition provisoire de « PATRON »

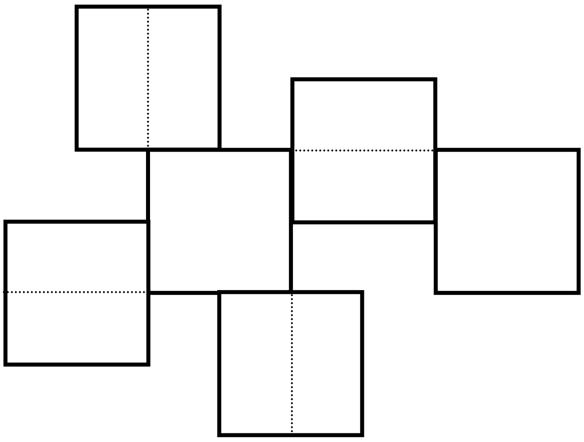
Disons qu'un patron (on ne répètera pas qu'il s'agit du cube unité) est une ligne polygonale fermée délimitant un intérieur pas nécessairement convexe, mais connexe et qui, après un nombre fini de pliages (rotations autour de segments) permet d'obtenir exactement le cube unité complet.

Il est essentiel que le pliage soit physiquement réalisable, sans faire appel au scotch et donc la contrainte de connexité est indispensable. Sinon un rectangle de 2×3 découpé en 6 carrés unité ferait l'affaire. La version papier du patron sera donc en un seul morceau.

Par ailleurs les contraintes de la définition sont minimales : il n'est pas imposé que l'aire du patron soit égale à 6 ce qui autorise implicitement les recouvrements lors des pliages (et on ne s'en privera pas).
Il n'est pas non plus imposé que le patron soit une réunion de carrés unité. Une face pourra donc être « éclatée » en plusieurs morceaux dans le patron pour former un carré unité seulement après pliages.

Nommons PATRON CLASSIQUE la réunion connexe de six carrés unité, sans recouvrement et connectés par des côtés entiers (aussi appelée hexamino comme extension de domino).
Dans les patrons classiques, la connexion doit se faire par côtés entiers pour éviter les situations comme celle de la figure 1 ci-dessous dans laquelle les pliages se font aux contacts des carrés gras et selon les pointillés :

Figure 1

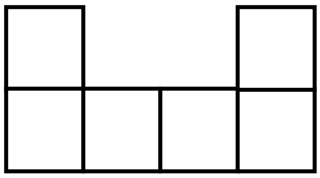


Remarquons qu'après les pliages, quatre des faces du cube sont éclatées en deux morceaux.

B. Examen des patrons classiques

Il est bien connu, et c'est un bon exercice pour les élèves, qu'il y a exactement 11 patrons (classiques) du cube. Nous admettrons ce résultat démontrable en examinant les 35 hexaminos, et en rejetant ceux qui ne conviennent pas.

Ceci n'est pas un patron :



Un bon exercice pour les plus grands est de trouver les 54 patrons du pavé droit (parallélépipède rectangle).
Donnons en figure 2, pour chacun de ces 11 patrons, l'aire du « plus petit » rectangle le contenant.

Cela donne lieu à 11 exercices de géométrie-analyse-trigonométrie intéressants, dont un, représentatif, est traité en annexe.

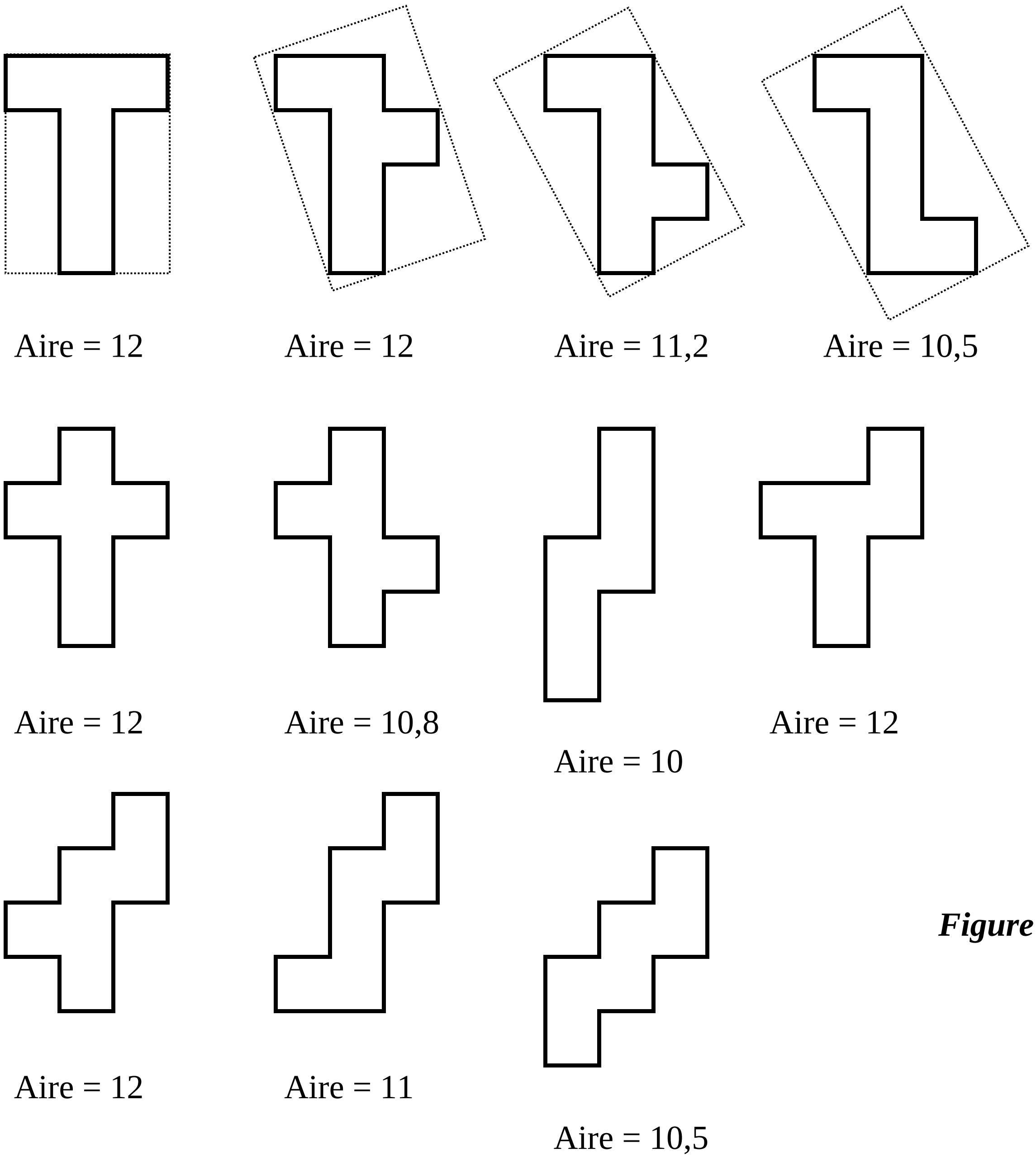


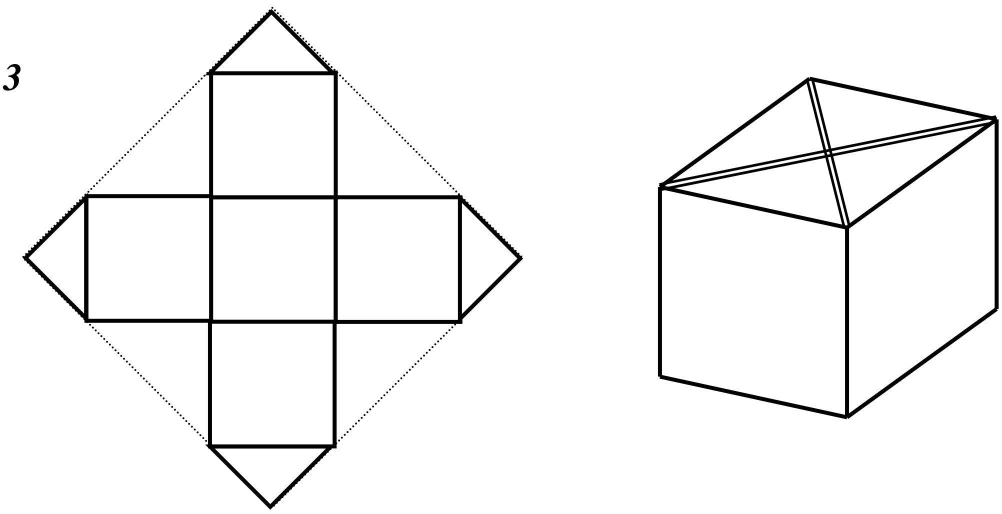
Figure 2

Comme on le constate, ce n'est pas dans le classique qu'il faut aller chercher un patron économique.
Avec eux, le mieux que l'on puisse faire est un rectangle d'aire 10. On n'a d'ailleurs pas le choix.
Regardons alors ce qui se passe lorsqu'on éclate les faces.

C. Quelques patrons dans des rectangles d'aire 8

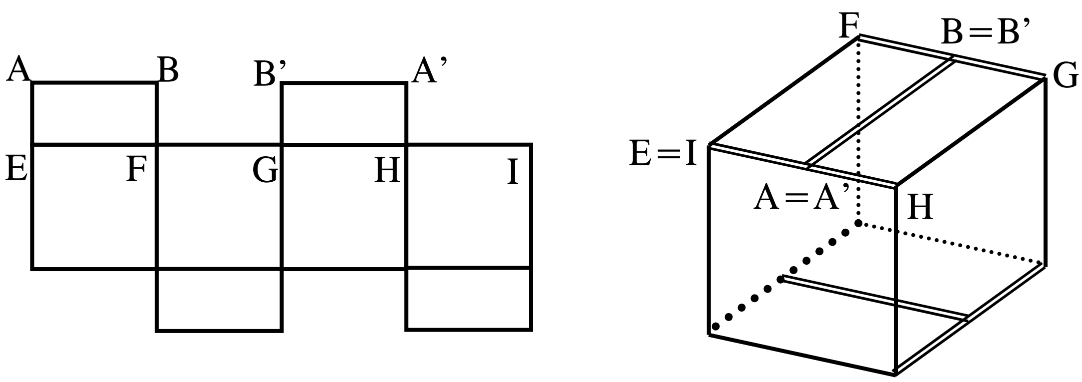
Une idée qui paraît excellente, est de choisir pour rectangle un carré avec le patron ci-dessous, qui après pliage donne un cube avec 5 faces entières et une face éclatée en quatre triangles :

Figure 3



L'aire du carré est égale à $(2\sqrt{2})^2 = 8$, c'est nettement mieux que 10 pour le patron classique vu en B) mais encore loin du minimum théorique 6.
Il y a bien d'autres exemples de rectangles d'aire 8, et l'un d'eux (figure 4) est particulièrement intéressant car c'est celui qui débouche, après quelques manipulations géométriques, au record 189/26 de Lucien Pianaro.

Figure 4

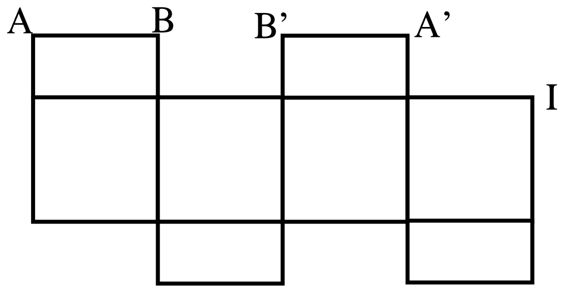


Ici, après pliage, on a un cube avec 4 faces entières et 2 faces éclatées en deux rectangles.

D. Amélioration de la figure 4 pour aboutir à une aire de 189/26 < 8

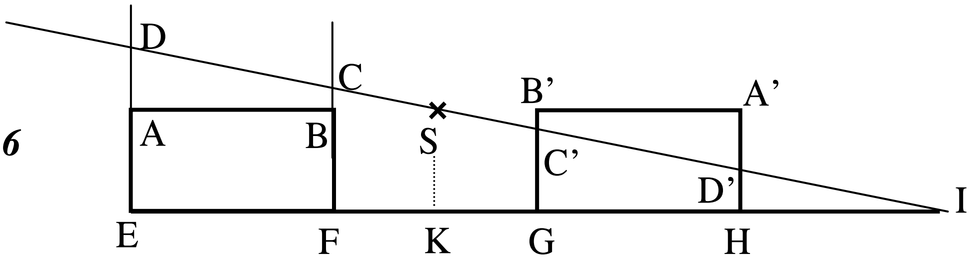
On va procéder en deux temps :

Figure 5



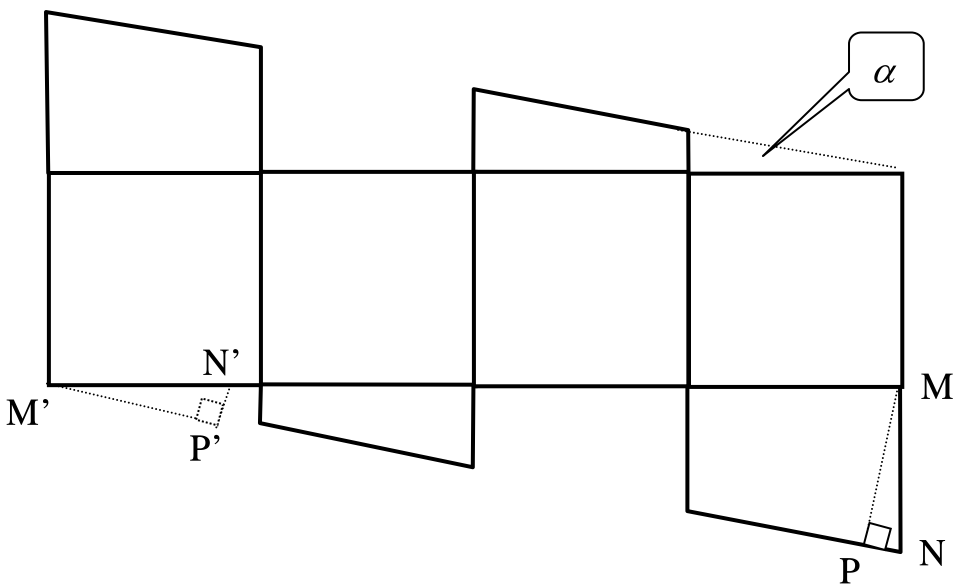
Dans le pliage du patron de la figure 5, A vient en A' et B vient en B'. Cela se traduit par une symétrie centrale dont le centre est le milieu S de [BB']. Cette symétrie échange les deux rectangles supérieurs. (Voir la figure 6 ci-dessous qui représente le haut de la figure 5).

Figure 6



Dans un premier temps, joignons IS (figure 6) et remplaçons le trapèze [A'B'C'D'] par son symétrique [ABCD]. La face supérieure du cube, qui dans la figure 4 était composée des deux rectangles, sera maintenant composée des deux trapèzes inégaux [C'D'HG] et [EFCD].
En procédant de même pour la partie basse de la figure 4, on aboutit au patron visible ci-dessous :

Figure 7



S'il y a des sceptiques, faites comme moi : construisez ce patron en papier ou en carton.

