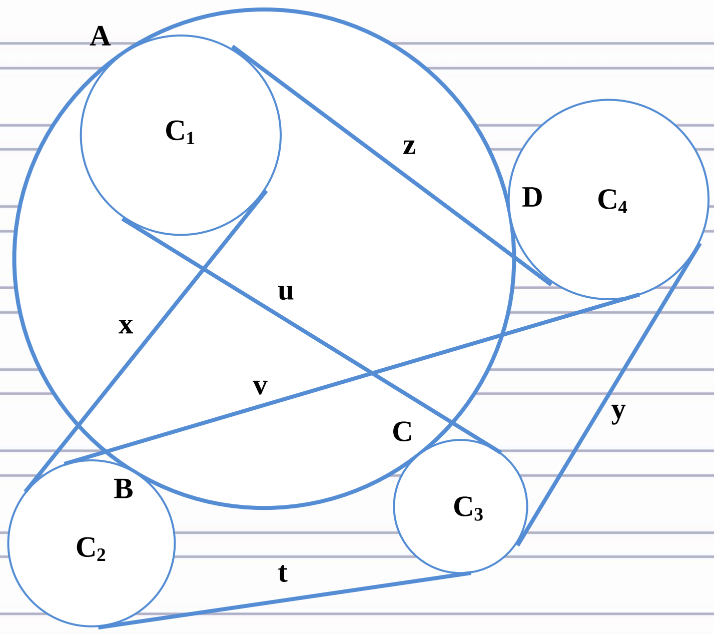
N° 121 – Octobre 2011

Feuille de Vigne

Irem de Dijon

- ✓ Une activité Google en collège : tableur et probabilités
- ✓ Une généralisation du théorème de Ptolémée
- ✓ Perspectives d'un cercle



Revue Trimestrielle

Issn 0246-5752

Photo de couverture : Moulin de Bouhy - Photo Irène Mascret

Sommaire

Éditorial

Les mathématiques bougent encore !

L'heure était grave, lorsque nous avions constaté que la géométrie disparaissait quasiment de nos programmes du lycée. Si vous ajoutez à cela une vision pessimiste et courante des nouveaux contenus[1], il n'y aurait pas de quoi se réjouir : les mathématiques enseignées se réduisent à peu de choses… Suppressions de postes et diminution des heures de travail en classe vont de pair.

Mais pourtant non, elles ne sont pas mortes, nos chères vieilles mathématiques ! Découvre-t-on que nos pays sont finalement dirigés par des multimilliardaires ? Elles résistent, nos multimillénaires, contre la mode actuelle qui ne valorise que l'arithmétique de base, les calculs simples (on approche des élections), les comparaisons de valeurs numériques. Si vous jetez un coup d'œil sur les articles de ce numéro 121, vous vous rendrez à l'évidence : les mathématiques sont au-dessus de la mêlée et seront toujours là lorsque le clinquant aura disparu de nos sociétés. N'écrit-on pas à propos d'un théorème vieux de 2000 ans, aussi bien que d'un algorithme, qu'ils représentent le comble de la modernité ? Ne rappelle-t-on pas des techniques picturales plusieurs fois centenaires, appelant à la rescousse des tableaux de la Renaissance ? Il est vrai que dans tous ces écrits, c'est l'informatique qui tient notre stylo ou notre palette, mais c'est un autre problème ; les mathématiques se moquent des siècles.

Une autre qualité de convivialité des mathématiques, c'est qu'on peut les pratiquer en couple. Voyez l'article de Françoise et Sébastien Estrade, qui montrent une activité réalisée au collège à propos de l'algorithme PageRank utilisé par Google ; inspirés par une session de formation organisée par l'IREM, ils ont créé cette activité pour leurs élèves de troisième en adaptant le concept complexe du célèbre moteur de recherche de « la pieuvre », de manière à permettre une utilisation éclairante du tableur ; et ça marche ! Tout devient simple, vous devriez vous-même ouvrir une feuille de calcul et suivre les instructions.

Michel Lafond (mais où va-t-il chercher tout ça ?) s'essaye à une généralisation du théorème de Ptolémée, dont l'aspect esthétique n'est pas le moindre intérêt. Il s'agit de considérer non pas les distances

[1] Certains trouvent le programme assez vide. On réussirait à garantir le succès de <u>tous</u> les élèves en supprimant les contenus qui leur posent problème, mais le Billancourt des vrais matheux serait désespéré.

entre des points d'un cercle, mais les longueurs des segments tangents à des cercles (éventuellement réduits à un point) eux-mêmes tangents à un cercle donné. N'est-ce pas clair ? L'article vous l'expliquera mieux que moi et vous constaterez que l'aspect esthétique/pictural mentionné plus haut n'est vraiment pas négligeable. Mais tout de même : voilà un contemporain qui prolonge un travail ancien de 2000 ans et personne ne crie « Hadopi » ! C'est que les mathématiques n'ont pas de maître, elles inspirent chacun et veulent être aimées pour elles-mêmes, comme l'écrivait Oronce Fine il y a 500 ans..

Il y a 500 ans, on était en pleine époque de la Renaissance et les peintres avaient découvert les règles de la perspective. C'est ici qu'interviennent Alain Mascret et Marie-Noëlle Racine, le géomètre et l'artiste, munis eux aussi de leurs logiciels, en l'occurrence Geogebra[2] et Geoplan : la question initiale est celle de la représentation « réaliste » des cercles vus de biais, que ce soit en perspective cavalière ou en perspective centrale. Il n'y a personne ici non plus pour dénoncer un mauvais traitement infligé aux tableaux, puisqu'il s'agit d'une expérience purement cérébrale et interpolatrice.

Vous le voyez, les mathématiques se moquent des fossés temporels et comme la littérature ou les arts, elles continuent à nous inspirer une aventure intellectuelle sans équivalent. Au fond, elles réalisent le vieux rêve d'Alain Delon : 4000 ans et pas une ride !

Bonne lecture,

Frédéric MÉTIN.

[2] Cela m'étonne d'Alain qu'il ait pu se contenter d'un seul logiciel, mais les adorateurs de Geogebra lui seront reconnaissants d'avoir choisi celui-ci.

Agenda

A L'IREM

12 janvier 2012 : journée de formation « Comment motiver l'enseignement des mathématiques ». Animateurs : D. Gardes, F. Ghommid, A. Regnaud.

9 ou 10 mai 2012 : journée Musée sur le thème « *Autour des nombres* ».
Matin à l'IREM ;
Après midi au Musée des Beaux Arts de Dijon.
Inscription auprès de l'IREM.

NOUVELLE ASTRONOMIQUE

Mardi 10 janvier 2012, à la NEF (1 place du théâtre, c'est l'ancienne chambre de commerce) à Dijon, à 18 h 30 précises.
Conférence de Pierre Causeret :

Vous voulez tout savoir sur les couleurs du ciel, des étoiles ou des nébuleuses ?
Savez-vous de quelle couleur est le Soleil ? Certains le disent blanc alors qu'on le dessine souvent jaune ; pourtant il émet au maximum dans le vert et sa lumière est capable de former toutes les couleurs de l'arc-en-ciel. Et pourquoi le ciel est-il bleu ? Les planètes sont-elles colorées ? Savez-vous qu'il y a des étoiles rouges ou bleues mais pas d'étoiles vertes, alors qu'il existe des nébuleuses vertes ? Le ciel de jour comme de nuit est plein de couleurs ; leur compréhension fait appel à la nature de la lumière mais aussi au fonctionnement de notre œil.

Qu'on se le dise !

Jeux et Problèmes

Michel LAFOND
mlafond001@yahoo.fr

JEU – 71.

Trouver le nombre maximal d'entiers de l'ensemble {2, 3, 4, 5 - - - 100} ayant pour produit un carré parfait.

PROBLÈME – 71.

Démontrer que pour tout entier n le nombre $n^7 - 14\,n^5 + 49\,n^3 - 36\,n$ est multiple de 7 ! [factorielle 7].

Solutions

JEU – 70.

Il est facile de voir que pour calculer a^{10}, quatre multiplications suffisent, par exemple :

$a \times a = a^2$ puis $a^2 \times a^2 = a^4$ puis $a^4 \times a = a^5$ et enfin $a^5 \times a^5 = a^{10}$.

Mais combien de multiplications faut-il au minimum pour calculer $a^{13} \times b^{30}$?

Solution :

9 multiplications suffisent avec :

$b\times b = b^2$ puis $b^2 \times b^2 = b^4$ puis $a \times b^2 = ab^2$ puis $(ab^2)\times (ab^2) = a^2b^4$ puis $(a^2b^4) \times (a^2b^4) = a^4b^8$ puis $(a^4b^8) \times (a^4b^8) = a^8b^{16}$ puis $(a^4b^8) \times (a^8b^{16}) = a^{12}b^{24}$ puis
$(a^{12}b^{24}) \times (ab^2) = a^{13}b^{26}$ et enfin $(a^{13}b^{26}) \times (b^4) = a^{13}b^{30}$.

PROBLÈME – 70.

Dans le plan euclidien, ABC est un triangle équilatéral de côté s et M est un point du plan avec MA = p MB = q MC = r.
Démontrer que $3(p^4 + q^4 + r^4 + s^4) = (p^2 + q^2 + r^2 + s^2)^2$

Solution :

On peut supposer qu'on a les coordonnées suivantes :

A (0, 0) B (2, 0) C (1, $\sqrt{3}$) et M (x, y).

Le côté s est alors égal à 2 et :
$p^2 = PA^2 = x^2 + y^2$. $q^2 = PB^2 = (x-2)^2 + y^2$.
$r^2 = PC^2 = (x-1)^2 + (y - \sqrt{3})^2$.

Donc :
$(p^2 + q^2 + r^2 + s^2)^2 = (3x^2 + 3y^2 - 6x - 2\sqrt{3}y + 12)^2$
et :
$p^4 + q^4 + r^4 + s^4 = (x^2 + y^2)^2 + ((x-2)^2 + y^2)^2 + ((x-1)^2 + (y - \sqrt{3})^2)^2 + 16$.

Un peu de courage et on vérifie qu'en développant
$3(p^4 + q^4 + r^4 + s^4)$ et $(p^2 + q^2 + r^2 + s^2)^2$ on trouve dans les deux cas :

$9x^4 + 9y^4 + 108x^2 + 64y^2 + 18x^2y^2 + 144 - 36x^3 - 36xy^2 - 144x - 12\sqrt{3}x^2y - 12\sqrt{3}y^3 + 24\sqrt{3}xy - 48\sqrt{3}y$.

Une activité Google en collège : Tableur et probabilités

Françoise et Sébastien ESTRADE Collège Louise Michel Chagny
et collège La Chataigneraie à Autun
francoise.estrade@ac-dijon.fr sebastien.estrade@ac-dijon.fr

Résumé : L'activité présentée ici (principalement en partie II), s'est déroulée dans une **classe de troisième** et a permis à des élèves de découvrir des **mathématiques cachées derrière le fonctionnement du moteur de recherche google**. Elle a également servi au professeur à faire manipuler le **tableur** à ses élèves et introduire une notion de **probabilité**.

Mots clés : Activité en collège ; tableur ; algorithme ; classement pages google ; algorithme PageRank ; probabilité

Ayant toujours cherché à montrer aux élèves l'utilisation des mathématiques dans les nouvelles technologies, le stage « Mathématiques et nouvelles technologies » animé par Catherine Labruère-Chazal et Denis Gardes nous a apporté des idées et des notions exploitables avec des élèves de collège.
Nous avons découvert à cette occasion l'algorithme PageRank du moteur de recherche Google qui est un algorithme permettant de classer les pages Web selon leur popularité. Il nous avait été présenté selon deux points de vue : les matrices ou le tableur. L'utilisation du tableur nous a semblé opportune pour introduire la notion de probabilité à des élèves de 3^{e}.

1. Conditions de l'activité

- Journées à thèmes au Collège La Châtaigneraie à Autun pour des élèves de 3^{e}.
- Durée totale : 3h en salle info avec 1 vidéoprojecteur pour le professeur et 1 ordinateur relié à internet par groupe de deux élèves.

2. Présentation de l'activité

- Recherche sur l'histoire de la société Google : les élèves ont un questionnaire (voir l'activité élèves, partie I) à remplir sur l'année de naissance, le nom des créateurs, les activités de la société, ses revenus, etc. Ils ont comme outil de recherche internet et Wikipédia (principalement). Ce questionnaire, corrigé à l'aide d'un diaporama (résumé en fin d'activité élèves, partie I), permet d'introduire la multitude des activités et services proposés par la société Google.

- Activité sur l'algorithme PageRank : les élèves doivent remplir une fiche (voir activité élèves, partie II). Les calculs, simples au début, se répètent et deviennent plus fastidieux. Les élèves travaillent alors au tableur.
- On peut présenter d'autres exemples (de réseaux) avec leurs classements, voire même montrer la matrice servant à résoudre plus rapidement un exemple plus complexe. (voir à ce sujet l'annexe pour des explications plus détaillées destinées aux professeurs ou aux élèves de lycée un peu curieux).
- Le fait d'utiliser le tableur permet~~,~~ de valider quelques items du B2I et aussi d'introduire les probabilités.

Nous n'avons parlé de probabilité qu'en fin d'activité. Par ailleurs, le fait d'avoir des fractions dans les calculs rajoutait une difficulté que nous voulions contourner. Nous avons donc choisi de présenter l'activité aux élèves avec des points de popularité (voir activité élève, partie II). Le tableur permet de changer aisément les conditions initiales et de constater que le résultat final de fréquentation des internautes sur une page ne dépend que des liens entre les pages. Les points de popularité permettent d'aboutir à une probabilité de présence d'un internaute sur une page Web à un instant donné (voir activité élèves, partie II).

3. Bilan et modifications à envisager

La séance s'est très bien déroulée avec une classe de troisième très intéressée. Cependant nous nous sommes aperçu de certains problèmes :

Nous avons toujours cherché à simplifier au maximum le travail sur PageRank étant persuadés que l'algorithme était complexe à saisir, que nous y arrivions parce que nous étions plongés dedans depuis quelques temps mais que pour de jeunes élèves qui devaient le comprendre en quelques minutes cela serait plus difficile. Nous avons donc passé beaucoup de temps à le leur détailler, et à le leur présenter à plusieurs reprises : un tableau, puis le tableur puis un diaporama (voir activité élèves, parties I et II).

Au final ils l'ont très bien compris et à l'avenir, nous supprimerons les phrases : « A reçoit la moitié des points de..... » pour leur laisser davantage d'autonomie dans leurs recherches. De plus nous avons regretté de ne pas avoir intégré sur leur feuille d'autres exemples à travailler au tableur (à cinq ou six pages Web). La modification sera faite pour les prochaines fois.

Nous avons même « joué » avec eux, sur un réseau à 8 pages à deviner quelle page obtiendrait la plus forte popularité connaissant le réseau. Généralement nous tombions d'accord et notre choix s'avérait juste une fois vérifié au tableur. (voir exemples en annexe)

Activité élèves : Partie I

Connaissez-vous Google ?

> *Vous connaissez tous le site www.google.fr pour effectuer des recherches sur internet mais connaissez-vous la société Google, ses créateurs, son origine et le fonctionnement du site Google.fr ?*

La société Google :

Lien :http://fr.wikipedia.org/wiki/Google

Qui sont les créateurs de la société Google ? En quelle année a-t-elle été créée ? Où ?
D'où vient le nom de cette société ? Que signifie-t-il ?
Quelle est l'origine des revenus de cette société ?

Les activités :

Lien : http://logiciels.zorgloob.com/liste.php

Parmi tous les sites (ou logiciels) créés (ou rachetés) par la société Google, citer les plus connus :

....

....

Lien : http://fr.wikipedia.org/wiki/Google#Critiques_et_controverses

> *Ce très grand nombre de sites, de services, et de logiciels disponibles jette également le doute sur les intentions de la société Google puisque qu'elle collecte des informations sur ses utilisateurs pour les stocker et les revendre.*

Le site Google.com (ou Google.fr pour la France)

Lien : http://fr.wikipedia.org/wiki/Google_(moteur_de_recherche)

Comment s'appelle le système de classement sur lequel est basé le site :

....

Qu'indique ce système ?

....

Ce système a-t-il été un succès ?

....

Éléments de réponse :

Les créateurs de google sont Larry Page et Sergueï Brin. La société a été créée en 1998 en Californie, avec de petits moyens : ses débuts se sont faits dans un garage avec un matériel très réduit.
Le nom de Google est en fait une modification du nom de «googol» qui en anglais signifie : 10^{100}.
Google est l'une des premières entreprises américaines et même mondiales. C'est l'une des plus imposantes entreprises du marché d'internet. En effet, en 2010, Google possédait un parc de plus d'un million de serveurs, ce qui en fait le parc de serveurs le plus important du monde (2 % du nombre total de machines), avec des machines réparties sur plus d'une trentaine de sites.
Pour de nombreuses personnes, Google est le symbole du monde des services gratuits, performants et sans limites.
Citons un certain nombre d'entreprises ou d'applications développées par google : google maps, google toolba, google sketchUp, Picasa, google desktop, Blogger, google reader, YouTube, Androïd, Chrome, google Analytics, google Earth, Gmail, google chrome OS, Panoramio, igoogle, google livres, streetview, ….
Cependant, la situation de quasi monopole et les questions de vie privée inquiètent de plus en plus, puisque cette société se sert des informations qu'elle récolte pour les revendre ensuite pour de la publicité.
Les revenus Google :

- Google vend des mots clés aux enchères. Si une personne fait une recherche avec ce mot, les liens des sites de ceux qui ont participé aux enchères s'inscrivent dans la partie des liens commerciaux. Chaque fois qu'une personne sélectionne un de ces liens, la société concernée doit verser une certaine somme à Google.
- Lors d'une recherche d'un site Web sur le moteur de Google, les pages des résultats comportent également des annonces publicitaires, annonces vendues par google, sous le terme "liens sponsorisés", et choisies en fonction des mots clés tapés.

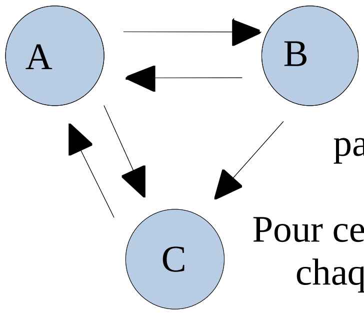
Google utilise, entre autres, un système de classement nommé PageRank pour son moteur de recherche. Ce système est basé sur un algorithme mathématique de popularité. Il a été un succès immédiat et a éclipsé des moteurs de recherche comme Altavista ou Yahoo.

Activité élèves : Partie II :

Initiation aux probabilités par les pourcentages
Comment fonctionne Google.fr ?

> *L'élément fondamental de Google.fr est PageRank, un système de classement des pages Web.*
> *Le principe de PageRank est simple : tout lien pointant de la page A à la page B donne de la popularité à la page B.*
> *L'indice de popularité d'une page est d'autant plus grand qu'elle a un grand nombre de pages populaires ayant un lien vers elle.*
> *Toutefois, Google ne limite pas son évaluation au nombre de liens reçus par la page.*

Un premier exemple :



Supposons qu'il n'y ait que 3 pages sur internet : les pages A, B et C.