L'angle α a une tangente égale à KS / KI = 1 / 5 [Voir figure 6].

On tire : $\cos(\alpha) = \frac{5}{\sqrt{26}}$ et $\sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{26}}$. Avec MN = 4 tan($\alpha$) = 4/5, on trouve facilement l'aire du parallélogramme contenant le patron de la figure 7, cette aire vaut 36 / 5 = 7,2. On progresse…

En effet, ce parallélogramme n'est pas un rectangle mais on va en faire un rectangle dans un deuxième temps en remarquant ceci :

Lors du pliage du patron de la figure 7, M se transforme en M' et N se transforme en N'. Le triangle [MPN] rectangle en P peut donc être déplacé et mis en [M'P'N']. En procédant symétriquement pour la partie Nord de la figure 7, on aboutit au curieux patron visible ci-dessous dans la figure 8, facile à construire à partir des données précédentes :

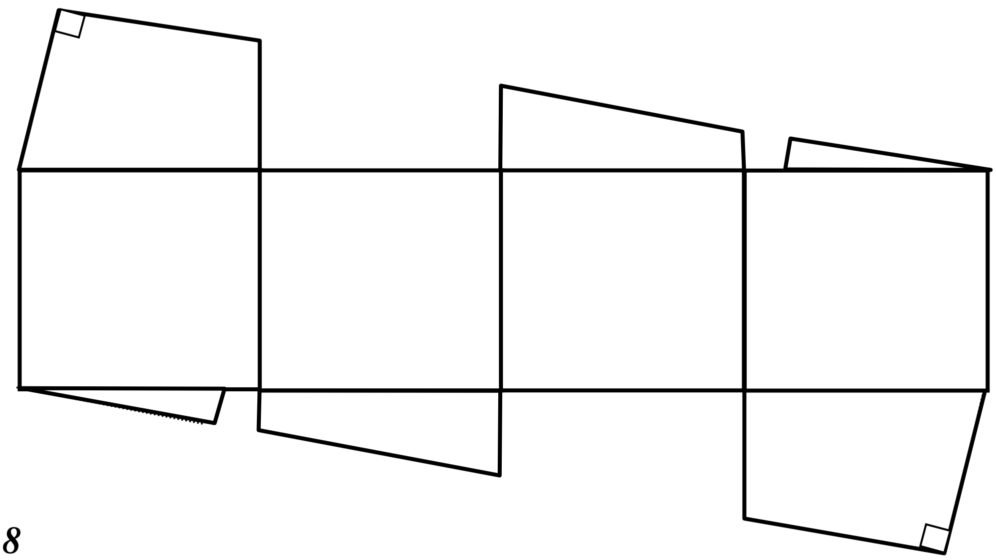


Figure 8

Calculons l'aire du rectangle minimal contenant ce patron (en pointillé dans la figure 9) :

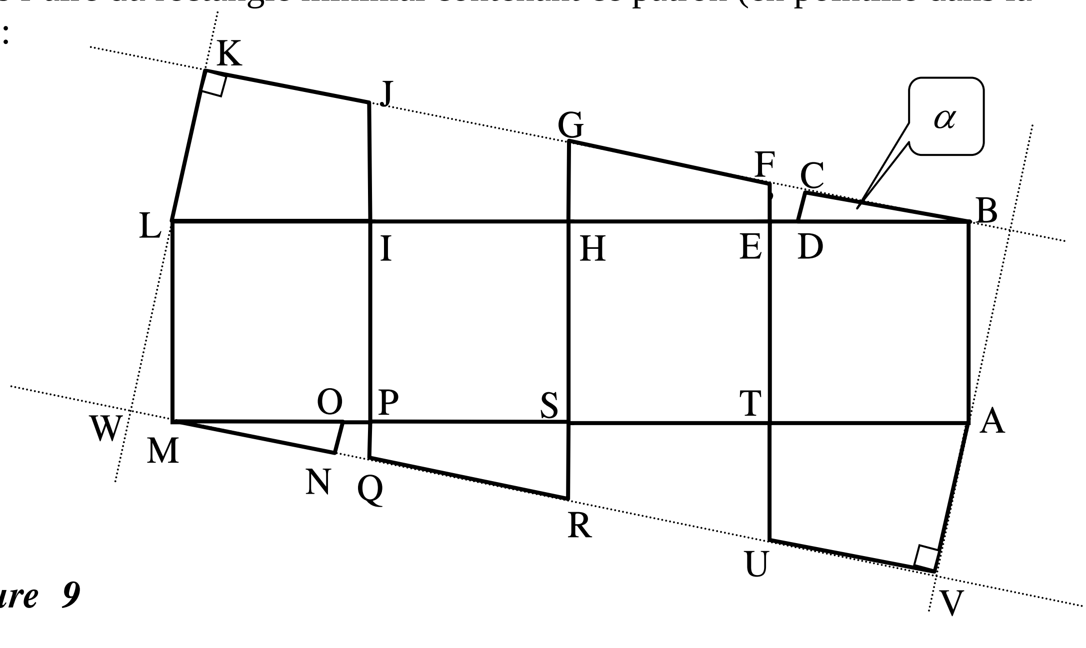


Figure 9

À partir de $\cos(\alpha) = \frac{5}{\sqrt{26}}$ et $\sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{26}}$ on obtient facilement :

- la longueur VM + MW $= 4\cos(\alpha) + \sin(\alpha)$
- la largeur KL + LW $= 4\sin(\alpha) + \cos(\alpha)$

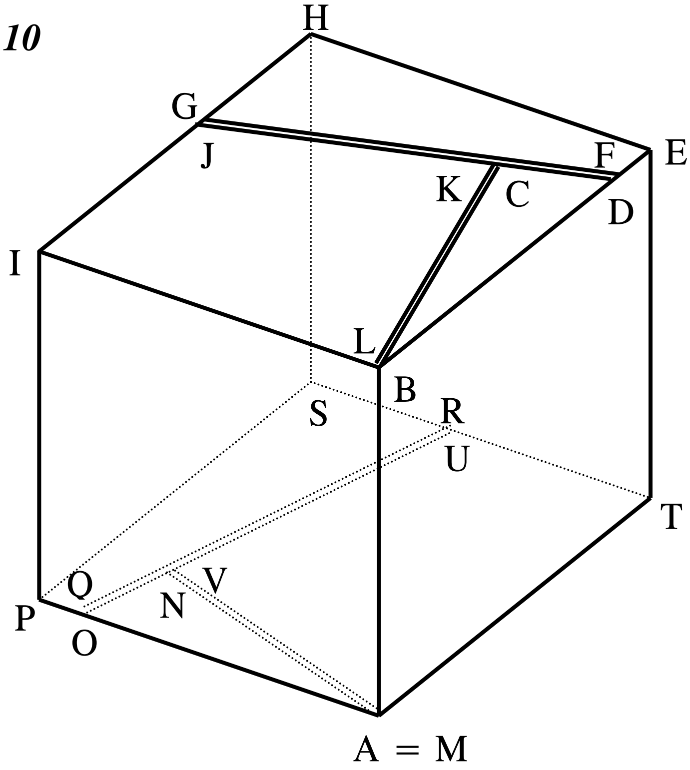
D'où l'aire

$4\cos^2(\alpha) + 4\sin^2(\alpha) + 17\sin(\alpha)\cos(\alpha) = 4 + 17\times 5 / 26 = 189 / 26 \approx$ **7,27**.

On retrouve tous les points de la figure 9 dans le cube associé après pliage, sur la figure 10 ci-dessous.
Bien entendu, les pliages font qu'à la fin certains points sont confondus, il s'agit de :

F = D, B = L, M = A, O = Q, G = J, R = U, V = N.

Figure 10



Jusque là, on n'a pas exploité le recouvrement lors des pliages. Comme le recouvrement « gaspille » de la surface, cela semble bizarre d'y faire appel, et pourtant :

E. Une meilleure solution. La preuve par 7.

Les 4 schémas ci-dessous montrent un rectangle d'**aire 7** qui, à l'aide de 8 plis, permet d'obtenir un cube unité entier.
Le rectangle-patron (figure 11-1) est tout simplement une bande de longueur 7 et de largeur 1.
Les pliages (figures 11-2 et 11-3) sont effectués le long des 6 côtés communs et de 2 diagonales.

Figure 11-1

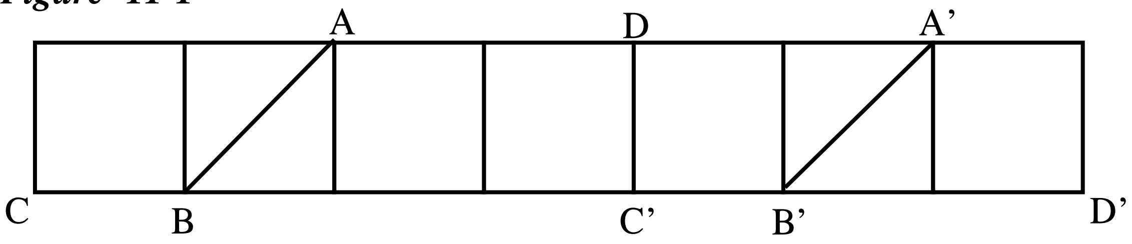


Figure 11-2

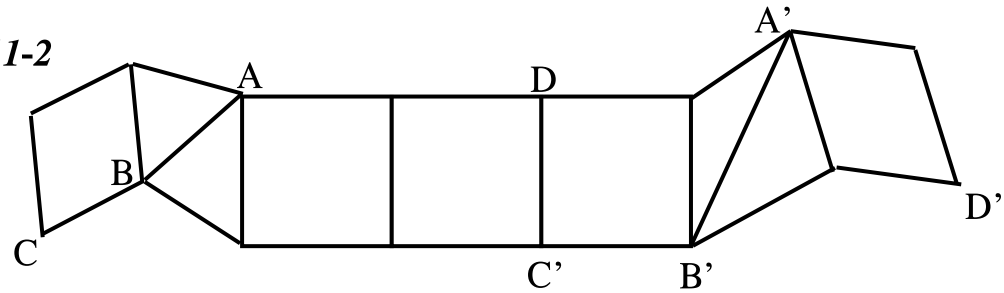
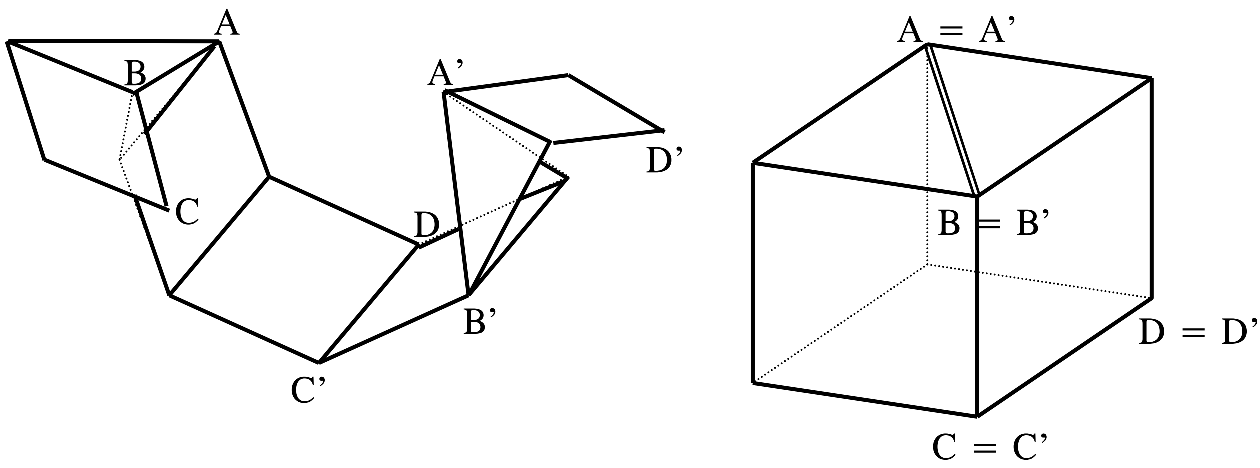


Figure 11-3



La face supérieure du cube, non seulement est éclatée, mais elle a une double épaisseur.

F. On s’approche de l’optimum.

On a bien progressé : passant d’une aire égale à 10 dans le meilleur des cas avec les patrons classiques, à une aire égale à 8 en éclatant certaines faces, puis à une aire égale à 7,27 avec un peu de chirurgie, et enfin à une aire égale à 7 en utilisant le recouvrement.
Mais, une imprécision dans la définition d’une ligne polygonale fermée va encore permettre une amélioration considérable, puisqu’on va trouver des rectangles d’<u>aires aussi proches de 6 qu’on le souhaite</u> !

En effet, examinons une bande de plusieurs carrés unité accolés et se terminant par un rectangle comme le montre la figure 12-1 ci-dessous :

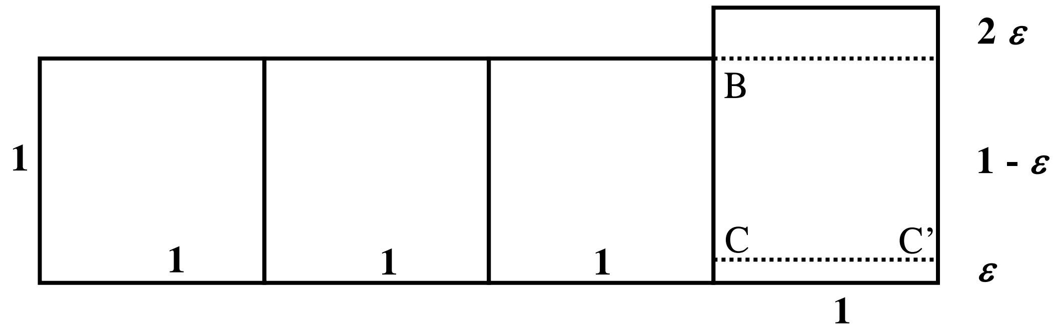


Figure 12-1

Le rectangle de droite a pour dimensions 1 et 1 + 2 ε.

Réalisons une « coupure » selon le segment [BC] de la figure 12-1.
Avec une version papier, la coupure se réalise avec une paire de ciseaux ou un cutter pour les plus audacieux. Mathématiquement, tout ce qu'on souhaite est un pliage du rectangle selon le segment [CC'].

La coupure se réalise mathématiquement en disant que la ligne polygonale fermée réalisant le patron est dorénavant la ligne [A **B C D** E F G A] de la figure 12-2 dans laquelle le segment [BC] est doublé.
C'est bien une ligne polygonale fermée qui délimite sans ambiguïté un intérieur connexe.
La nouveauté est que deux segments de la ligne ont une partie commune. Mais ce n'était pas interdit…
La découpe selon [BC] est permise puisque dans l'énoncé, le patron doit être « découpé » dans le rectangle sans plus de précision.

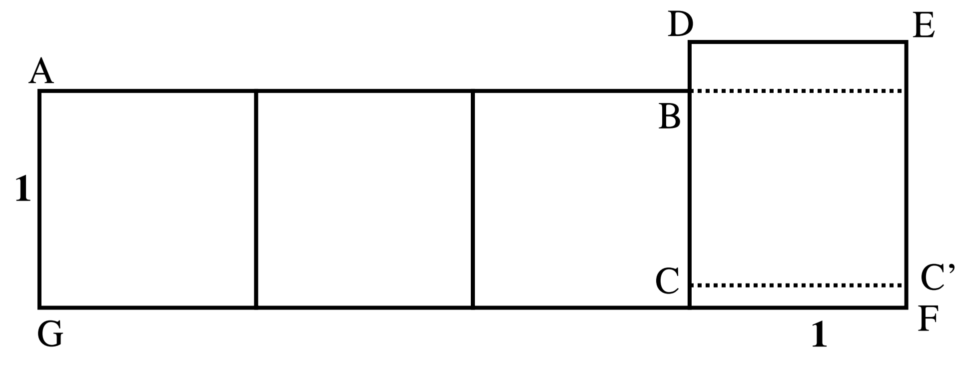


Figure 12-2

La coupure permet un premier pliage selon [CC’] pour aboutir à la figure 12-3 ci-dessous :

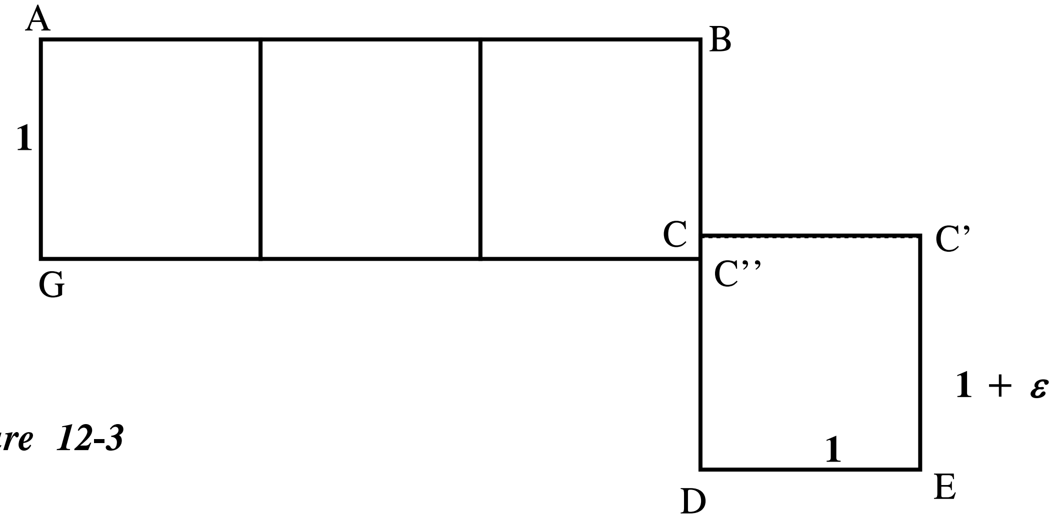


Figure 12-3

Le segment [CC’’] n’a pas été coupé (connexité oblige) donc, on peut plier le rectangle de la figure 12-3 selon le petit segment [CC’’] pour aboutir à la figure 12-4 qui est composée de 4 carrés unité, dont une bande rectangulaire de dimensions $1 \times (\varepsilon)$ en grisé a une triple épaisseur :

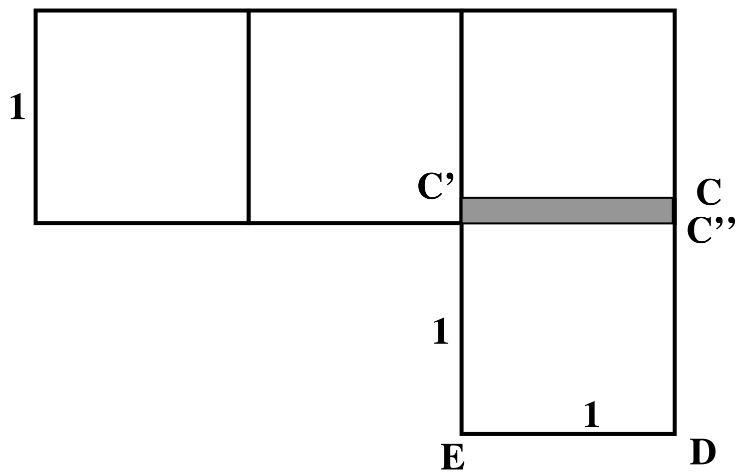


Figure 12-4

Appelons « <u>transformation T</u> » la succession d’opérations permettant de passer de 12-1 à 12-4.

Il suffit pour terminer de partir du patron de la figure 12-5, qui est contenu dans un rectangle de dimensions $6 \times (1 + 4\varepsilon)$, et de lui faire subir deux transformations T symétriques comme vu ci-dessus.
Ce qu’on obtient (figure 12-6) est un patron classique à la réserve près qu’il possède deux bandes (en grisé) de dimensions $1 \times (\varepsilon)$ ayant une triple épaisseur.
Cela n’empêchera pas les 5 derniers pliages aboutissant à un cube unité.
Le tout nécessite 9 pliages, peut-être peut-on faire mieux.

Figure 12-5

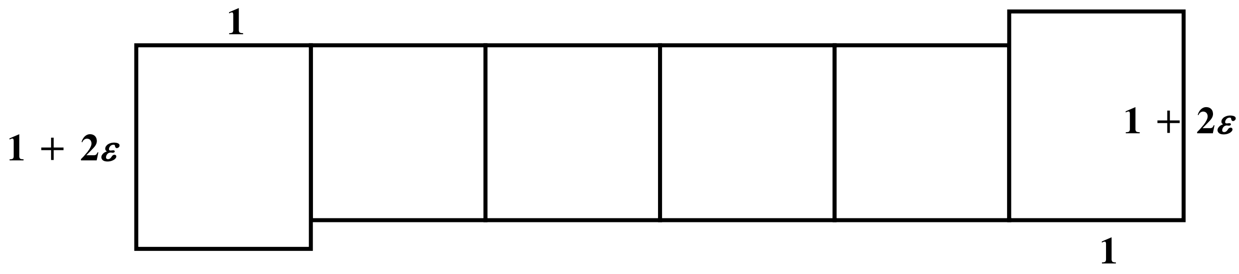
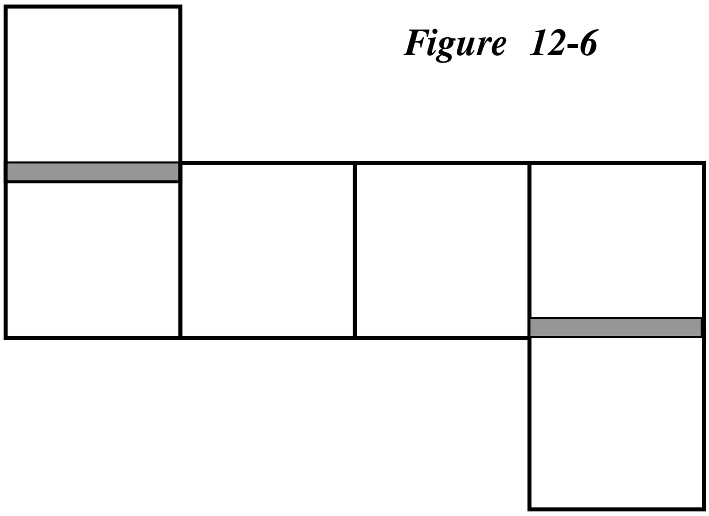


Figure 12-6

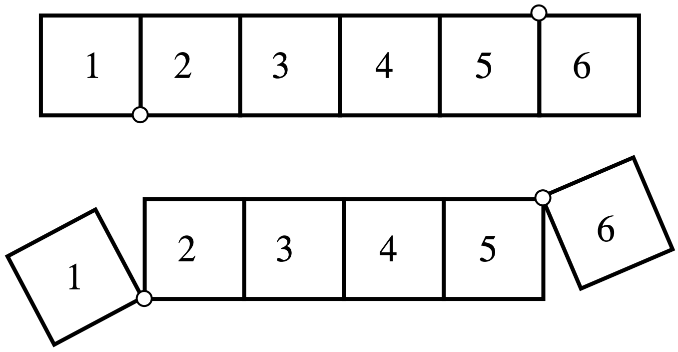


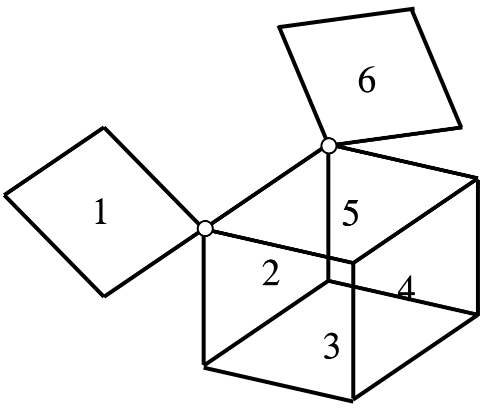
Le rectangle contenant le patron 12-5 a pour dimensions $6 \times (1 + 4\varepsilon)$, son aire est aussi proche de l'optimum 6 que l'on veut.

G. Une nouvelle définition d'un patron et de nouvelles questions.

Dans la définition provisoire d'un patron, on a oublié de dire qu'un pliage devait s'effectuer selon un segment **non réduit à un point**. Un pliage selon un point n'est pas réaliste avec une feuille en papier, mais mathématiquement c'est possible, le pliage devenant une rotation autour du point.

Cette possibilité permettrait d'envisager le patron d'aire 6 de la figure ci-dessous qui, avec 2 découpes, 4 pliages « normaux » et deux « pivotements » aboutirait au cube unité.





À la fin du pliage, 3 est en bas, 5 est en haut, la face 1 vient en avant et la face 6 en arrière.
Pour éviter ce genre de situation, je propose la définition suivante du patron qui est physiquement acceptable :

Un patron (du cube unité) est une ligne polygonale fermée délimitant un intérieur pas nécessairement convexe, mais connexe et qui, après un nombre fini de pliages (rotations autour de segments non réduits à des points) aboutit exactement au cube unité complet. L'éclatement des faces, les découpes (préservant la connexité) et les recouvrements restent autorisés.

On peut alors se poser de nouvelles questions comme :

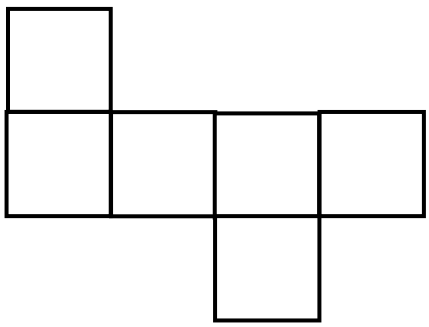
Trouver un <u>ensemble convexe</u> de surface minimale dans lequel on puisse découper un patron du cube unité.

Trouver un <u>carré</u> de surface minimale dans lequel on puisse découper un patron du cube unité.

Je pense sans preuve, que pour cette dernière question, un carré de côté $\sqrt{6}\ \ (1+\varepsilon)\ \ \varepsilon > 0$ arbitraire devrait convenir.

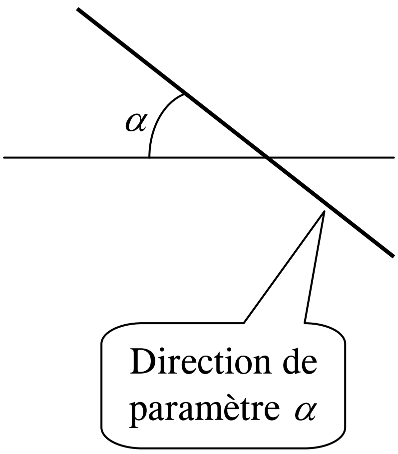
H. ANNEXE : Comment trouver le plus petit rectangle contenant un patron ?

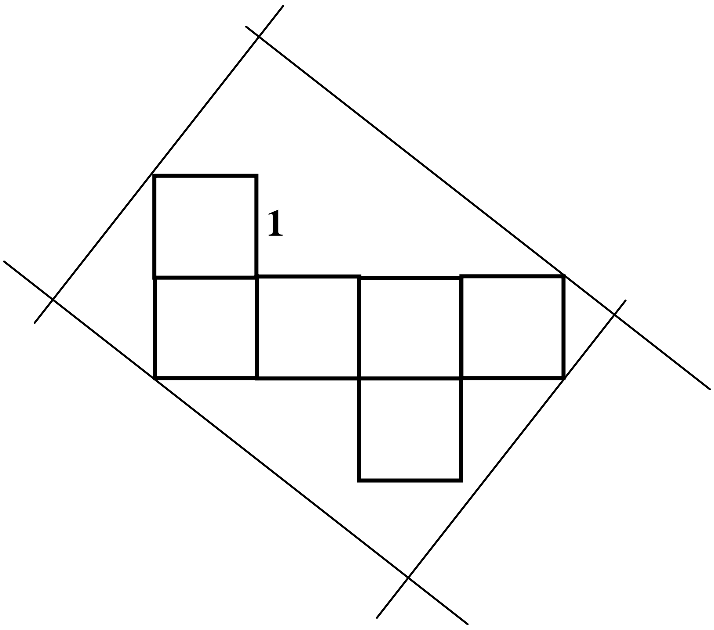
Soit le patron P_1 ci contre :



On ne connaît pas *a priori* l'orientation du rectangle minimal contenant P_1.
L'orientation du rectangle sera définie par le paramètre α : angle aigu que fait le support d'un côté par rapport à « l'horizontale ». Il faut faire varier α de 0 à $\pi/2$.

α étant donné, on trouve facilement les deux parallèles « nord et sud » faisant un angle α avec l'horizontale, puis les deux parallèles perpendiculaires aux précédentes et qui contiennent au mieux le patron. Le rectangle minimal correspondant a une aire $f(\alpha)$.