Supposons également le schéma (voir ci-contre) de ces pages avec les liens qui les relient : le site Google.fr va calculer la popularité de chaque page.

Pour cela, au départ, attribuons par exemple 10 points de popularité à chaque page, c'est-à-dire que nous supposons que 10 personnes consultent chacune de ces pages.

Chaque page va répartir ses points <u>équitablement</u> entre toutes les pages vers lesquelles elle envoie un lien, autrement dit les 10 internautes qui étaient sur la page vont se répartir équitablement vers les pages sur lesquelles elle envoie un lien.

Nous allons voir sur l'exemple ci-dessus, grâce au tableau suivant, comment vont se répartir ces points, au bout d'un grand nombre de navigations sur le net.

1^{e} étape : départ

<table>
<tr><th colspan="2">A a reçu : 10</th><th colspan="2">B a reçu : 10</th><th>C a reçu : 10</th><th>Nombre de points</th></tr>
<tr><td colspan="2">donne</td><td colspan="2">donne</td><td>donne</td><td rowspan="2">Envoi des points selon les liens</td></tr>
<tr><td>….. à B</td><td>…. à C</td><td>…. à A</td><td></td><td></td></tr>
</table>

À la fin de cette étape, il y a …. personnes sur la page A, …. personnes sur la page B, …. personnes sur la page C. Les points de popularité de ces trois pages sont donc, pour la deuxième étape : A …, B …, C …..

À ce stade de la navigation, les pages sont classées dans l'ordre : …., ….., …. et la somme de tous les points de popularité est …. (c'est-à-dire qu'il y a toujours les 30 internautes du départ sur la toile !)

2^e^ étape : On note les points de popularité obtenus à l'issue de la première étape et on recommence le partage des points selon le même principe (chaque page répartit ses points <u>équitablement</u> entre toutes les pages vers lesquelles elle envoie un lien) :

A a reçu : (la moitié des points de B et tous les points de C)	B a reçu : (la moitié des points de A)	C a reçu : (la moitié des points de A et la moitié des points de B)	Nombre de points
donne	donne	donne	Envoi des points selon les liens
↙ ↘	↙ ↘	↓	

3^e^ étape : on compte les points obtenus, on note les résultats dans le tableau ci-dessous. À ce stade de la navigation, les pages sont classées dans l'ordre : …, …., …
On peut encore vérifier le total de tous les points de popularité : ……
On recommence le partage des points, toujours selon le même principe :

A a reçu : (la moitié des points de B et tous les points de C)	B a reçu : (la moitié des points de A)	C a reçu : (la moitié des points de A et la moitié des points de B)	Nombre de points
donne	donne	donne	Envoi des points selon les liens
↙ ↘	↙ ↘	↓	

4^e^ étape : on compte les points obtenus, on note les résultats dans le tableau ci-dessous. À ce stade de la navigation, les pages sont classées dans l'ordre : ..., …, ….
On vérifie le total de tous les points de popularité : ……
On recommence le partage des points, toujours selon le même principe :

A a reçu : (la moitié des points de B et tous les points de C)	B a reçu : (la moitié des points de A)	C a reçu : (la moitié des points de A et la moitié des points de B)	Nombre de points
donne	donne	donne	Envoi des points selon les liens
↙ ↘	↙ ↘	↓	

5e étape : on compte les points obtenus, on note les résultats dans le tableau ci-dessous. À ce stade de la navigation, les pages sont classées dans l’ordre : …, …., …
On vérifie le total de tous les points de popularité : ……
On recommence le partage des points, toujours selon le même principe :

A a reçu : (la moitié des points de B et tous les points de C)	B a reçu : (la moitié des points de A)	C a reçu : (la moitié des points de A et la moitié des points de B)	Nombre de points
donne	donne	donne	Envoi des points selon les liens

À ce stade de la navigation, les pages sont classées dans l’ordre : …., ….., ….
On vérifie le total de tous les points de popularité : ……

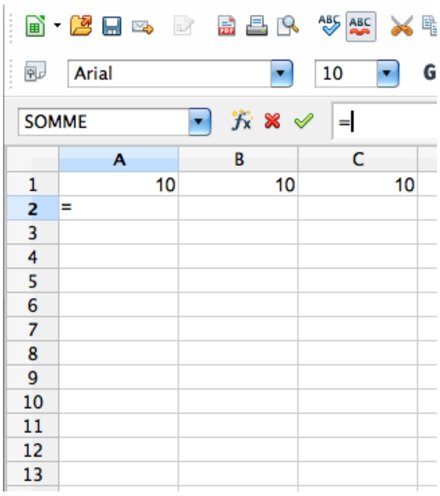
Pour confirmer ce classement nous allons utiliser le tableur mais il faut établir des formules pour lui permettre de calculer ce que reçoit chaque page.

À chaque fois que l'on compte le nombre de points,

A a reçu la moitié des points de B et tous les points de C	B a reçu la moitié des points de A:	C a reçu la moitié des points de A et la moitié des points de B
A =	B =	C =

Mettre ces formules dans le tableur :

Faire vérifier par le professeur



Après un grand nombre d’étapes, les points de popularité ont l’air de se stabiliser et un classement « définitif » se dessine.
Le tableur donne le classement suivant : …, …., ….

Pages		A	B	C
Conditions initiales	au Tableur			
	en Pourcentages			
	en Fréquences			
Résultats après stabilisation	au Tableur			
	en Pourcentages			
	en Fréquences			

Nous allons répartir les points de popularité différemment, et observer les résultats :
Que se passe-t-il si on donne tous les points de popularité à A ?

Le tableur donne le classement suivant : …, …, …

Donner tous les points à A c'est donner ….. % des points de popularité à A.

Compléter le tableau suivant :

Faire vérifier par le professeur

Pages		A	B	C
Conditions initiales	au Tableur			
	en Pourcentages			
	en Fréquences			
Résultats après stabilisation	au Tableur			
	en Pourcentages			
	en Fréquences			

Notons qu'il est intéressant de faire remarquer aux élèves qu'en changeant la répartition initiale des points (en mettant par exemple 0 à A, 1 à B, 0 à C, ou en attribuant 0 à A, 0 à B, 1 à C), la stabilisation des points se fait toujours de la même manière : 0,444 ; 0, 2222 ; 0,3333 et que cette répartition est la même en fréquence si on attribue 30 à A, 0 à B, 0 à C, ou encore 30 à A, 10 à B, 45 à C. (voir à ce sujet, le complément d'information donné en annexe par l'éditeur). Cette manipulation se fait aisément avec le tableur, soit par le professeur au vidéo projecteur, soit par chaque groupe d'élèves. Proposons alors la définition suivante :

Après n étapes, la fréquence de popularité d'une page s'appelle la probabilité de présence d'un internaute sur cette page.

La stabilisation de ces fréquences après un grand nombre de navigations sur le net, permet ainsi de dire que :
La probabilité de présence d'un internaute sur la page A est de :
La probabilité de présence d'un internaute sur la page B est de :
La probabilité de présence d'un internaute sur la page C est de :

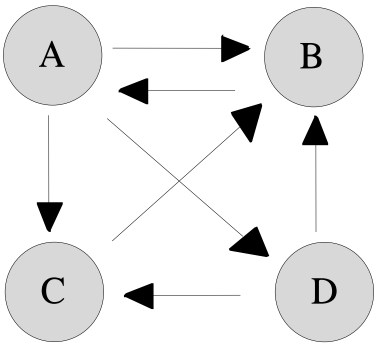
C'est avec ces probabilités que Google donne le classement des pages sur son site de recherche.

Résultats au tableur pour la première configuration proposée aux élèves :

	A	B	C	total		A	B	C	total
étape 0	10	10	10	30		1	0	0	1
étape 1	15	5	10	30		0	0,5	0,5	1
étape 2	12,5	7,5	10	30		0,75	0	0,25	1
étape 3	13,75	6,25	10	30		0,25	0,375	0,375	1
étape 4	13,125	6,875	10	30		0,563	0,125	0,313	1
étape 5	13,438	6,563	10	30		0,375	0,281	0,344	1
étape 6	13,281	6,719	10	30		0,484	0,188	0,328	1
étape 7	13,359	6,641	10	30		0,422	0,242	0,336	1
étape 8	13,320	6,680	10	30		0,457	0,211	0,332	1
étape 9	13,340	6,660	10	30		0,438	0,229	0,334	1
étape 10	13,330	6,670	10	30		0,448	0,219	0,333	1
étape 11	13,335	6,665	10	30		0,442	0,224	0,333	1
étape 12	13,333	6,667	10	30		0,446	0,221	0,333	1
étape 13	13,334	6,666	10	30		0,444	0,223	0,333	1
étape 14	13,333	6,667	10	30		0,445	0,222	0,333	1
étape 15	13,333	6,667	10	30		0,444	0,222	0,333	1
étape 16	13,333	6,667	10	30		0,445	0,222	0,333	1
étape 17	13,333	6,667	10	30		0,444	0,222	0,333	1

Exemple supplémentaire :

En utilisant le tableur, déterminer le classement final de ce schéma à quatre pages :



Classement :	Probabilités :

Réponses : A et B sont ex æquo avec 0,35294118, viennent ensuite C avec 0,17647059, puis D avec 0,11764706. (le lecteur curieux pourra trouver d'autres précisions en annexe.)