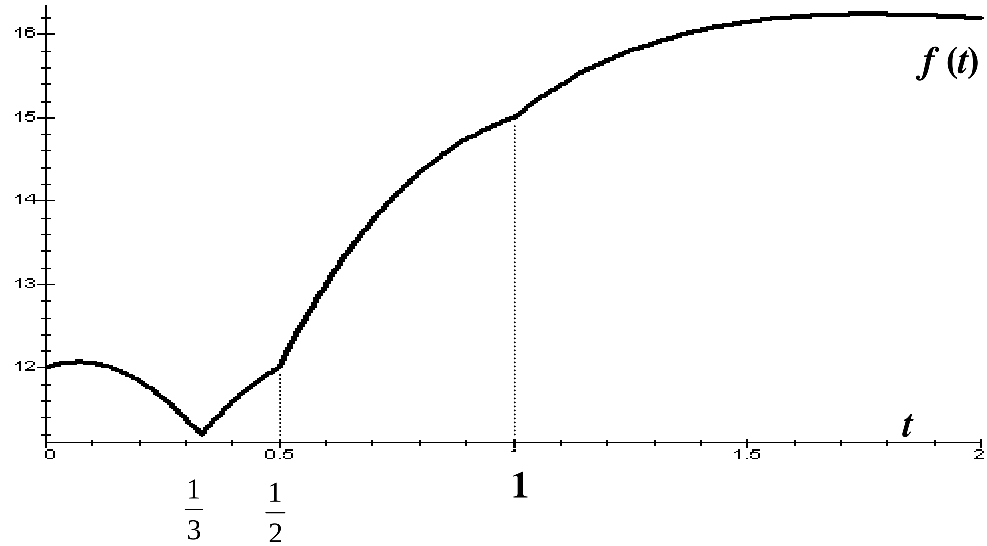




f est continue, rationnelle par morceaux, et définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{2\ (-t^2+t+6)}{1+t^2} & si \quad 0 \le t \le 1/3 \\ \dfrac{4\ (t^2+3t+2)}{1+t^2} & si \quad 1/3 \le t \le 1/2 \\ \dfrac{2\ (4t^2+9t+2)}{1+t^2} & si \quad 1/2 \le t \le 1 \\ \dfrac{3\ (4t^2+5t+1)}{1+t^2} & si \quad 1 \le t < +\infty \end{cases} \qquad \text{où } t = \tan(\alpha)$$

La courbe représentant f est visible ci-dessous :

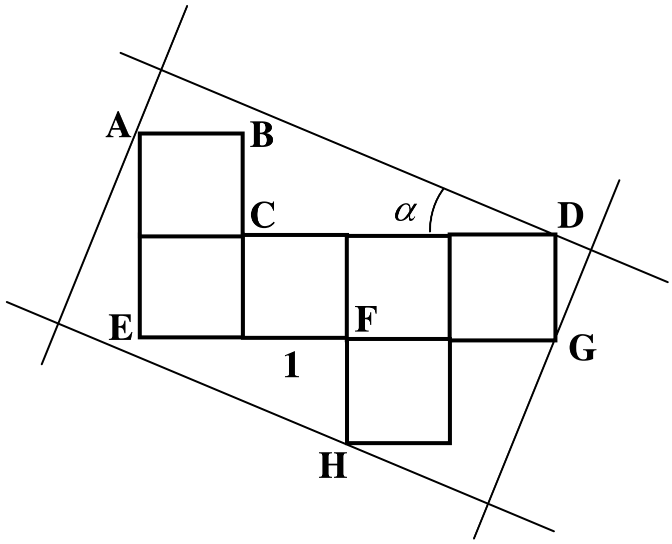


Explications :
Il est clair qu'on a 4 cas de figure selon que t est compris dans

$$[0\,;\,1/3],\ \ [1/3\,;\,1/2],\ \ [1/2\,,\,1]\ \text{ ou }\ [1\,;\,+\infty[.$$

Traitons par exemple le deuxième cas : $t \in [1/3\,;\,1/2]$ avec la figure A1 ci-dessous.

Figure A1



Puisque $t = \tan(\alpha) \in [1/3\,;\,1/2]$ et que $\tan(\text{BDC}) = 1/3$; $\tan(\text{HEF}) = 1/2$, les contacts du rectangle et du patron se font en A, D, G, H.

On a : $1 + t^2 = \dfrac{1}{\cos^2(\alpha)}$ d'où :

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{1+t^2} \qquad \sin^2(\alpha) = \frac{t^2}{1+t^2} \qquad \sin(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{t}{1+t^2} \qquad \textbf{(1)}$$

Le calcul de la longueur du rectangle se fait en projetant par exemple le trajet [AEG] joignant 2 bords opposés. Cela donne :

$$\text{longueur} = 4\cos(\alpha) + 2\sin(\alpha).$$

Le calcul de la largeur du rectangle se fait en projetant par exemple le trajet [DGFH] joignant 2 bords opposés. Cela donne :

$$\text{largeur} = 2\cos(\alpha) + 2\sin(\alpha).$$

D'où l'aire égale à

$$8\cos^2(\alpha) + 4\sin^2(\alpha) + 12\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{8}{1+t^2} + \frac{4t^2}{1+t^2} + \frac{12t}{1+t^2}$$

Dans ce cas, on a bien : $f(t) = \dfrac{4\ \ (t^2+3t+2)}{1+t^2}$.

Les 3 autres cas se traitent de la même manière.

Le minimum de l'aire a lieu pour $t = 1/3$ et vaut $f(1/3) = 11{,}2$.

Pour les autres patrons classiques, tous les résultats donnés en B) se traitent de la même manière.

Sitographie :

Le site *diophante.fr* dans lequel figurent plus d'un millier de problèmes avec la plupart du temps les solutions des lecteurs. Chaque mois il y a environ 5 nouveaux problèmes, parfois un casse-tête…

Bibliographie :

Je n'ai pas les références précises sur :
« Jouer Jeux Mathématiques n°8 » par Lucien Pianaro.

Recherche de minima et de maxima en géométrie

Alain MASCRET, Collège La Champagne à Gevrey-Chambertin

Mots clé :
Maximum ; minimum ; géométrie dynamique ; visualisation géométrique de résultats numériques ; rectangle inscrit dans un cercle ; aire maximale ; rectangles ; périmètre maximum ; maximum d'un produit ; minimum d'une somme ; parallélogramme inscrit dans un rectangle.

Résumé :
Utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique pour rechercher, au niveau du collège, des problèmes de minima et de maxima en géométrie : rectangle d'aire maximum ou de périmètre maximum inscrit dans un cercle ou de diagonale fixe ; rectangle d'aire maximum et de périmètre fixe ; maximum du produit de deux nombres de somme constante ; minimum de la somme de deux nombres de produit constant ; minimum du périmètre d'un parallélogramme inscrit dans un rectangle.

Afin de pouvoir animer les figures, elles seront déposées sur le site du groupe de géométrie dynamique de l'IREM de Dijon, (http://geowiki.u-bourgogne.fr.)

Les logiciels de géométrie dynamique permettent d'aborder les problèmes par des manipulations. Il est aisé de voir ce qui varie et dans quel sens se produit cette variation. La recherche de maxima ou de minima apparaît naturelle et les conjectures sont faciles à tester. Il reste bien sûr à les démontrer.

1. Présentation :

La plupart de mes élèves disposent d'internet. Dès le début de l'année je leur conseille de se servir de logiciels de géométrie dynamique, en particulier de *Geonext*, qui me paraît très facile d'accès ou de *Geogebra*. Ils trouvent les liens vers les sites officiels de ces logiciels sur geowiki.u-bourgogne.fr. Le passage d'un logiciel à l'autre ne pose pas de problème aux élèves, car les logiciels actuels se ressemblent beaucoup.

Pour traiter les problèmes de minima ou maxima, j'utilise plutôt *Geogebra* qui dispose d'une fenêtre « algèbre » permettant d'afficher les longueurs et les aires. Je renvoie le lecteur intéressé par ce logiciel au mode d'emploi pour les élèves de collège écrit par Nicolas Vissac et publié dans la *Feuille de Vigne 117*.

Dans ma salle de classe, je dispose d'un ordinateur sur le bureau et d'un vidéoprojecteur. Les élèves sont habitués à « passer au tableau » en venant au clavier de l'ordinateur. Les figures sont construites devant eux, soit par un élève, soit par moi.

2. Aire maximale d'un rectangle dont la diagonale a une longueur fixe :

Nous sommes en classe de quatrième. Les élèves viennent de voir la propriété caractéristique du triangle rectangle relative à son cercle circonscrit. La question posée est : « Quelle est la plus grande aire possible d'un rectangle dont la diagonale a une longueur fixée ? »

L'élève au bureau trace un rectangle, comme d'habitude, à partir de la longueur et de la largeur, en utilisant le bouton « droites perpendiculaires ». Malheureusement cette figure ne peut pas nous aider parce que « tout bouge en même temps » y compris la diagonale qui devait rester fixe.

La deuxième figure partira donc de la diagonale [AC], à laquelle on s'interdit de toucher. Pour placer le point B, l'élève choisit de tracer une droite (AB_1) passant par A et la perpendiculaire abaissée de C sur cette droite. Le point D est obtenu comme symétrique de B par rapport au milieu O de [AC].

En fait *Geogebra* donne automatiquement des noms aux points créés en suivant l'ordre alphabétique. L'élève doit donc renommer les points pour que sa figure corresponde au problème. C'est ce qui explique la présence de ce point B_1 que *Geogebra* avait d'abord appelé B et qui est devenu B_1 quand l'élève a imposé son point B. Je ne reviendrai plus sur cet aspect du fonctionnement de *Geogebra*.

Voici, *figure 1*, une copie de l'écran, montrant la figure et la fenêtre « algèbre » contenant les coordonnées des points, les longueurs des segments, les équations des droites et l'aire du rectangle appelé poly1. Je cache cette fenêtre quand je ne m'en sers pas. Mais si un élève veut savoir le sens de ce qui est affiché, il va de soi que je n'élude pas la question.

À l'aide de la souris, ou du crayon si l'on dispose d'un tableau blanc interactif, les points « libres » peuvent être déplacés. Les autres points sont dépendants. Ils sont construits à partir des points libres et suivent le mouvement. Les valeurs numériques sont, bien sûr, actualisées dans la fenêtre « algèbre ».

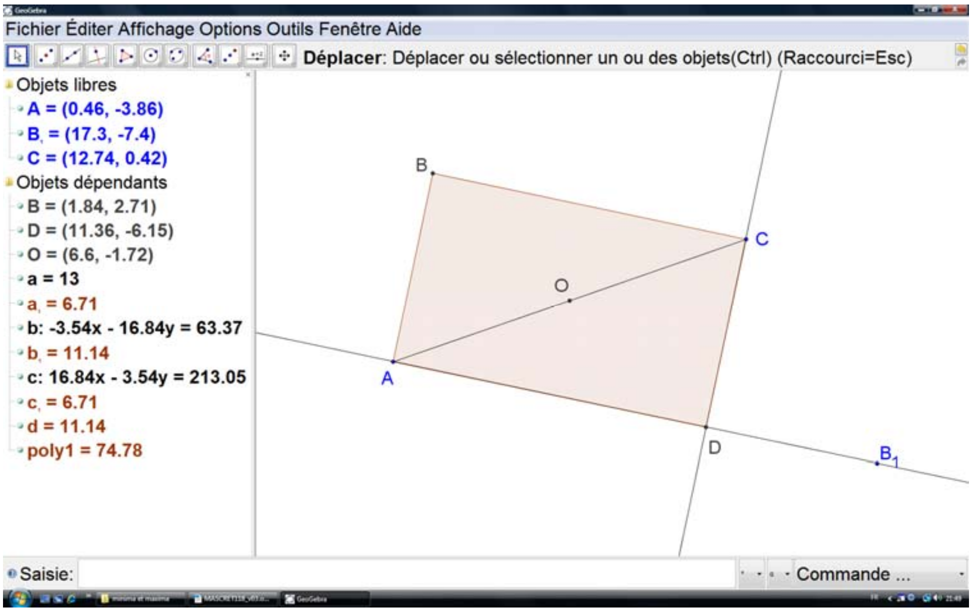


Figure 1

Nous nous sommes interdit de toucher aux points A et C. Nous pouvons modifier la figure à l'aide du point B_1. Nous constatons que l'aire est maximale quand le rectangle est un carré. Au passage nous retrouvons que le cercle de diamètre [AC] est circonscrit au rectangle ABCD. Nous traçons ce cercle. Il s'agit maintenant de prouver notre conjecture :

Parmi tous les rectangles ayant la même diagonale, celui qui a l'aire la plus grande est le carré.

Les élèves savent, depuis l'école, calculer l'aire d'un rectangle en multipliant sa longueur par sa largeur. Malheureusement quand la longueur augmente, la largeur diminue et vice-versa. Comme tout à l'heure : « tout bouge en même temps ! » Il faudrait s'appuyer sur une longueur fixe... Nous en connaissons une : la diagonale.

Notre rectangle est partagé en deux triangles rectangles de même aire par la diagonale [AC]. Il est donc possible de calculer l'aire du rectangle à partir de celle des triangles rectangles, en utilisant la diagonale qui est leur hypoténuse.

L'aire du rectangle ABCD est le double de celle du triangle ACB c'est-à-dire : BH × AC.

AC est fixe. BH est inférieur ou égal au rayon du cercle qu'il atteint lorsque H est en O.

Traçons la perpendiculaire à [AC] passant par O, qui coupe le cercle en F et E.

Si H est en O, B est en F ou en E, sur la médiatrice de [AC], ce qui prouve que ABCD est un carré.

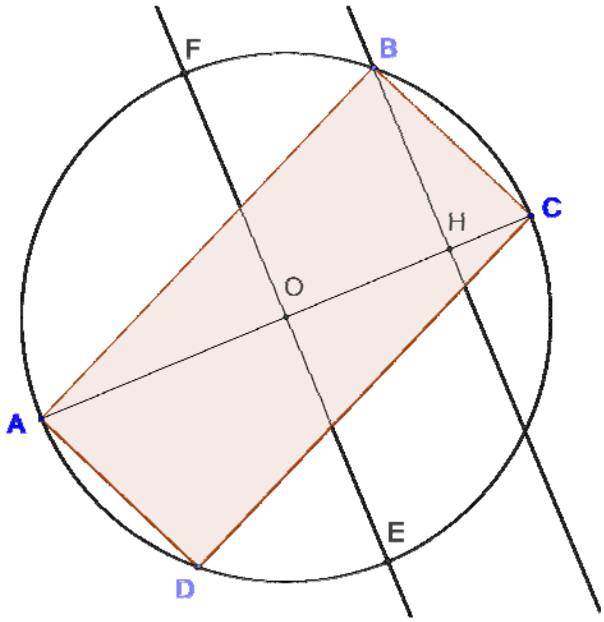


Figure 2

Remarques :

a) Nous pouvons reformuler ce résultat d'une façon différente :

Parmi tous les rectangles inscrits dans un cercle donné, celui qui a l'aire la plus grande est le carré.

b) Et si les élèves connaissent le théorème de Pythagore :

Le produit de deux nombres dont la somme des carrés est constante, est maximum si et seulement si ces deux nombres sont égaux.

3. Et le périmètre ? Quand est-il maximum ?

La question est naturelle et les élèves la posent. Pour essayer de la traiter, il est possible de faire afficher la valeur du périmètre et de s'apercevoir qu'elle semble, elle aussi, maximale lorsque ABCD est un carré. Mais ceci n'est pas très visuel et ne nous aidera pas à prouver cette conjecture.

Faisons apparaître visuellement le périmètre ou le demi-périmètre du rectangle sur la figure, si possible sous la forme d'un segment dont la longueur va varier. Ensuite nous tâcherons de comparer cette longueur à la longueur d'un segment fixe de la figure.

Commençons par mettre « bout à bout » la longueur et la largeur du rectangle. Pour cela, traçons le cercle de centre B, passant par C, qui coupe la droite (AB) en deux points, dont un en dehors du segment [AB]. C'est celui-ci qui nous intéresse, appelons-le G.

En déplaçant le point B, nous constatons que la longueur de [AG] est maximale lorsque B est en F. Dans ce cas, elle semble être le double de celle de [AF].

Construisons donc le point K, symétrique de A par rapport à F, ce qui va nous permettre de visualiser l'écart entre AG et son maximum probable AK. Pour cela, traçons le cercle centre F qui passe par A et qui recoupe la droite (AC) en K. *(Figure 3).*

Quelle surprise ! Le point G se déplace sur ce dernier cercle. Les élèves font bouger le point B pour y croire ! Pas de doute !

Mais si G se déplace sur le cercle de centre F passant par A, la corde [AG] est toujours plus courte que le diamètre [AK]. Le maximum de [AG] est atteint lorsque G est en K, c'est-à-dire si ABCD est un carré. C'est terminé !

Je dois tempérer un peu l'enthousiasme car il faut tout de même prouver que G est sur le cercle de centre F et de diamètre [AK] ! C'est visible et tout le monde y croit, mais il faut le démontrer…

B est sur la médiatrice de [CG], qui est aussi bissectrice de $\widehat{CBG}$. Comme $\widehat{CBG}$ est droit, sa bissectrice fait un angle de 45° avec la droite (AB).

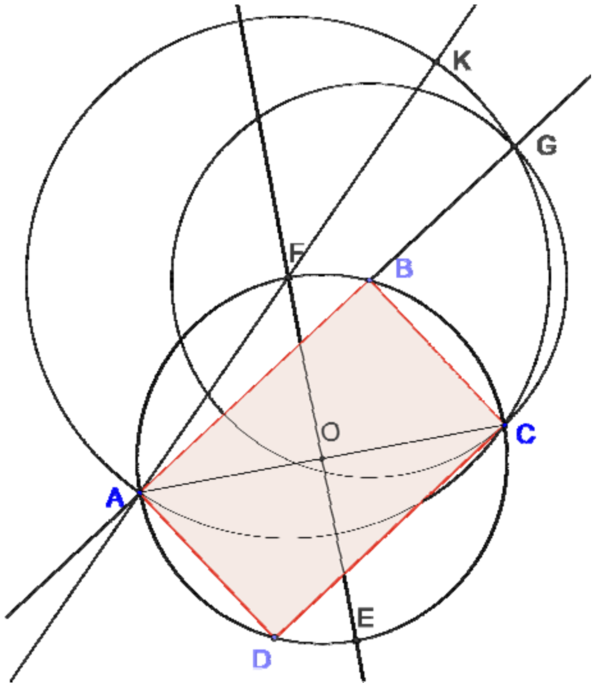


Figure 3

Mais l'angle $\widehat{FBA}$ est inscrit dans le cercle de centre O et l'angle au centre $\widehat{FOA}$ est droit. On obtient donc : $\widehat{FBA} = \dfrac{\widehat{FOA}}{2} = 45°$ et la droite (FB) est la bissectrice de $\widehat{CBG}$ donc la médiatrice de [CG], ce qui prouve que G est sur le cercle de centre F passant par A et C.

Nous obtenons donc le résultat suivant que l'on peut formuler de différentes façons :

Parmi tous les rectangles inscrits dans un cercle donné, celui qui a le plus grand périmètre est le carré.

Parmi tous les rectangles ayant la même diagonale, celui qui a le plus grand périmètre est le carré.

La somme de deux nombres dont la somme des carrés est constante, est maximale si et seulement si ces deux nombres sont égaux.

Remarque :

Le recours aux angles inscrits réserve la démonstration à la classe de troisième, mais les élèves de quatrième admettent facilement ce résultat, pratiquement vu en démontrant les théorèmes sur le triangle rectangle et son cercle circonscrit.

4. Rectangle d'aire maximale et de périmètre fixe :

Ces recherches rappellent souvent aux élèves un résultat analogue, vu en sixième ou même à l'école :

Parmi tous les rectangles qui ont le même périmètre, celui dont l'aire est la plus grande est le carré.

Essayons de démontrer ce théorème…

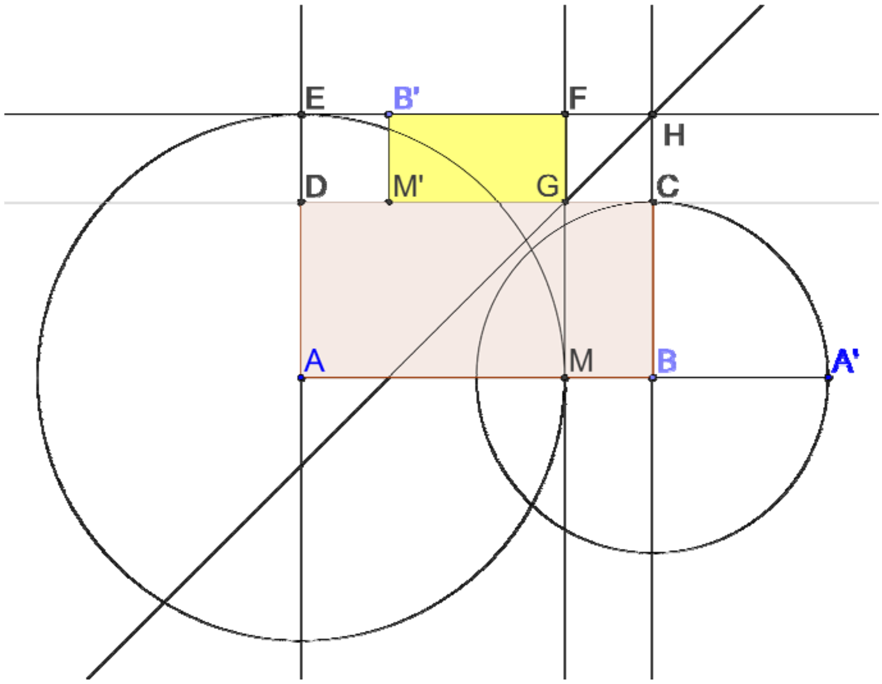


Figure 4

Le demi-périmètre est constant. Nous le représentons par un segment [AA'] qui restera fixe. Sur [AA'], plaçons un point B mobile permettant de construire les différents rectangles ABCD dont le périmètre est le double de la longueur de [AA']. Le point C est l'intersection du cercle de centre B passant par A' et de la perpendiculaire à (AA') passant par B. D est le quatrième sommet du rectangle.

En déplaçant B, nous constatons que l'aire de ABCD est maximale lorsque ABCD est un carré, c'est-à-dire lorsque B est confondu avec le milieu M de [AA']. Pour le prouver, nous allons tracer un carré de côté [AM] et montrer que l'aire de ABCD est toujours inférieure ou égale à l'aire de ce carré. Les longueurs AB et BC jouant le même rôle, il suffit de faire parcourir à B le segment [A'M].

Traçons le carré AMFE de façon que D soit sur [EA]. Les droites (EF) et (BC) se coupent en H. Le rectangle FGCH est un carré. En effet :

$$FG = MF - MG = MA - BC = MA' - BA' = MB = GC.$$

Considérons la symétrie d'axe (GH), diagonale du carré FGCH.
L'image de C est F puisque (GH) est diagonale du carré GCHF.
L'image de (CH) est (FH). L'image de B est le point B' de (FH) tel que B'F = BC avec F sur [B'H].
L'image de (GF) est (GC). L'image de M est le point M' de (GC) tel que M'G=MG avec G sur [M'C].

L'aire du rectangle ABCD est donc égale à l'aire du rectangle AMGD augmentée de celle du rectangle FB'M'G, puisque MBCG et FB'M'G sont symétriques.

Mais les deux rectangles AMGD et FB'M'G sont intérieurs au carré AMFE, l'aire de ABCD est donc inférieure ou égale à celle de AMFE. L'égalité est obtenue si B' est en E. Mais alors B est en M, ce qui prouve le résultat annoncé.

Remarques :

a) En choisissant a = AM et b = MB, la figure utilisée permet de visualiser l'identité : $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

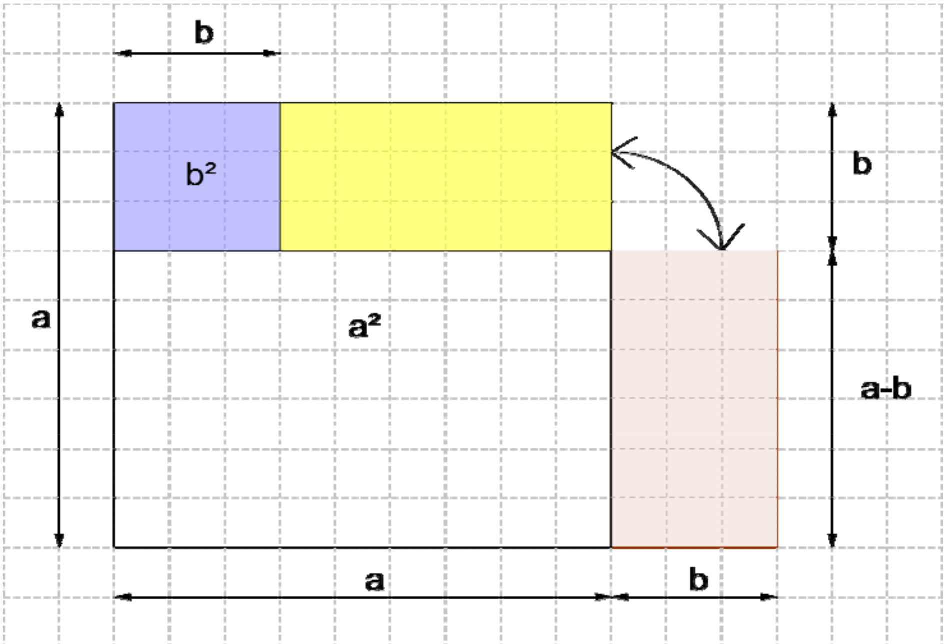


Figure 5

b) Le résultat géométrique obtenu peut s'énoncer également :

Le produit de deux nombres dont la somme est constante,est maximum lorsque ces deux nombres sont égaux.

c) La démonstration n'utilise que des notions vues en sixième : aire, périmètre et les propriétés de la symétrie axiale.

5. Maximum du produit de deux nombres dont la somme est constante (autre démonstration)

Voici une autre démonstration géométrique de ce résultat, dans laquelle le produit n'apparaît pas comme une aire. Elle utilise une relation métrique dans le triangle rectangle que l'on peut faire démontrer préalablement aux élèves :

Dans un triangle rectangle, la hauteur est moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

En général, pour démontrer cette propriété, les élèves tentent d'utiliser le théorème de Pythagore, mais ceux qui viennent à bout des calculs sont rares. C'est l'occasion de leur montrer combien la trigonométrie simplifie les choses :

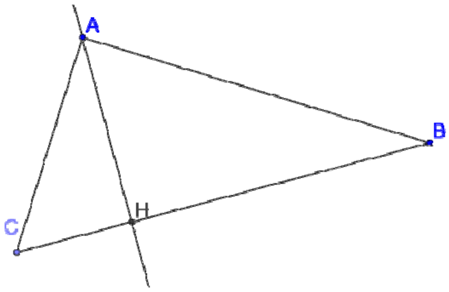


Figure 6

Les angles $\widehat{CAH}$ et $\widehat{ABH}$ sont chacun complémentaires de $\widehat{ACH}$, donc égaux.

$$\frac{HC}{HA} = \tan\widehat{CAH} = \tan\widehat{ABH} = \frac{HA}{HB} \qquad \text{d'où} \qquad HA^2 = HB.HC.$$

Venons-en à la démonstration proprement dite :

Le produit de deux nombres dont la somme est constante, est maximum lorsque ces deux nombres sont égaux.

Un point H se déplace sur un segment [BC] dont la longueur est la somme des deux nombres x = BH et y = CH.

Traçons un demi-cercle de diamètre [BC] et de centre M. La perpendiculaire à [BC] passant par H coupe ce demi-cercle en A. La perpendiculaire à [BC] passant par M le coupe en R.

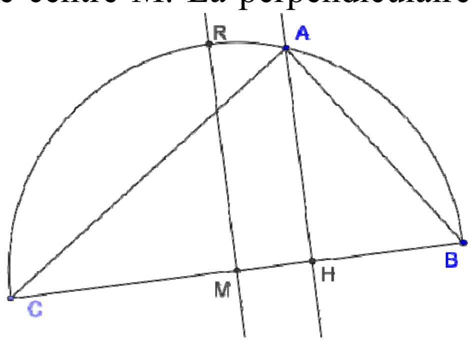


Figure 7

Comme AH² = HB.HC, chercher le maximum du produit HB.HC revient à chercher celui de AH² ou encore celui de AH, le maximum ou le minimum d'une longueur ayant lieu en même temps que le maximum ou le minimum de son carré.

Dans un cercle la longueur d'une corde est toujours inférieure ou égale à celle du diamètre. La demi-corde AH est donc inférieure ou égale au rayon MR, l'égalité n'ayant lieu que si H est en M, c'est-à-dire si BH = CH.

Comme AH² = HB.HC, le produit HB.HC est aussi maximum si BH = CH.

5. Minimum de la somme de deux nombres dont le produit est constant

Il semble naturel de se poser le problème « dans l'autre sens ». Cette fois, nous recherchons le minimum de la somme de deux nombres dont le produit est constant.

Traçons un cercle de centre O et de diamètre [BC]. Son rayon, fixe, est choisi égal à la racine carrée du produit des deux nombres. Par O, menons la perpendiculaire à [BC] qui coupe le cercle en M et M'.

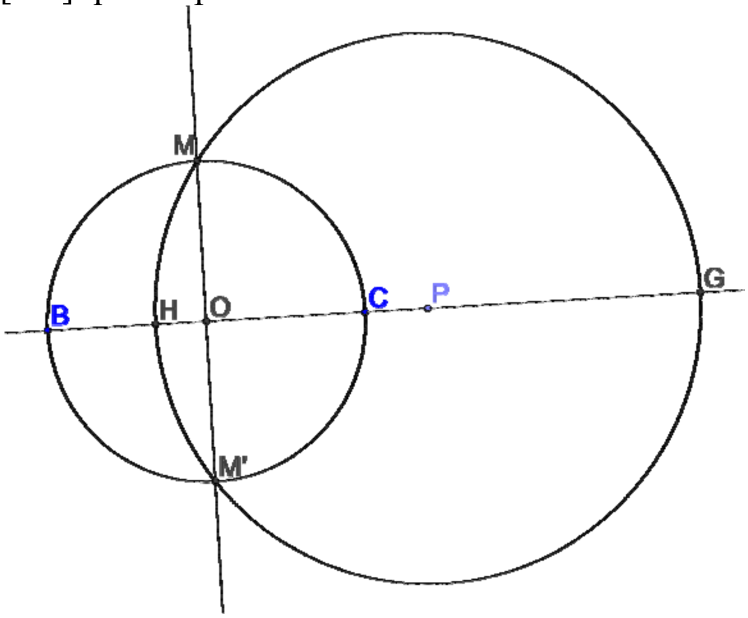


Figure 8

À partir d'un point quelconque P de la droite (BC), pris comme centre, traçons le cercle passant par M et M'.

On obtient :

$$OH.OG = OM^2 = OB.OC$$

$$OH + OG = HG = 2\ PM \geq 2\ OM = BC = BO + OC$$

PM est supérieur ou égal à OM car c'est l'hypoténuse de MOP. L'égalité n'a lieu que si P est en O c'est-à-dire si : OH = OG = OM = OC = OB.

La somme de deux nombres dont le produit est constant, est minimale lorsque ces deux nombres sont égaux.