Annexe :

Notes et commentaires de l'éditeur :

- ✓ *Pourquoi les probabilités de présence sur une page se stabilisent-elles ? Pourquoi ne dépendent-elles pas de l'état initial ?*

Ces deux résultats viennent d'un même théorème, le fameux Théorème du point fixe : soit S un compact de R^n et soit f une application de S dans S contractante, c'est-à-dire qu'il existe un réel k dans]0 ;1[tel que $\|f(x)-f(y)\| \leq k\|x-y\|$ pour tous x, y de S. Alors :

1. Il existe un unique x_0 de S tel que $f(x_0)=x_0$.
2. Les suites de S définies par $u_{n+1}=f(u_n)$ convergent vers x_0 et ceci quel que soit le choix du terme initial u_0 dans S.

Dans l'algorithme de Google, la dimension de l'espace R^n est le nombre de pages Web. L'application f est celle que l'on définit par les formules du tableur. Elle a la propriété d'être linéaire et d'envoyer un vecteur de R^n dont la somme des coordonnées est un certain nombre T sur un vecteur de R^n dont la somme des coordonnées est ce même nombre T. On peut démontrer qu'elle est, **sous de bonnes hypothèses**[1], contractante sur l'ensemble (compact) des vecteurs dont les coordonnées sont positives et de somme T. Les hypothèses du théorème du point fixe sont donc satisfaites.

Attribuer au départ un nombre total de points de popularité T aux pages web revient à choisir un vecteur u_0 dont la somme des coordonnées est T. Les points de popularité des pages après le $n^{\text{ième}}$ clic sont les coordonnées du vecteur u_n défini par récurrence par $\boldsymbol{u_{n+1}=f(u_n)}$. Le théorème du point fixe implique que, quelle que soit la répartition initiale des points entre ces différentes pages, la suite (u_n) converge vers l'unique point fixe de f dont la somme des coordonnées est T. Si on calcule les probabilités de présence et non plus les points de popularité, l'algorithme converge vers l'unique point fixe de f dont la somme des coordonnées est 1 (qui, f étant linéaire, est obtenu simplement en divisant par T les coordonnées du point fixe de f dont la somme des coordonnées est T).

- ✓ *Probabilités de présence (ou points de popularité) au bout d'un temps infini de l'exemple à trois pages Web de l'activité-élève, partie II :*

---

[1] Il faut que-la seule valeur propre de module 1 de l'application linéaire f soit 1 et que le sous-espace propre associé soit de dimension 1.

D'après ce qui précède, pour déterminer les probabilités de présence au bout d'un temps infini ou les points de popularité au bout d'un temps infini, il faut trouver les points fixes de l'application f de R^3 dans R^3 définie par les formules destinées au tableur. Notons x_A, x_B, x_C les valeurs des pages A, B, C. Cette application est alors définie par :

$$f\,(x_A\,;\,x_B\,;\,x_C)=(0{,}5x_B+x_C\,;\,0{,}5x_A\,;\,0{,}5x_A+0{,}5x_B).$$

Les points fixes de f sont solutions de l'équation $f(x_A\,;\,x_B\,;\,x_C)=(x_A\,;\,x_B\,;\,x_C)$. Ce sont donc les triplets $(x_A\,;\,x_B\,;\,x_C)$ qui satisfont aux trois équations :

$$\begin{cases} 0{,}5x_B + x_C = x_A \\ 0{,}5x_A = x_B \\ 0{,}5x_A + 0{,}5x_B = x_C \end{cases}$$

c'est-à-dire les triplets de la forme $x_A = 2\alpha$; $x_B = \alpha$; $x_C = 1{,}5\alpha$; avec α réel.

- Probabilités de présence au bout d'un temps infini : on les obtient en cherchant la solution qui vérifie $x_A + x_B + x_C = 1$, soit $\alpha = 2/9$ et la solution est :

  $\mathbf{x_A = 4/9}$ **;** $\mathbf{x_B = 2/9}$ **;** $\mathbf{x_C = 1/3}$**.**

- Points de popularité : si on répartit 30 points de popularité entre les 3 pages, il faut chercher la solution telle que $x_A + x_B + x_C = 30$, c'est-à-dire prendre $\alpha = 20/3$ et les points de popularité au bout d'un temps infini sont : $\mathbf{x_A = 40/3}$ **;** $\mathbf{x_B = 20/3}$ **;** $\mathbf{x_C = 10}$**.**

De même, nous aurions le système associé à l'exemple supplémentaire de la partie II de l'activité élève :

$$\begin{cases} x_A = x_B \\ x_B = \frac{1}{3}\,x_A + x_C + \frac{1}{2}\,x_D \\ x_C = \frac{1}{3}\,x_A + \frac{1}{2}\,x_D \\ x_D = \frac{1}{3}\,x_A \end{cases}$$

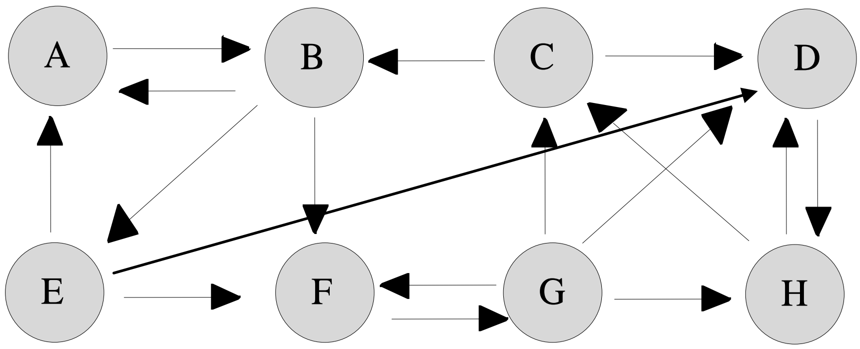
Pour lequel les probabilités de présence sur une page sont : $x_A = x_B = \frac{6}{17}$; $x_C = \frac{3}{17}$; $x_D = \frac{2}{17}$.

Pour aller plus loin, un point de vue matriciel : la matrice de l'application linéaire f modélisant le réseau est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$ se traduit matriciellement par $X_{n+1} = M X_n$ où X_n est le vecteur (x_A ; x_B ; x_C ; x_D). Soit X_0 le vecteur contenant les valeurs initiales que l'on se fixe au hasard. On a alors $X_n = M^n X_0$. Pour n assez grand, les coefficients de M^n se stabilisent et le point fixe sera approché par $M^n X_0$.

Autre exemple, réseau à 8 pages :



La matrice correspondant à ce réseau est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Les probabilités de présence sur chaque page sont : $\frac{2}{35}$; $\frac{9}{70}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{8}{35}$; $\frac{3}{70}$; $\frac{8}{105}$; $\frac{8}{105}$; $\frac{26}{105}$.

Références :

1- *Mathématiques et Technologie* de C. Rousseau et Y. Saint-Aubin (livre édité par Springer-Verlag) disponible à l'IREM.

2- *Comment fonctionne Google* de M. Eiserman (archive de Wikipédia sur PageRank)

Une généralisation du théorème de Ptolémée

Michel LAFOND,
Mlafond001@yahoo.fr

Mots clés : Ptolémée ; cercles ; tangentes ; quadrilatère inscriptible.

Résumé : Une généralisation du célèbre théorème de Ptolémée.

1. Rappel de l'énoncé traditionnel.

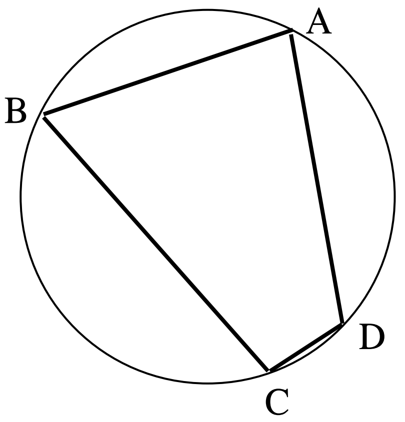


***Figure* 1**

Théorème de Ptolémée : un quadrilatère convexe est inscriptible si et seulement si le produit des longueurs des diagonales est égal à la somme des produits des longueurs des côtés opposés.

Avec les notations de la figure 1 : AB . CD + AD . BC = AC . BD

On en trouve une démonstration sur Wikipédia avec sa réciproque.

Ce théorème est vrai lorsque le cercle est dégénéré, c'est-à-dire lorsque son rayon est nul (le cercle est un point, A, B, C, D sont confondus) ou lorsque son rayon est infini.

Dans ce dernier cas, le cercle est une droite, et :

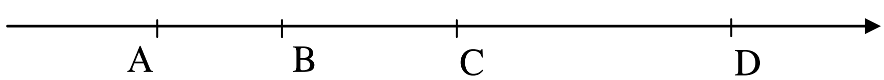


***Figure* 2**

si A, B, C, D sont, dans cet ordre, quatre points de la droite et si, dans un repère de cette droite, ils ont pour abscisses a, b, c, d alors, concernant les mesures algébriques, on a la relation : $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$ équivalente à l'identité $(b - a)(d - c) + (d - a)(c - b) = (c - a)(d - b)$.

2. Le principe de la généralisation.

L'idée de la généralisation est, dans la figure 2, de considérer la relation précédente avec les longueurs. (Ce n'est pas gênant puisque toutes les mesures algébriques sont positives).