6. Minimum du périmètre d'un parallélogramme inscrit dans un rectangle

Dans son article « *Une situation pour introduire les fonctions* » paru dans le *PLOT* numéro 31 (troisième trimestre 2010), Véronique Cerclé propose de faire étudier aux élèves la situation suivante :

ABCD est un rectangle, E un point de [BC], F un point de [CD], G un point de

[DA] et H un point de [AB] tels que BE = CF = DG = AH = x. Il s'agit de faire exprimer l'aire de EFGH en fonction de x puis de chercher pour quelle valeur de x cette aire est minimale.

Pour plus de détails, je vous renvoie à cet article où sont analysées les difficultés rencontrées par des élèves de seconde.

La solution proposée est algébrique. Si a est la longueur et b la largeur du rectangle, l'aire du parallélogramme EFGH est obtenue par différence entre l'aire du rectangle et la somme des aires des triangles rectangles AGH, BHE, CEF et DFG. (Mes élèves de troisième, comme ceux de Véronique Cerclé, ont travaillé sur un exemple numérique.)

$$\text{Aire de EFGH} = ab - x(a-x) - x(b-x) = ab - (a+b)x + 2x^2.$$

Pour visualiser le minimum d'une fonction, *Geogebra* est très pratique puisqu'il suffit d'écrire dans la ligne de saisie ou dans l'une des cellules du tableur l'expression en *x* de la fonction pour obtenir le tracé de sa courbe représentative.

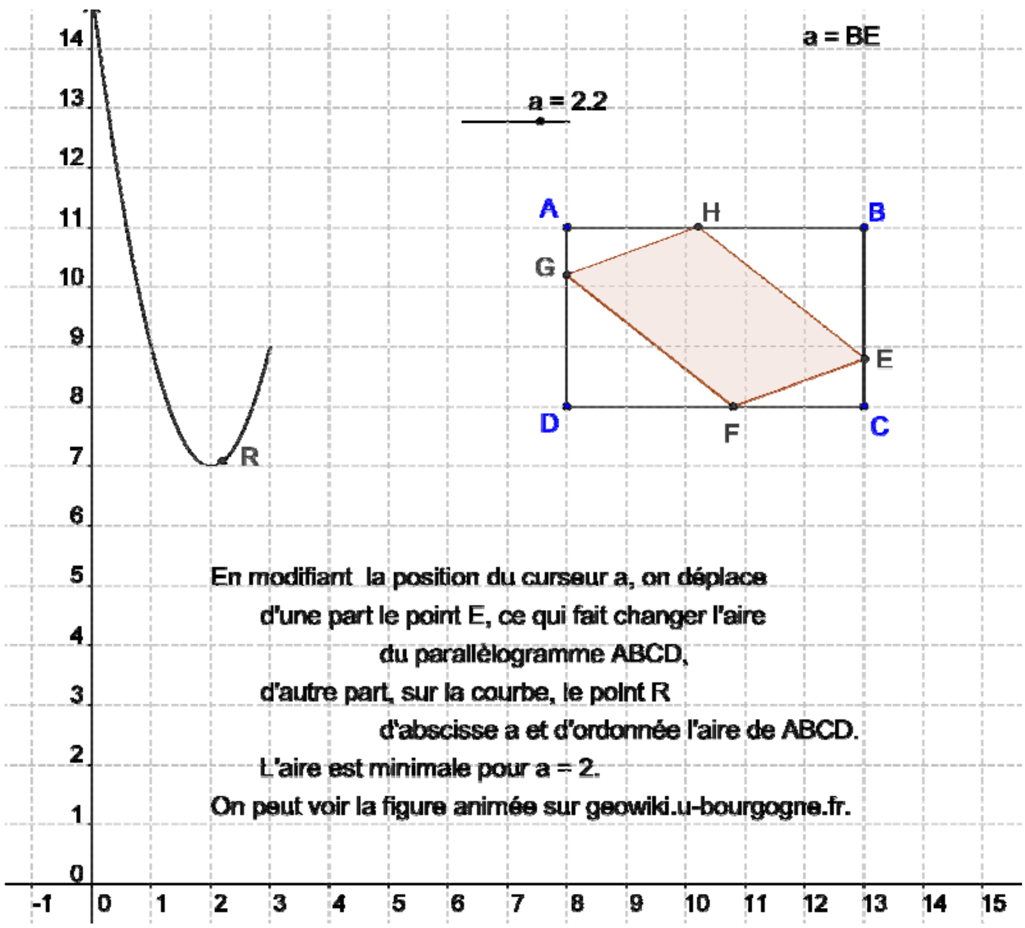


Figure 9

Comme d'habitude, le problème du minimum du périmètre s'est posé, mais les calculs sont beaucoup plus compliqués que pour le minimum de l'aire ; c'est pourquoi nous avons essayé de résoudre le problème géométriquement.

En déplaçant le point E et en regardant la valeur affichée du périmètre par *Geogebra*, il semble que le minimum du périmètre soit atteint lorsque les côtés du parallélogramme sont parallèles aux diagonales du rectangle.

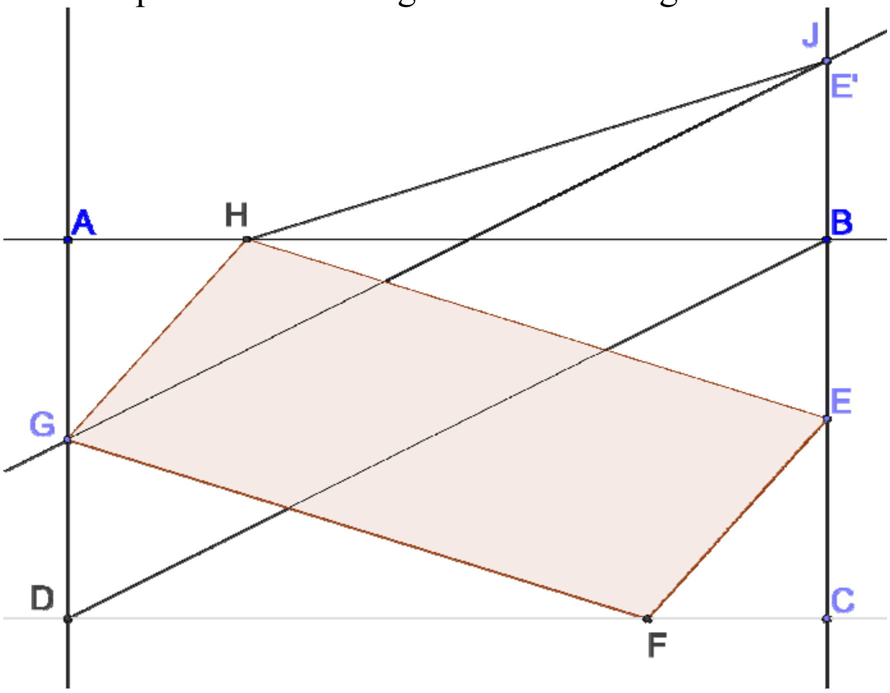


Figure 10

Traçons la diagonale (DB), ainsi que la parallèle à (DB), passant par G, qui coupe (BC) en J. Le quadrilatère GJBD dont les côtés sont parallèles deux à deux, est un parallélogramme.

Ses côtés opposés ont même longueur :

$$JB = GD = x.$$

Pour comparer la longueur du demi-périmètre de EFGH à la diagonale DB = GJ, prenons le symétrique E' de E par rapport à (AB). La droite (AB) est la médiatrice de [EE'], donc B est le milieu de [EE'] et l'on a : E'B = BE = x. Les points J et E' – tous deux situés sur (BC) – sont donc confondus et HE = HE'.

Le demi-périmètre du parallélogramme EFGH est donc égal à GH + HJ qui est supérieur ou égal à GJ, d'après l'inégalité triangulaire dans le triangle GHJ. L'égalité a lieu si H est sur (GJ), c'est-à-dire lorsque le côté (GH) est parallèle à la diagonale (DB).

Remarque :

Si (HG) est parallèle à (DB), on a aussi (EH) parallèle à (AC).

En effet, si (HG) est parallèle à (DB), les angles $\widehat{HJB}$ et $\widehat{DBC}$ sont correspondants donc égaux. Leurs complémentaires $\widehat{JHB}$ et $\widehat{BDC}$ le sont aussi. Mais $\widehat{JHB} = \widehat{BHE}$ car J = E' est le symétrique de E par rapport à (AB) et $\widehat{BDC} = \widehat{CAB}$ dans le rectangle ABCD.

Finalement les angles correspondants $\widehat{BHE}$ et $\widehat{CAB}$ sont égaux ce qui prouve le parallélisme de (EH) et (AC).

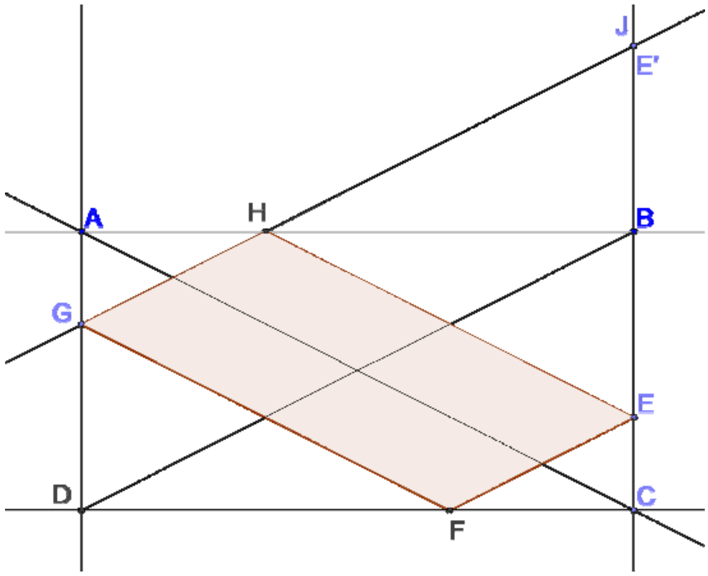


Figure 11

7. Qu'apporte un logiciel de géométrie dynamique ?

Les principaux avantages d'un logiciel de géométrie dynamique sont la qualité et la rapidité de réalisation d'une figure. Le risque de dessiner des cas particuliers qui induisent en erreur n'existe plus, puisqu'il est possible de modifier la figure à tout moment.

D'autre part, une **figure** n'est pas un simple **dessin** ; ses éléments doivent être définis explicitement à partir des données du problème. Si ce n'est pas le cas, la déformation de la figure l'empêchera de correspondre au problème. Pour obtenir des figures « solides », l'élève doit faire preuve de rigueur dans ses constructions.

En ce qui concerne les problèmes de minima ou de maxima, la possibilité de faire bouger les points en faisant afficher la valeur de la grandeur qui nous intéresse, permet d'approcher par tâtonnement la solution, et parfois de mettre sur la voie de sa démonstration. Il est peu probable, par exemple, que la solution du problème posé au paragraphe 6 ait même été aperçue sans un logiciel de géométrie dynamique.

Une fois remarquée une particularité « stable » de la figure, le besoin de tenter de la démontrer est très motivant, au moins pour certains élèves. L'idéal est de conduire la recherche en petits groupes, de façon à ce que l'enthousiasme de certains puisse plus facilement se transmettre aux autres.

Le problème des rencontres

Le jeu de treize

Tristan DERAY, Lycée Hilaire de Chardonnet à Chalon s/Saône

« L'esprit du Jeu n'est pas estimé pour ce qu'il vaut »
Fontenelle. *Éloge de M. de Montmort*

Mots clé : Jeu de rencontres, jeu de treize, probabilité, problème des chapeaux, De Montmort, Euler, nombre e, dénombrement, dérangement, permutation sans point fixe, crible de Poincaré, inversion de Pascal, jeu de hasard.

Résumé : Le jeu de rencontre (connu également sous le nom de jeu de treize ou, dans sa version moderne du nom de problème des chapeaux) formulé par De Montmort fut étudié par de nombreux mathématiciens : Euler, dont l'approche est présentée dans cet article, en fit partie.
La multiplicité des approches confère au problème un intérêt particulier, certaines sont présentées ici : en langage de permutations, de séries (problème de capes), de matrices ou d'ensembles.

1. Euler et le problème de de Montmort

L'Étude des Jeux était à l'aube du XVIII^{e} « *un vaste pays inculte, où à peine voyait-on cinq ou six pas d'hommes* » écrit Fontenelle dans son Éloge de M. de Montmort. « *Il s'y engagea*, poursuit le secrétaire de l'Académie Royale des Sciences, *avec un courage de Christophe Colomb, et en eut aussi le succès. Ce fut en 1703 qu'il donna son Essai d'Analyse des Jeux de Hasard, où il fit découvrir un nouveau Monde aux géomètres. Au lieu des courbes qui leur sont familières, des sections, des cycloïdes, des spirales, des logarithmiques, c'étaient le Pharaon, la Bassette, le Lansquenet, l'Ombre, le Trictrac, qui paraissaient sur la Scène assujettis au Calcul, et domptés par l'Algèbre »*

Parmi ces Jeux de hasard, le Jeu du Treize (ou problème des rencontres) et sa (ses) solution(s) connut une certaine fortune parmi les mathématiciens. De Moivre, Euler, Laplace après De Montmort s'y intéressèrent également.

« Les Joueurs tirent d'abord à qui aura la main. Supposons que ce soit Pierre, et que le nombre des Joueurs soit tel qu'on voudra. Pierre ayant un jeu entier composé de cinquante-deux cartes mêlées à discrétion, les tire l'une après l'autre, nommant et prononçant un lorsqu'il tire la première carte, deux lorsqu'il tire la seconde, trois lorsqu'il tire la troisième, et ainsi de suite jusqu'à la treizième qui est un Roy. Alors si dans toute cette suite de cartes il n'en a tiré aucune selon le rang qu'il les a nommées, il paye ce que chacun des Joueurs a mis au jeu, et cède la main à celui qui le suit à la droite.
Mais s'il lui arrive dans la suite des treize cartes, de tirer la carte qu'il nomme, par exemple, de tirer un as dans le temps qu'il nomme un, ou un deux dans le temps qu'il nomme deux, ou un trois dans le temps qu'il nomme trois, et s'il prend tout ce qui est au jeu et recommence comme auparavant, nommant un, ensuite deux, etc.
Il peut arriver que Pierre ayant gagné plusieurs fois, et recommençant par un, n'ait pas assez de cartes dans la main pour aller jusqu'à treize, alors il doit, lorsque le jeu lui manque, mêler les cartes, donner à couper, et ensuite tirer du jeu entier le nombre de cartes qui lui est nécessaire pour continuer le jeu, en commençant par celle où il est demeuré dans la précédente main. Par exemple, si en tirant la dernière carte il a nommé sept, il doit en tirant la première carte dans le jeu entier, après qu'on a coupé, nommer huit, et ensuite neuf, etc. jusqu'à treize, à moins qu'il ne gagne plus tôt, auquel cas ils recommenceront, nommant d'abord un, ensuite deux, et le reste comme on vient de l'expliquer. D'où il paraît que Pierre peut faire plusieurs mains de suite, et même qu'il peut continuer le jeu à l'infini. »

La solution donnée par De Montmort est exacte mais n'est pas démontrée. L'auteur envisage les différents cas suivant le nombre de cartes dans le jeu. Si « *l'argent du jeu est exprimé par A* »,

Dans le cas de deux cartes, le « *sort du Joueur sera* $S = \frac{1}{2}A$ »

Dans le cas de trois cartes, le « *sort du Joueur sera* $S = \frac{2}{3}A$ »

Dans le cas de quatre cartes, le « *sort du Joueur sera* $S = \frac{15}{24}A$ »

Dans le cas de cinq cartes, le « *sort du Joueur sera* $S = \frac{76}{120}A$ »

De Montmort fait un simple dénombrement des cas de rencontres, il donne alors sans plus d'explications une formule pour le cas général ainsi qu'une table :

GENERALEMENT

Si l'on nomme S le sort que l'on cherche, le nombre des cartes que Pierre tient étant exprimé par p *;* g *le sort de Pierre, le nombre de cartes étant* $p-1$*, on aura*

$$S = \frac{g \times \overline{p-1} + d}{p}$$

Cette formule donnera tous les cas, ainsi qu'on les voit résolus dans la table ci-jointe.

TABLE.

Si $p=1$, on aura $S=A$.
Si $p=2$, on aura $S=\frac{1}{2}A$.
Si $p=3$, on aura $S=\frac{2}{3}A=\frac{1}{2}A+\frac{1}{6}A$.
Si $p=4$, on aura $S=\frac{5}{8}A=\frac{1}{2}A+\frac{1}{8}A$.
Si $p=5$, on aura $S=\frac{19}{30}A=\frac{1}{2}A+\frac{2}{15}A$.
Si $p=6$, on aura $S=\frac{91}{144}A=\frac{1}{2}A+\frac{19}{144}A$.
Si $p=7$, on aura $S=\frac{531}{840}A=\frac{1}{2}A+\frac{111}{840}A$.
Si $p=8$, on aura $S=\frac{3641}{5760}A=\frac{1}{2}A+\frac{761}{5760}A$.
Si $p=9$, on aura $S=\frac{28673}{45360}A=\frac{1}{2}A+\frac{5993}{45360}A$.
Si $p=10$, on aura $S=\frac{28319}{44800}A=\frac{1}{2}A+\frac{5919}{44800}A$.
Si $p=11$, on aura $S=\frac{2523223}{3991680}A=\frac{1}{2}A+\frac{527383}{3991680}A$.
Si $p=12$, on aura $S=\frac{302786759}{479001600}A=\frac{1}{2}A+\frac{63285959}{479001600}A$.
Si $p=13$, on aura $S=\frac{109339663}{172972800}A=\frac{1}{2}A+\frac{22853263}{172972800}A$.

Il sera facile à partir de cette table de déterminer la probabilité P d'une rencontre
Si $p=1$ alors $P=1\cdot A$

Si $p=2$ alors $P=1\cdot A-\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}A$

Si $p=3$ alors $P=A-(A-\frac{1}{2}A)-(\frac{1}{2}A-\frac{2}{3}A)=A(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3})$

Si $p=4$ alors

$$P=A+(\frac{1}{2}A-A)+(\frac{2}{3}A-\frac{1}{2}A)+(\frac{5}{8}A-\frac{2}{3}A)=A(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4})$$

&c.

« *Il reste pour expression du sort de Pierre cette suite très simple*

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$ ».

Euler reprit le problème étudié par de Montmort et y apporta sa propre solution, en notant que
« l'on peut supposer que ces deux personnes dont l'une soit nommée A, & l'autre B, aient chacune un certain & même nombre de billets marqués des nombres 1, 2, 3, 4, 5 &c. & que chacune en tire un billet après l'autre, jusqu'à ce qu'elles rencontrent le

même numéro à la fois : & que ce soit la personne A qui gagne alors. Or s'il arrive, que ces deux personnes tirent tous leurs billets sans rencontrer jamais le même nombre, la personne B gagne.
Comme il est indifférent, de quel numéro chaque billet soit marqué, il est permis de supposer que A tire ses billets selon l'ordre 1, 2, 3, 4, 5, &c. Ou pour faire l'application aux cartes on concevra les cartes de l'un & l'autre jeu tellement numérotées selon l'ordre comme elles sont tirées successivement par A : de sorte que Nr1 sera la carte que A tire la première, Nr 2. celle qu'il tire la seconde ; Nr 3. la troisième, & ainsi de suite. »

Euler envisage comme De Montmort, les cas où le nombre *m* de cartes est peu élevé.
Si $m=1$, A gagne à coup sûr.

Si $m=2$, la probabilité pour A de gagner est égale à $\frac{1}{2}$.

Dans le cas $m=3$, Euler donne tous les tirages possibles :

A	B 1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	2	3	3
2	2	3	1	3	2	1
3	3	2	3	1	1	2

« De ces 6 cas il y en aura donc deux, le premier & le second, qui feront gagner A, & où le jeu finit par conséquent au premier coup ; des quatre autres cas il n'y en a qu'un, savoir le cinquième, qui fera gagner A au second coup, & qui y finit le jeu. Parmi les trois cas il y a encore le troisième, qui fait gagner A au troisième coup. »

La probabilité pour le joueur A de gagner est donc de $\frac{2}{3}$.

Dans le cas $m=3$, Euler donne à nouveau dans un tableau tous les tirages possibles :

A	B 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
2	2	2	3	3	4	4	3	3	4	4	1	1
3	3	4	4	2	2	3	4	1	1	3	4	3
4	4	3	2	4	3	2	1	4	3	1	3	4

A	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4
2	4	4	1	1	2	2	1	1	2	2	3	3
3	1	2	2	4	1	4	2	3	3	1	1	2
4	2	3	4	2	4	1	3	2	1	3	2	1

La probabilité pour le joueur A de gagner dans ce cas est de $\frac{15}{24}$ ou $\frac{5}{8}$.

Le cas $m = 5$ exclut, du fait de ses 120 permutations, la présentation des résultats sous forme de tableau ; le caractère heuristique de la recherche doit laisser place à une approche méthodique :

« *il faut faire des remarques générales, qui nous puissent conduire à la connaissance des plus grands nombres de cartes, sachant déjà les probabilités pour les plus petits nombres* ».

Euler entend trouver une relation liant la probabilité pour A de gagner lorsque le nombre de cartes est *m* en fonction des probabilités de gagner lorsque le nombre de cartes est plus petit.

Tout d'abord, Euler note que le nombre de tirages possibles pour *m* cartes est « *autant de fois que le produit* $1.2.3......m$ *contient d'unités*. »

Appelant M ce nombre, il « *remarque en second lieu, qu'il y aura* $\frac{M}{m}$ *cas où la première carte tirée par B est 1 ; qu'il y aura* $\frac{M}{m}$ *cas où la première carte tirée par B est 2, & qu'il y aura autant de cas où la première carte de B est ou 3, ou 4, ou 5 &c. ou enfin* m.

De plus, si nous faisons abstraction, que le jeu finit aussitôt que B aura rencontré la carte de A, & que nous supposions qu'ils continuent à tirer leurs cartes jusqu'à la fin, quoiqu'il y fut arrivé une ou plusieurs rencontres, il est aussi clair, qu'il y aura $\frac{M}{m}$ *cas, où la seconde carte de B sera 2 ; & autant de cas , où la troisième carte sera 3, ou la quatrième 4, ou la cinquième 5, ou la sixième 6, & ainsi de suite* ».

Toutefois, des $\frac{M}{m}$ cas qui font gagner A au second coup, il faut ôter ceux qui le font gagner dès le premier (car dans ce cas, le jeu s'arrête) et du même nombre de cas $\frac{M}{m}$ qui font gagner A au troisième tirage, il faut ôter ceux qui le font gagner au premier et au second.

Euler recherche alors un procédé :

« *Pour juger donc de combien il faut diminuer le nombre des cas favorables* $\frac{M}{m}$ *à chaque coup, ou pour en connaître le nombre de ceux qui ont déjà eu une rencontre dans quelque coup précédent, voilà comme je m'y prends. Je conçois que la carte qui se rencontre au coup proposé soit ôtée de l'un & de l'autre jeu, & l'ordre des cartes & le nombre des cas sera le même, que si le nombre des cartes était d'une unité moindre*. »

L'exemple du cas $m=4$ lui indique que des 24 tirages possibles, le 3 sort au troisième coup dans les cas 1, 6, 10, 12, 20, 21 ; en ôtant des ces tirages le n°3, il vient la table :

A	B					
1	1	1	2	2	4	4
2	2	4	4	1	1	2
4	4	2	1	4	2	1

De ces cas où le 3 apparaît en 3^{e} position « *il en faut retrancher ceux qui ont déjà eu une rencontre, ou dans le premier coup, ou dans le second ; il est clair que ce nombre à retrancher se trouve des cas de trois cartes, en ajoutant ensemble les cas, où A gagnerait alors au premier coup & au second.* »

Il poursuit : *« En général donc, si le nombre des cartes est* $=m$ *qu'on veuille savoir de combien il faut diminuer le nombre de cas* $\frac{M}{m}$*, qui ont une rencontre à un coup quelconque ; il faut avoir recours au nombre des cartes* $=m-1$*, & en chercher les cas, qui feraient gagner A à quelqu'un des coups précédents, & le nombre de tous ces cas ensemble sera celui dont il faut diminuer le nombre* $\frac{M}{m}$*, pour avoir le nombre de cas, qui feront gagner actuellement A à un coup proposé. »*

Soit alors *a*, (respectivement *b*, *c*, *d*, *e*) le nombre de cas qui font gagner A au premier coup (respectivement second, troisième, quatrième et cinquième) lorsque le jeu possède *3* cartes.

On a évidemment $a=\frac{M}{m}$ (c'est-à-dire $\frac{m!}{m}$).

De même si le jeu possède $m+1$ cartes en notant de manière analogue *a'*, *(respectivement b', c', d', e')* le nombre de cas qui font gagner A au premier coup (respectivement second, troisième, quatrième et cinquième) lorsque le jeu possède *3* cartes, on aura : $a'=\frac{M+1}{m+1}$ (càd $\frac{(m+1)!}{m+1}$) et

« en continuant le jeu, nonobstant les rencontres déjà arrivées, il y aura M cas aussi, où arriverait une rencontre au second coup : mais de ceux-ci il faut exclure ceux qui ont déjà eu une rencontre au premier coup ; & ce nombre étant $=a$*, comme nous avons vu* [ci-dessus], *nous aurons* $b'=M-a$*, pour le nombre des cas, qui, font actuellement gagner A au second coup. »*

De manière analogue, Euler établit $c'=M-a-b$

et plus généralement

$$a'=M$$
$$b'=M-a$$
$$c'=M-a-b$$
$$d'=M-a-b-c$$

ces relations permettent à partir des calculs faits pour les cas $m = 1,\ 2,\ 3$ de dresser le tableau suivant :

NOMBRE DES CARTES

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
a	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880
b	-	0	1	4	18	96	600	4320	35280	322560
c	-	-	1	3	14	78	504	3720	30960	387280
d	-	-	-	2	11	64	426	3216	27240	256320
e	-	-	-	-	9	53	362	2790	24024	229080
f	-	-	-	-	-	44	309	2428	21234	205056
g	-	-	-	-	-	-	265	2119	18806	183822
h	-	-	-	-	-	-	-	1854	16687	165016
i	-	-	-	-	-	-	-	- -	14833	148329
k	-	-	-	-	-	-	-	- -	- -	133496

À la différence du triangle de Pascal, chaque nombre n'est pas la somme de celui qui est au-dessus et de celui qui le précède, mais est égal à leur différence : le "triangle d'Euler" est alors très simple à compléter. (la première ligne étant celle des factorielles).
Il ne reste alors plus qu'à sommer les colonnes pour déterminer le nombre de rencontres en fonction du nombre de cartes dans le jeu.
L'activité ne manquerait pas d'intérêt dans une classe. Il manquera toutefois toujours au tableur l'intelligence du mathématicien et son ingéniosité, celles-là même qui poussèrent Euler à en trouver une expression simple.

Euler note *: "si pour le nombre des cartes m, le nombre des cas qui font gagner A à un certain coup est* p *; & le nombre des cas qui le font gagner au même coup, si le nombre des cartes est* $= m+1$*, soit* $= q$ *,& le nombre des cas qui le font gagner au coup suivant* $= r$ *le nombre des cartes demeurant* $m+1$*, on aura toujours* $r = q - p$.

Donc pour le nombre des cartes $= m$*, le nombre de tous les cas étant* $= 1,\ 2,\ 3 ... m = M$ *, l'espérance de A de gagner à un certain coup sera* $= \frac{p}{m}$*, que je nommerai* $= P$.
Or pour le nombre des cartes $= m+1$*, le nombre de tous les cas étant* $= M(m+1)$*, l'espérance de A de gagner au même coup sera* $= \frac{q}{M(m+1)}$*, qui soit posée* $= Q$*, &*

l'espérance de gagner au coup suivant $= \dfrac{r}{M(m+1)}$ *qui soit* $= R$. *Cela posé on aura*

$R = \dfrac{q-p}{M(m+1)}$ *ou bien* $R = Q - \dfrac{P}{m+1}$

Ainsi

« Donc posant le nombre des cartes $= n-1$*; puis que l'espérance de A de gagner au premier coup est* $= \dfrac{1}{n-1}$ *; pour le nombre des cartes* $= n$*, l'espérance de A de gagner au second sera* $= \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{(n-1)n} = \dfrac{n-2}{(n-1)n}$.

Or l'espérance de A de gagner au second coup, que le nombre des cartes est $= n-1$ *étant* $= n$ *; nous en concluons, que lorsque le nombre des cartes est* $= n$*, son espérance de gagner au troisième coup sera*

$$= \frac{n-2}{(n-1)n} - \frac{n-3}{(n-2)(n-1)n} = = \frac{n^2-5n+7}{(n-2)(n-1)n} = \frac{(n-2)^2-(n-2)}{(n-2)(n-1)n}$$

il poursuit

« Pour peu qu'on réfléchisse sur la forme de ces formules, on trouve que le nombre des cartes étant $= n$*, l'espérance de A de gagner sera*

au premier coup $= \dfrac{1}{n}$

au deuxième coup $= \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n(n-1)}$

au troisième coup $= \dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n(n-1)} + \dfrac{1}{n(n-1)(n-2)}$

au quatrième coup $= \dfrac{1}{n} - \dfrac{3}{n(n-1)} + \dfrac{3}{n(n-1)(n-2)} - \dfrac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$

au cinquième coup $= \dfrac{1}{n} - \dfrac{4}{n(n-1)} + \dfrac{6}{n(n-1)(n-2)} - \dfrac{4}{n(n-1)(n-2)(n-3)} + \dfrac{1}{n(n-1)\cdots(n-4)}$

au sixième coup $= \dfrac{1}{n} - \dfrac{5}{n(n-1)} + \dfrac{10}{n\cdots(n-2)} - \dfrac{10}{n\cdots(n-3)} + \dfrac{5}{n\cdots(n-4)} - \dfrac{1}{n\cdots(}$

&c.