On retrouve : AB . CD + AD . BC = AC . BD,

puis de voir chaque longueur comme celle d'une tangente commune extérieure à deux cercles :

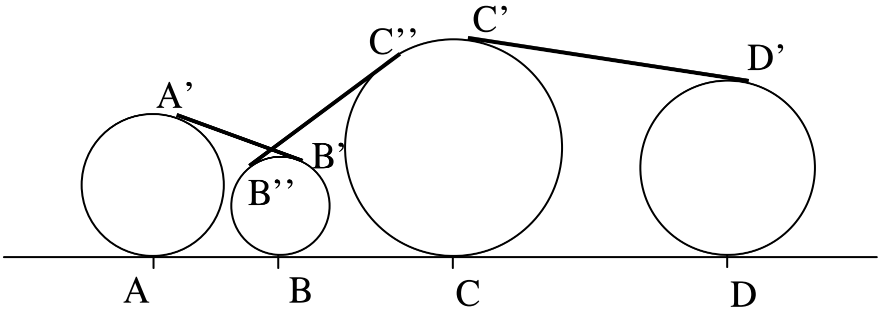


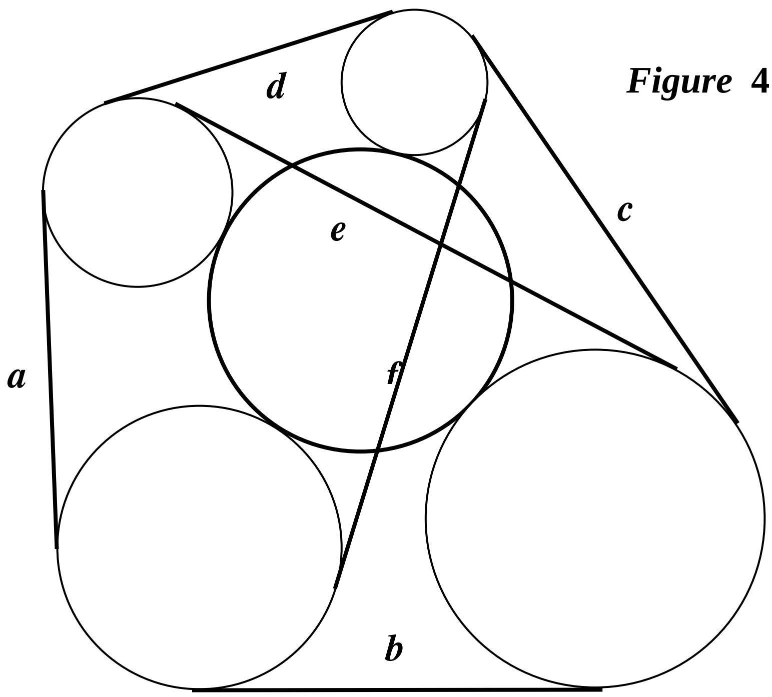
***Figure* 3**

En effet, dans la figure 3, AB = A'B' ; BC = B''C'' ; CD = C'D'.

On n'a pas l'air d'avancer, mais que se passe-t-il lorsque le cercle n'est pas dégénéré ?

Ce serait quand même extraordinaire si, dans la figure 4 ci-dessous, où les lettres désignent les longueurs des tangentes extérieures (en gras), on avait : ***ac + bd = ef*** !

***Figure* 4**



Pourtant, c'est bien le cas, et vous pouvez reproduire cette figure pour vérifier, comme je l'ai fait.
La démonstration est dans le paragraphe 5).

On tient une généralisation : lorsque les quatre cercles extérieurs de la figure 4 ont un rayon nul, la relation $ac + bd = ef$ redonne le théorème de Ptolémée !

Mais les généralisations, ce n'est pas toujours facile. D'abord, pourquoi prendre des cercles tangents extérieurement à un même cercle ?

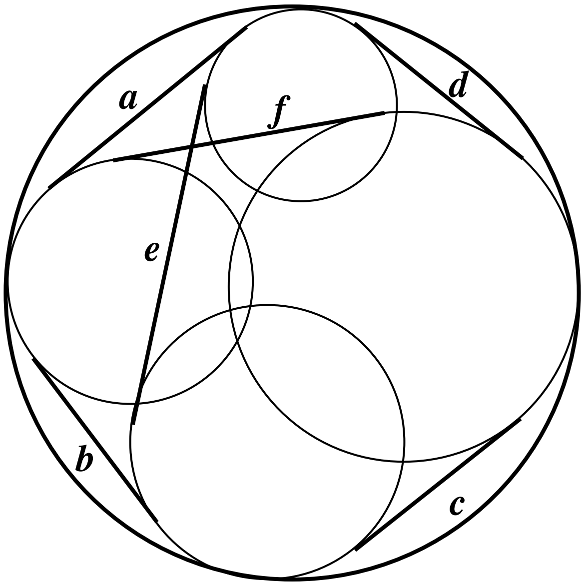


***Figure* 5**

Dans la figure 5 ci-dessus, on a encore la relation $ac + bd = ef$.

Et tant qu'on y est, pourquoi ne pas envisager quatre cercles tangents à un même cercle sans plus de précision (extérieurement ou intérieurement) au cercle d'origine ?
On va le faire, mais avec cependant une limitation en ce qui concerne les cercles tangents intérieurement, car il y aurait de gros problèmes si ceux-ci contenaient le cercle d'origine.

3. *La notation* $< C_1C_2 >$.

Définissons une notation pour faciliter la démonstration du théorème (paragraphe 5).

Le cercle d'origine de centre O et de rayon non nul sera noté C = (O, R).
Les quatre cercles qui lui sont tangents (extérieurement ou intérieurement) seront notés :

$C_1 = (O_1, R_1)$, $C_2 = (O_2, R_2)$, $C_3 = (O_3, R_3)$, $C_4 = (O_4, R_4)$, leurs rayons pouvant être nuls.
Le point de contact de C_i avec C sera noté P_i.
Dans le cas où C_i est tangent intérieurement à C, on suppose $R_i < R$.

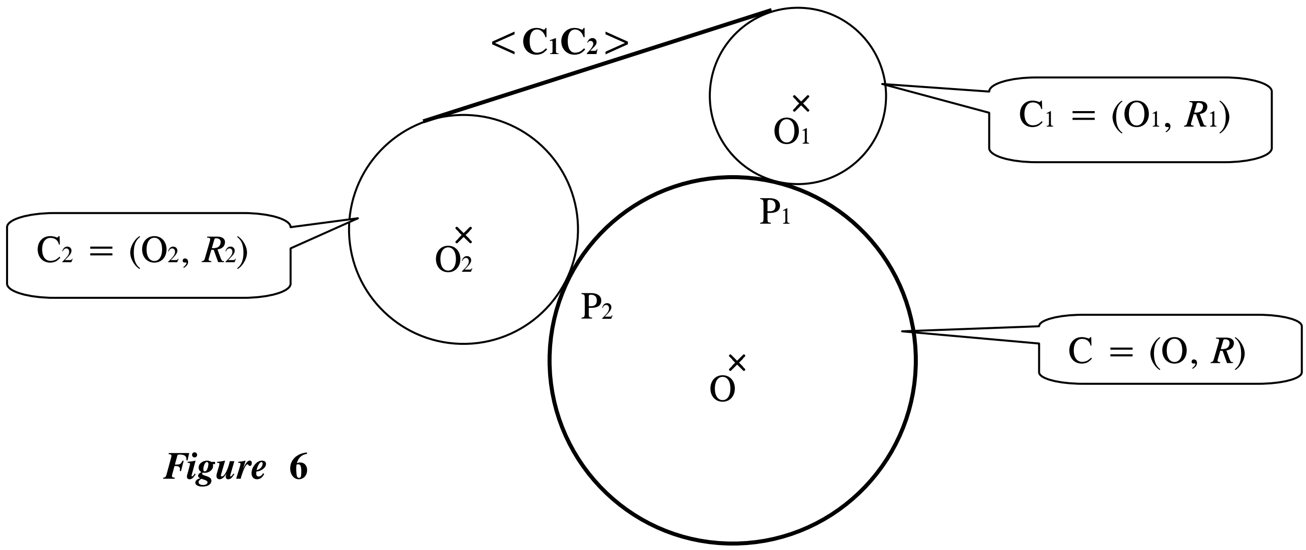


***Figure* 6**

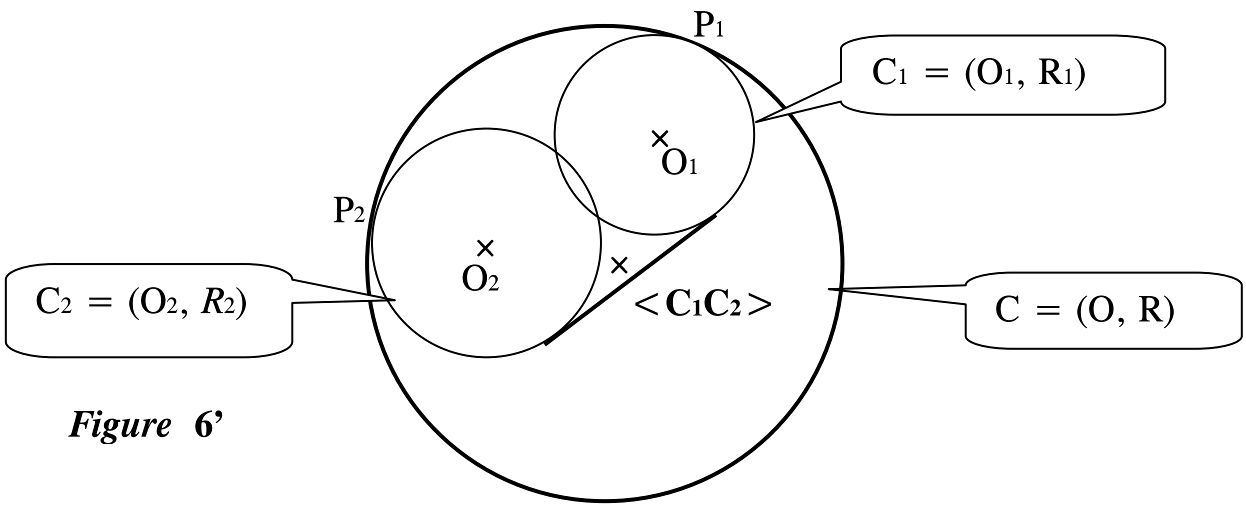
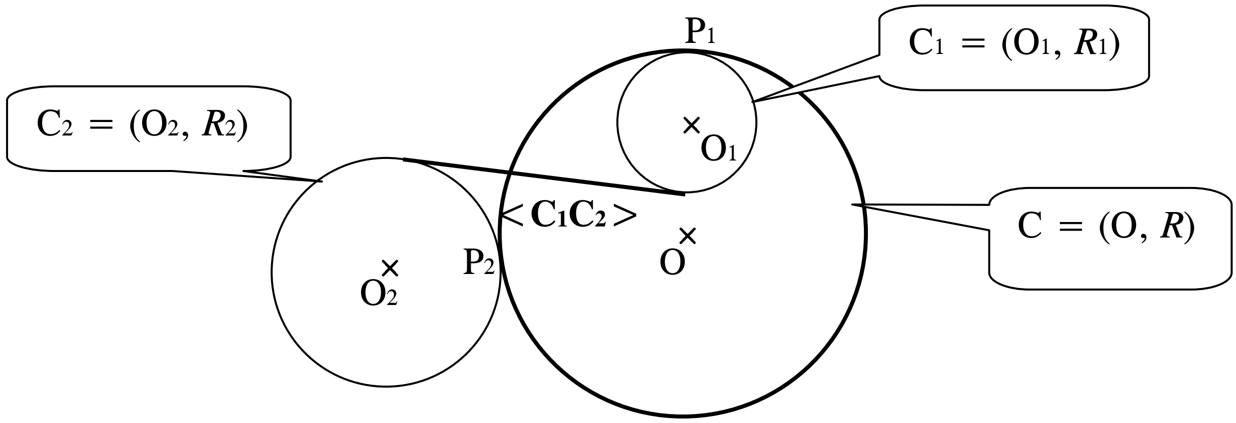