Carte / Rencontre	$n-3$	$n-2$	$n-1$	n
1^{er} tirage	$(n-4)!$	$(n-3)!$	$(n-2)!$	$(n-1)!$
2^{nd} tirage		$(n-3)!-(n-4)!$	$(n-2)!-(n-3)!$	$(n-1)!-(n-2)!$
3^{e} tirage				$(n-1)!-2(n-2)!+(n-3)!$

L'espérance pour A de gagner au troisième coup sera, pour un jeu de *n* cartes

$$\frac{(n-1)! \quad - \quad 2(n-2) \quad !+ \quad (n-3)!}{n!}=\frac{1}{n}-\frac{2}{n(n-1)}+\frac{1}{n(n-1)(n-2)}$$

finalement

« L'espérance de A de gagner en général quelque coup que ce soit, sera exprimée par la somme de toutes ces formules prises ensemble. »

Euler somme alors suivant les colonnes :

La somme de la première vaut tout simplement $n\times\frac{1}{n}=1$.

La somme de la seconde est égale à $\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{1}{1\cdot 2}$.

La somme de la troisième fait apparaître la somme des nombres triangulaires :

$$1+3+6+10+....+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

elle vaut donc $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$

Et Euler de poursuivre :

« la somme des quatrièmes $=\frac{1}{1.2.3.4}$ *des cinquièmes* $=\frac{1}{1.2.3.4.5}$ *& ainsi de suite.*

De là il s'ensuit donc, que

le nombre des cartes étant	l'espérance de gagner de A sera
1	1
2	$1-\frac{1}{1.2}$
3	$1-\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}$
4	$1-\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{1.2.3.4}$
5	$1-\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{1.2.3.4.5}$
6	$1-\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2\ 3}-\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{1.2.3.4.5}-\frac{1}{1.2.3.4.5.6}$

prenant de cette suite toujours autant de termes, qu'il y a de cartes.»

Prenant le cas limite $n=\infty$, Euler en conclut que l'espérance de gagner de A sera $1-\frac{1}{e}$ et celle de B $\frac{1}{e}$.

Si l'ensemble du texte d'Euler pourrait être abordé en lycée sous forme d'activité guidée, la fin de celui-ci et l'étude de la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$ demandera une autre activité particulière qu'un sujet de bac proposait il y a quelques années.

Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel *n* non nul, par $I_n=\frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}dx$

a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

b. Prouver que, pour tout entier naturel *n* non nul, $0\le I_n\le\frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x}dx$.

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

c. Montrer, en utilisant une intégration par parties que pour tout entier naturel *n* non nul, on a : $I_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}-I_n$.

2. On considère la suite réelle (a_n), définie sur **R*** par $a_1=0$ et, pour tout entier naturel *n* non nul, $a_{n+1}=a_n+\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\;!}$.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n* non nul, $a_n=\frac{1}{e}+(-1)^n I_n$

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Si une multiplicité de mathématiciens se sont intéressés au jeu de Treize, une multiplicité d'approches mènent à la solution, en voici quelques-unes.

2. Le langage des permutations :

On appelle dérangement toute permutation de $\{1,\ 2,\ \ldots\ n\}$ qui n'admet aucun point invariant. Soit d_n le nombre de ces dérangements.

Considérons un dérangement de $\{1,\ 2,\ \ldots\ n\}$, il peut s'écrire sous la forme $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_n\}$ avec $\alpha_1\neq 1$. α_1 est donc l'une des n-1 valeurs $2,\ 3\ \ldots.n$.

Supposons que $\alpha_1=2$.

Nous pouvons avoir $\alpha_2=1$ ou $\alpha_2\neq 1$.

Si $\alpha_2=1$, la permutation s'écrit $\{2,\ 1,\ \alpha_3..\ \alpha_n\}$ où $\{\alpha_3..\ \alpha_n\}$ est l'un des d_{n-2} dérangements des entiers $\{3,\ 4,\ \ldots\ n\}$.

Si $\alpha_2 \neq 1$ alors $\{\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_n\}$ est l'un des d_{n-1} dérangements de $\{1,\ 3,\ \ldots\ n\}$.

Nous en déduisons donc la formule de récurrence :

$$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}) \text{ pour } n \geq 3 \quad \text{et} \quad d_1 = 0,\ d_2 = 1$$

Ces valeurs nous permettent de calculer de proche en proche celles de d_n et la relation permet de trouver une expression simple de d_n (voir ci-dessous[1]).

Soit $p_n = \dfrac{d_n}{n\ !}$, la probabilité qu'une permutation à n éléments soit un dérangement, nous avons

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{d_n}{n!} = \frac{(n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})}{n!} \\ &= (n-1)\left[\frac{1}{n} \cdot \frac{d_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{n(n-1)} \cdot \frac{d_{n-2}}{(n-2)!}\right] \\ &= (n-1)\left[\frac{p_{n-1}}{n} + \frac{1}{n(n-1)} p_{n-2}\right] \end{aligned}$$

d'où

$$p_n - p_{n-1} = -\frac{1}{n}(p_{n-1} - p_{n-2})$$

soit alors (v_n) la suite de terme général $\quad v_n = p_n - p_{n-1}$

(v_n) vérifie $v_n = -\dfrac{1}{n} v_{n-1}$ ou encore $v_n = \left(-\dfrac{1}{n}\right)\left(-\dfrac{1}{n-1}\right) v_{n-2}$

et par une récurrence immédiate $v_n = (-1)^{n-2}\left(\dfrac{1}{n}\right)\left(\dfrac{1}{n-1}\right) \ldots\ldots \dfrac{1}{3} \cdot v_2$

et comme $v_2 = p_2 - p_1 = \dfrac{d_2}{2!} - \dfrac{d_1}{1!} = \dfrac{1}{2}$

Il vient finalement $v_n = (-1)^n \dfrac{1}{n!}$

Maintenant, nous avons la somme

$$\sum_{k=2}^{n} v_k = \sum_{k=2}^{n} (p_k - p_{k-1}) = p_n - p_0$$

et donc $\qquad p_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

que l'on peut également écrire sous la forme : $\qquad p_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

---

[1] Notons dans un tableau les nombres R_n de parties avec rencontres et d_n de parties sans rencontres.

Nombre de cartes	Parties avec Rencontres R_n	Parties sans Rencontres d_n
1	1	0
2	1	1
3	4	2
4	15	9
5	76	44
6	455	265

Une règle simple de formation des termes de ces suites peut être trouvée :

$$R_n = nR_{n-1} + (-1)^{n+1} \qquad \text{et} \qquad d_n = nd_{n-1} + (-1)^n$$

La formule donnant D_n s'établit par une simple récurrence à partir de la relation donnée plus haut.

3. Le langage des séries :

Vieux problème, le problème des dérangements demeure d'actualité, puisqu'il faisait l'objet d'une partie du second problème du CAPES 2010 dont le thème général était l'étude des séries génératrices et leurs diverses applications.

Voici la partie sur les dérangements :

Soit $n \in N^*$. On note S_n l'ensemble des permutations de $\{1,\ 2,\ \ldots\ n\}$.

Un dérangement de l'ensemble $\{1,\ 2,\ \ldots\ n\}$ est une permutation $\sigma \in S_n$ sans point fixe c'est-à-dire telle que pour tout entier $i \in \{1,\ 2,\ \ldots\ n\}$, $\sigma(i) \neq i$. On note d_n le nombre de dérangements de l'ensemble $\{1,\ 2,\ \ldots\ n\}$.

On pose $d_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $p_n = \dfrac{d_n}{n!}$

1. Calculer d_1, d_2, d_3

2. a) Pour $0 \leq k \leq n$, on note B_k l'ensemble des permutations de S_n ayant exactement k points fixes.

Montrer que le cardinal de B_k vérifie l'égalité $Card(B_k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} d_{n-k}$ et en déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} d_k = n!$$

Une permutation de B_k possédant *k* points fixes, il y a donc $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ façons de choisir les points fixes, ces points étant choisis, il reste alors $n-k$ éléments qui ne sont pas fixes et qui définissent un dérangement de $n-k$ éléments, le nombre de ces dérangements étant par définition d_{n-k}, il y aura donc $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \times d_{n-k}$ permutations de S_n laissant *k* points fixes (la formule restant vraie pour $k = n$)

La famille (B_k) $(0 \leq k \leq n)$ forme une partition de S_n (une permutation ne pouvant appartenir à deux ensembles B_k distincts) on a donc $\sum_{k=0}^{n} card(B_k) = Card(S_n)$

c'est-à-dire $\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} d_{n-k} = n!$

en posant $p = n-k$ $\quad \sum_{p=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ n-p \end{pmatrix} d_p = n!$ ou $\sum_{p=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} d_p = n!$

2. b) Soit P la série génératrice de la suite (p_n). Montrer que

$$E(X) \times E(Y) = \sum_{n \geq 0} X^n \quad où \quad E(X) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} X^n .$$

On sait que le terme général de la série génératrice du produit $E(X) \times P(Y)$ est

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} p_k \times \frac{1}{(n-k)!}$$

par définition du produit.

On a donc
$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \times \frac{d_k}{(n-k)!}$$
$$= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \times d_k$$
$$= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \times d_k = \frac{n!}{n!} = 1$$

et donc
$$E(X) \times E(Y) = \sum_{n \geq 0} X^n$$

2. c) Déterminer la série génératrice inverse de $E(X)$

Supposons que $E(X)^{-1}$ existe, il s'écrit $E(X)^{-1} = \sum_{n \geq 0} b_n \quad X^n$

Le produit $E(X) \times E(X)^{-1}$ admet pour terme général $\quad c_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \times a_{n-k}$

et donc $1 = a_0 b_0$

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 \text{ et donc puisque } c_1 = 0 \ ; \ b_1 = a_0^{-1}(a_1 b_0)$$

(Ce qui montre que le terme général d'une série génératrice doit être non nul pour que celle-ci soit inversible).

Dans le cas présent $a_k = \dfrac{1}{k!}$, on établit alors sans peine que

$$b_0 = 1,\ b_1 = -1,\ b_2 = \frac{1}{2!},\ b_3 = -\frac{1}{3!}$$

et l'on peut raisonnablement supposer que $b_k = \dfrac{(-1)^k}{k!}$.

Une récurrence permet d'établir le résultat.
En effet,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= -a_0^{-1} \sum_{k=1}^{n+1} a_k \times b_{n-k} \\ &= -a_0^{-1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \times \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n-k} \\ & \frac{1}{(n+1)!}(-1)^{n+1} \end{aligned}$$

2. d) En déduire que $\quad d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$

On a $\quad P(X) = \left(\sum_{n \geq 0} X^n \right) \left(\sum_{k \geq 0} \dfrac{(-1)^k}{k!} X^k \right)$

série dont le terme général p_n est donné par $p_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!} \times 1$

et donc $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$

4. Le langage des matrices

Soit Φ l'endomorphisme de $P_n[X]$ défini par $\Phi(P) = P(X+1)$.

Dans la base $(1,\ X, X^2, ..., X^n)$, Φ admet pour matrice

$$L_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

Le terme général étant $\alpha_{i,j} = \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix}$, cette matrice est appelée matrice de Pascal triangulaire supérieure, il en existe deux autres U_n et P_n respectivement triangulaire inférieure et symétrique dont les cœfficients sont également les cœfficients binomiaux.

On a : $$(d_0,\ d_1.....,d_n)L_n = (0!,\ 1!,\ 2!,\ ......,n!)$$

Comme L_n est triangulaire supérieure avec les éléments diagonaux tous égaux à 1, elle est inversible et donc :

$$(d_0,\ d_1.....,d_n) = (0!,\ 1!,\ 2!,\ ......,n!)\ \ L_n^{-1}$$

La détermination de L_n^{-1} se fait sans peine, on a

$$(1,\ X,.....,X^n)L_n = (1,\ (1+X),\ (1+X)^2,\ ......(1+X)^n)$$

et donc $$(1,\ X,.....,X^n) = (1,\ (1+X),\ (1+X)^2,\ ......,(1+X)^n)L_n^{-1}$$

comme $$X^p = (1+X-1)^p = \sum_{k=0}^{p} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}(-1)^{p-k}(1+X)^k$$

décomposition de X^p dans la base, $(1+X)^k$ (pour $k = 0.....n$), on en déduit alors :

$$L_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & .. \\ 0 & 1 & -2 & 3 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_{i,j} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

avec $\alpha_{i,j} = (-1)^{i+j}\begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix}$ (pour $i \le j$)

<u>Propriété</u> : (formule d'inversion de Pascal)

Si $$a_p = \sum_{k=0}^{p} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} b_k$$

alors $$b_p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k}\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} a_k$$

De l’égalité $(d_0,\ d_1.....,d_n)L_n = (0\ !,\ 1!,\ 2!,\ ......n\ !)$

il vient $n\ ! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$

et d’après la formule d’inversion de Pascal

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k!$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!}$$

et en posant $p = n - k$

$$d_n = n! \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{p!}$$

5. Le langage des ensembles

La formule du crible de Poincaré fournit une réponse ensembliste au problème des dérangements.

Soit $A = \{1,\ 2,\ ......, n\}$ et A_i l’ensemble des permutations laissant i invariant. Le nombre des dérangements de A, n’est autre que le cardinal de l’ensemble des permutations ne laissant aucun entier invariant c’est-à-dire

$$Card(A_1 \cap A_2 \cap ..... \cap A_n) = n\ ! - Card(A_1 \cup A_2 \cup ..... \cup A_n)$$

On a $Card(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i1 \le i2 \le ......ik \le n} Card\left(A_{i1} \cap .... \cap A_{ik}\right).$

Une permutation laissant p éléments fixes est complètement déterminée par celle qui échange les $n - p$ autres, par conséquent

$$Card(A_{i1} \cap A_{i2} \cap ..... \cap A_{ik}) = (n-k)\ !$$

et $\sum_{1 \le i1 \le i2 \le ......ik \le n} Card\left(A_{i1} \cap .... \cap A_{ik}\right) = \binom{n}{k}(n-k)! = \frac{n!}{k!}$

et donc $Card(\cup_{i=1}^{n} A_i) = n\ ! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k!}$

et $Card(A_1 \cap A_2 \cap ..... \cap A_n) = n!(1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k!})$

c'est-à-dire $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}.$

MISE EN PAGE :
Françoise BESSE

COMITE DE REDACTION ET DE LECTURE :
Catherine LABRUERE CHAZAL
Alain MASCRET
Jean-François MUGNIER
Marie-Noëlle RACINE

REDACTEUR EN CHEF :
Catherine LABRUERE CHAZAL

DIRECTEUR DE LA PUBLICATION :
Catherine LABRUERE CHAZAL, Directrice de l'IREM

DÉPÔT LÉGAL :
n° 195 – 2e semestre 2010

IMPRESSION :
Service Reprographie

FEUILLE DE VIGNE
Université de Bourgogne – UFR Sciences et Techniques
IREM
9 Avenue Alain Savary – BP 47870 – 21078 Dijon cedex
☎ 03 80 39 52 30 – Fax 03 80 39 52 39
@ : iremsecr@u-bourgogne.fr.
http://math.u-bourgogne.fr/IREM