***Figure* 6’**

Si $C_1 = (O_1, R_1)$ et $C_2 = (O_2, R_2)$ sont tangents tous deux extérieurement [Figure 6] ou tous deux intérieurement [Figure 6’] à C et si $P_1 \neq P_2$ on note $< \mathbf{C_1C_2} >$ la longueur de leur tangente commune extérieure. Elle existe puisqu’il est impossible qu’un cercle contienne l’autre.
[Si C_2 contenait C_1, alors C_2 contiendrait P_1 et P_2 soit deux points de C et il n’y aurait plus tangence].

Figure **7**



Si $C_1 = (O_1, R_1)$ et $C_2 = (O_2, R_2)$ sont tangents à C, l'un extérieurement et l'autre intérieurement, et si $P_1 \neq P_2$ [Figure 7], on note < $\mathbf{C_1C_2}$ > la longueur de leur tangente commune intérieure. Elle existe de manière évidente.

4. Calcul de $L = < C_1C_2 >$.

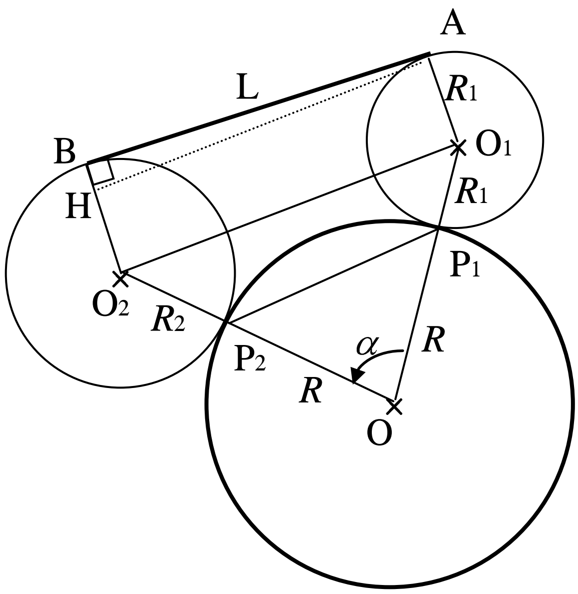


Figure **8**

- Dans le cas où $C_1 = (O_1, R_1)$ et $C_2 = (O_2, R_2)$ sont tangents extérieurement à C (Figure 8) :

Un peu de Pythagore dans ABH (AH parallèle à O_1O_2) montre que :

$L^2 = <\mathbf{C_1C_2}>^2 = O_1O_2^{\,2} - (R_2 - R_1)^2$ (1)

Dans OO_1O_2 on a : $O_1O_2^{\,2} = (R + R_2)^2 + (R + R_1)^2 - 2\,(R + R_2)(R + R_1)\cos(\alpha)$ (2)

Dans OP_1P_2 on a : $P_1P_2^{\,2} = 2\,R^2 - 2\,R^2\cos(\alpha) = 2\,R^2\,(1 - \cos(\alpha))$ (3)

(1) et (2) donnent :

$$L^2 = (R + R_2)^2 + (R + R_1)^2 - 2\,(R + R_2)(R + R_1)\cos(\alpha) - (R_2 - R_1)^2$$

On développe :

$$L^2 = 2R^2 + 2R\,(R_1 + R_2) + R_1^2 + R_2^2 - 2\,(R + R_2)(R + R_1)\cos(\alpha) - R_1^2 - R_2^2 + 2R_1R_2.$$

il reste : $L^2 = 2\,(R + R_2)(R + R_1)\,(1 - \cos(\alpha))$ (4)

On remplace dans (4) $1 - \cos(\alpha)$ par $P_1P_2^2 / 2R^2$ tiré de (2) pour obtenir :

$L^2 = (R + R_2)(R + R_1)\,P_1P_2^2 / R^2$ d'où

$$L = \langle C_1C_2 \rangle = \frac{P_1P_2}{R}\sqrt{(R+R_1)(R+R_2)} \qquad (5)$$

- Dans le cas où $C_1 = (O_1, R_1)$ et $C_2 = (O_2, R_2)$ sont tangents tous deux intérieurement à C, les calculs sont presque identiques et donnent :

$$L = \langle C_1C_2 \rangle = \frac{P_1P_2}{R}\sqrt{(R-R_1)(R-R_2)} \qquad (6)$$

- Enfin, dans le cas où $C_1 = (O_1, R_1)$ est tangent intérieurement à C et $C_2 = (O_2, R_2)$ est tangent extérieurement à C, on a la Figure 9 ci-dessous :

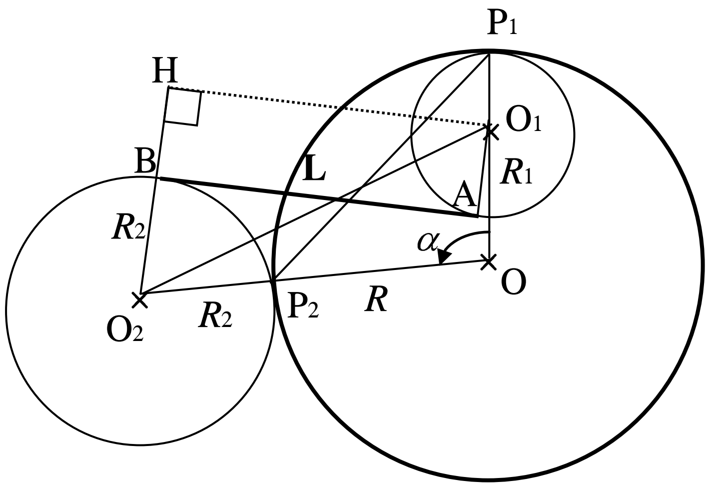


***Figure* 9**

Un peu de Pythagore dans O_1O_2H (O_1H parallèle à AB et O_2H parallèle à O_1A) montre que :

$$L^2 \ \langle \mathbf{C_1C_2} \rangle^2 = O_1O_2^2 - (R_1 + R_2)^2 \qquad (7)$$

Dans OO_1O_2 on a :

$O_1O_2^2 = (R + R_1)^2 + (R + R_2)^2 - 2\,(R + R_1)(R + R_2)\cos(\alpha)$ (8)

Dans OP_1P_2 on a :

$P_1P_2^2 = 2\,R^2 - 2\,R^2\cos(\alpha) = 2\,R^2\,(1 - \cos(\alpha))$ (9)

(7) et (8) donnent :

$L^2 = (R + R_1)^2 + (R + R_2)^2 - 2\,(R + R_1)(R + R_2)\cos(\alpha) - (R_1 + R_2)^2$

soit après simplification :

$$L^2 = 2\,(R - R_1)(R + R_2)\,(1 - \cos(\alpha)) \qquad (10)$$

On remplace dans (10) $1 - \cos(\alpha)$ par $P_1P_2^2 / 2R^2$ tiré de (9) pour obtenir :

$L^2 = (R - R_1)(R + R_2)\,P_1P_2^2 / R^2$ d'où

$$L = <\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2> = \frac{P_1P_2}{R}\sqrt{(R-R_1)(R+R_2)} \qquad (11)$$

On constate que l'expression de <**C_1C_2**> peut être est condensée en une seule expression :

$$<\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2> = \frac{P_1P_2}{R}\sqrt{(R \pm R_1)(R \pm R_2)}$$

Le signe est + pour un cercle tangent extérieurement et – pour un cercle tangent intérieurement.

5. Le théorème de Ptolémée généralisé.

Théorème :

Soit C un cercle de rayon non nul *R*.

Soient quatre cercles C_1, C_2, C_3, C_4 qui lui sont tangents (extérieurement ou intérieurement) et de rayons R_1, R_2, R_3, R_4, les points de contact étant distincts et notés respectivement P_1, P_2, P_3, P_4.

On suppose P_1, P_2, P_3, P_4 dans cet ordre sur C, et dans le cas où C_i est tangent intérieurement à C, on suppose $R_i < R$.

Avec la notation $<C_i\, C_j>$ définie dans le paragraphe III), on a la relation :

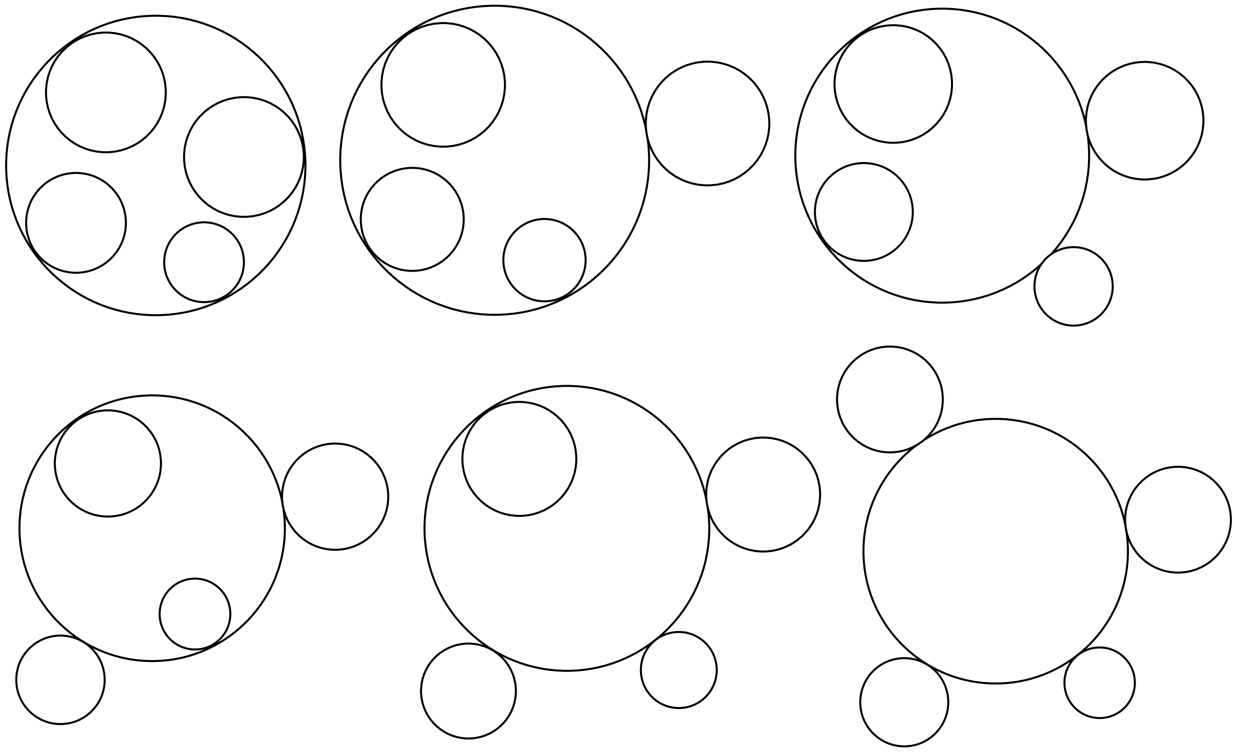
$$\mathbf{<C_1C_2> <C_3C_4> + <C_1C_4> <C_2C_3> = <C_1C_3> <C_2C_4>}.$$

Démonstration :

Il faudrait envisager les six cas* ci-dessous, mais les démonstrations sont toutes semblables, et on va se limiter au cinquième cas.

On utilise évidemment à fond le résultat du paragraphe 4). Attention à "la règle des signes".

* Les cas 3 et 4 ci-dessous sont distincts si l'on considère l'ordre dans lequel on rencontre les cercles tangents extérieurement et les cercles tangents intérieurement.



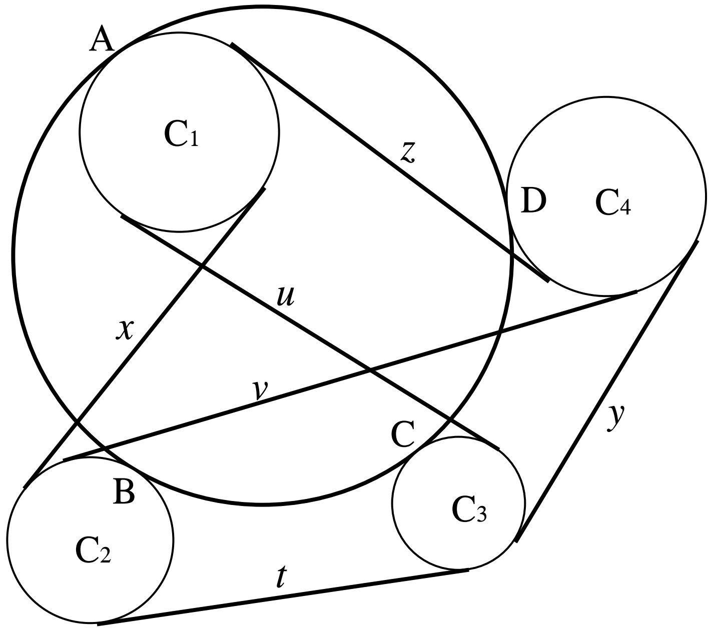


***Figure* 10**

x y + z t = u v

On a :

$< C_1C_2> = \dfrac{AB}{R}\sqrt{(R-R_1)(R+R_2)}$ $\qquad$ $< C_2C_3> = \dfrac{BC}{R}\sqrt{(R+R_2)(R+R_3)}$

$< C_3C_4> = \dfrac{CD}{R}\sqrt{(R+R_3)(R+R_4)}$ $\qquad$ $< C_1C_4> = \dfrac{AD}{R}\sqrt{(R-R_1)(R+R_4)}$

On en déduit :

$$< C_1C_2 > < C_3C_4 > = \frac{AB.CD}{R^2} \sqrt{(R-R_1)(R+R_2)} \sqrt{(R+R_3)(R+R_4)}$$

$$< C_1C_4 > < C_2C_3 > = \frac{AD.BC}{R^2} \sqrt{(R-R_1)(R+R_4)} \sqrt{(R+R_2)(R+R_3)}$$

donc :

$< C_1C_2 >< C_3C_4 > + < C_1C_4 >< C_2C_3 > =$

$$\frac{(AB.CD + AD.BC)}{R^2} \sqrt{(R-R_1)(R+R_2)(R+R_3)(R+R_4)}$$

Mais d'après Ptolémée (classique) on a : AB.CD + AD.BC = AC.BD donc :

$$< C_1C_2 > < C_3C_4 > + < C_1C_4 > < C_2C_3 > = \frac{AC.BD}{R^2} \sqrt{(R-R_1)(R+R_2)(R+R_3)(R+R_4)}$$

$< C_1C_2 > < C_3C_4 > + < C_1C_4 > < C_2C_3 > =$

$$\frac{AC}{R} \sqrt{(R-R_1)(R+R_3)} \times \frac{BD}{R} \sqrt{(R+R_2)(R+R_4)}$$

$$< C_1C_2 > < C_3C_4 > + < C_1C_4 > < C_2C_3 > = < C_1C_3 > < C_2C_4 > \qquad \text{CQFD.}$$

Remarques :

Cette généralisation est valable si un (ou plusieurs) rayon R_i est nul, avec à la limite le théorème de Ptolémée classique lorsque les quatre rayons sont nuls.
Elle reste valable si le cercle C a un rayon infini (c'est une droite).
La réciproque est vraie (moyennant les conventions sur les positions des tangentes).

6. Ultime généralisation.

Dans le cas des cercles tangents intérieurement, on a supposé jusque là $R_i < R$.
Mais la généralisation fonctionne encore dans le cas où les quatre cercles C_i ont des rayons supérieurs à R (donc contiennent C, comme dans la figure 11 ci-dessous).
La démonstration est la même que plus haut, avec ici, pour tout i, j :

$$< C_iC_j > = \frac{P_iP_j}{R} \sqrt{(R_i - R)(R_j - R)} .$$

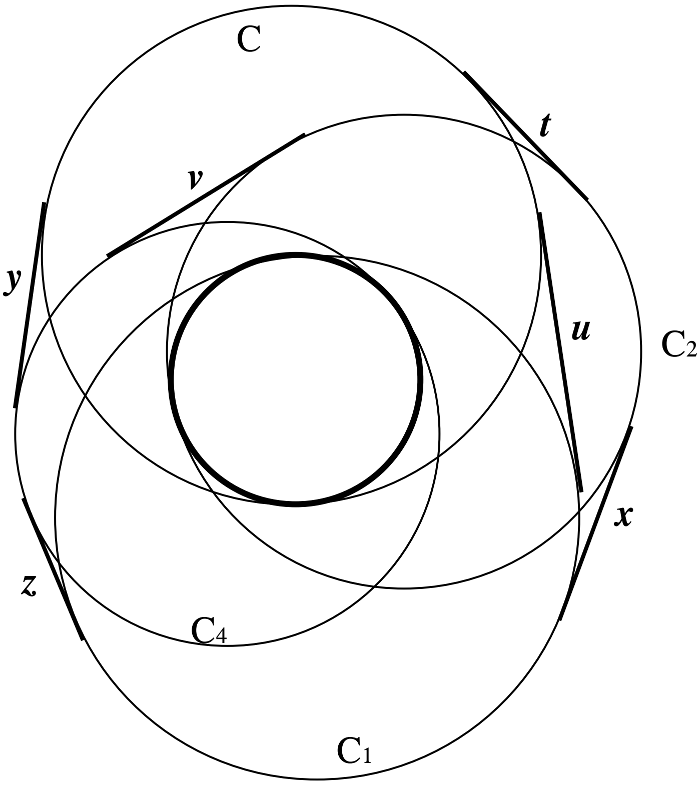


***Figure* 11**

$$x\,y + z\,t = u\,v$$

Bibliographie :

L’appendice de l’article "Two Applications of the Généralized Ptolemy Theorem" de Shay Gueron dans le numéro d’Avril 2002 de "The American Mathematical Monthly".
L’article signale qu’il existe d’autres généralisations du théorème de Ptolémée. Voir sitographie.

Sitographie :

Le site de WIKIPEDIA pour le "Ptolémée classique".
Le site de WOLFRAM : http://mathworld.wolfram.com/ où on peut trouver le théorème de Fuhrman généralisant le théorème de Ptolémée au cas d’un hexagone inscriptible : parcourir sur ce site le chemin :
Geometry – Plane geometry – Quadrilaterals – Ptolemy’s theorem – Fuhrman’s theorem.

Perspectives d'un cercle (partie 1)

Marie-Noëlle Racine mnracine@orange.fr
Alain Mascret, collège, Gevrey-Chambertin,
mascret@ac-dijon.fr
Groupe Math et Arts de l'IREM de Dijon

Résumé : Comment représenter un cercle en perspective centrale (linéaire) ou en perspective cavalière. Quelques exemples au musée des Beaux-Arts de Dijon.
Cet article sera publié en deux parties, perspective cavalière (partie 1) dans ce numéro 121 de la *Feuille de Vigne*, perspective centrale, ou linéaire (partie 2) dans le prochain numéro 122 de la *Feuille de Vigne.*

Mots clés : Perspective cavalière, perspective centrale, GeoGebra, geowiki, arts et math, perspective linéaire, cercle, perspective, sphère.

Chaque année, le groupe « math et arts » organise une journée musée. Le thème de la dernière, en mai 2011, était la perspective des corps ronds. Cet article reprend la méthode de représentation d'un cercle, présentée par Marie-Noëlle Racine le matin. Nous l'illustrerons par quelques tableaux du musée des Beaux-Arts de Dijon, présentés par Liliane Boccacio-Lecler lors de la visite commentée l'après-midi au musée.

Vous retrouverez la plupart des figures de cet article sur geowiki, le site du groupe « géométrie dynamique », plus précisément à la page :
http://geowiki.u-bourgogne.fr/doku.php?id=activites:perspective_d_un_cercle
Vous pourrez y refaire les constructions pas à pas. Chaque instruction du logiciel GeoGebra est commentée.

Les photos de tous les tableaux, insérées dans cet article, ont été faites sans flash et sans pied-photo au musée des Beaux Arts de Dijon (MBAD) par Marie-Noëlle Racine. Elles sont publiées au titre de la formation d'enseignants, sans but lucratif ou commercial et ne peuvent en aucun cas être copiées ou reproduites, par quelque moyen que ce soit, à titre commercial, sans autorisation préalable de leur auteure et du musée des Beaux Arts de Dijon.

1. Perspective cavalière : *(figure 1)*

Sur chaque face visible d'un cube, nous allons dessiner un cercle tangent aux quatre arêtes.

Méthode de construction :

Sur la face ABCT, située dans un plan frontal, le cercle $\mathscr{C}$ de centre N est en vraie grandeur, sans déformations.

Les représentations des cercles sur les autres faces du cube sont des transformations géométriques de ce cercle $\mathscr{C}$ de centre N. Il s'agit d'affinités (voir une démonstration en fin d'article).

Appelons $\mathfrak{C}$ la transformation qui fait passer de $\mathscr{C}$ à son image $\mathscr{C}'$ sur la face ATKI.

Construisons $\mathscr{C}'$ point par point.

Pour tout point P du cercle $\mathscr{C}$, traçons la droite (PQ) parallèle à (AB) passant par P, avec Q sur [AT].

Pour obtenir le point E (image de P par $\mathfrak{C}$), construisons les images des droites (NP) et (PQ) par la transformation $\mathfrak{C}$.

(QP) étant parallèle à (AB), son image (d) dans la face ATKI est la parallèle à (AI) passant par Q.

(NP) coupe (AT) en R. L'image de (NP) est (RO) où O est le point d'intersection des diagonales de ATKI.

E est l'intersection de (RO) et (d).

À tout point P du cercle $\mathscr{C}$ de centre N correspond bien un point E sur la face ATKI (et de la même manière, un point E' sur la face ABJI).

La représentation du cercle $\mathscr{C}'$ tracé sur la face ATKI est le lieu des points E quand P décrit le cercle $\mathscr{C}$.

Figure 1

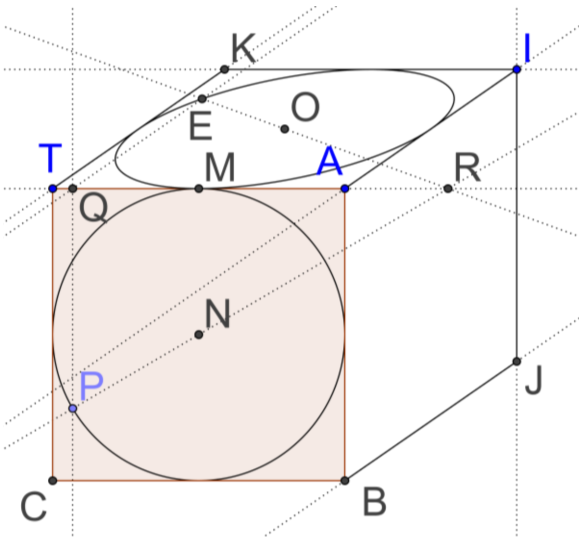
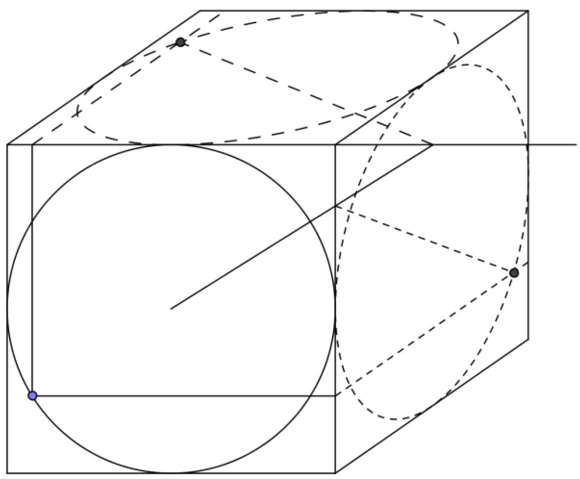


Figure 2



Pour une construction sur papier, « à la main », on peut utiliser huit points et leurs huit tangentes au cercle $\mathscr{C}$ ou à la représentation de $\mathscr{C}'$ sur la face ATKI *(figure 3)* :

- les 4 milieux des arêtes d'une face du cube ;
- les 4 points d'intersection du cercle avec les diagonales de la face du cube.

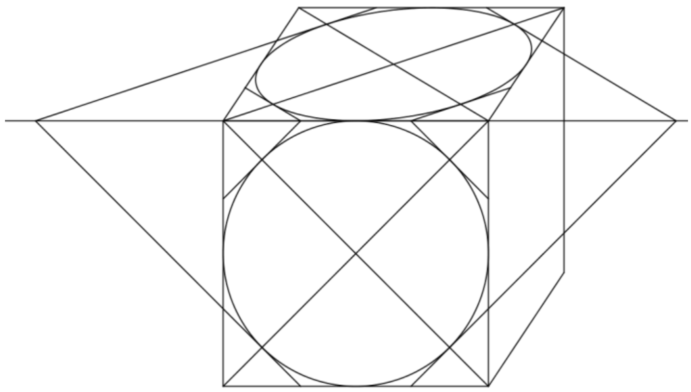


Figure 3

Notons :

1) aux points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les diagonales [AC] et [BT] de ABCT, les tangentes à $\mathscr{C}$ sont parallèles, respectivement aux diagonales [BT] et [AC]. Ainsi, les tangentes à la représentation de $\mathscr{C}'$ aux points d'intersection avec les diagonales [AT] et [TI] sont parallèles, respectivement, aux diagonales [TI] et [AK].

2) la représentation de $\mathscr{C}'$ est une ellipse de centre O. Les axes de cette ellipse ne sont généralement pas parallèles aux arêtes de la face ATKI (voir *figure 4*)

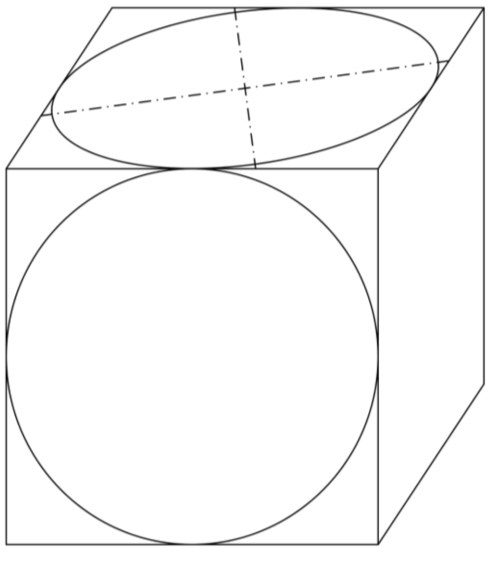


Figure 4

3) certains logiciels comme GeoGebra peuvent tracer la conique représentant $\mathscr{C}'$ à partir de 5 points. Cette possibilité sera notamment utilisée pour tracer les contours de représentations d'objets ronds sur des photos d'œuvres d'art (voir *figure 5*)

Sainte Dorothée et sainte Catherine (d'Alexandrie), tableau attribué (peut-être à tort) au maître de la Passion de Darmstadt qui l'aurait peint vers 1440-1450.
Musée des Beaux Arts de Dijon
©Photo MN Racine.
Figure 5

L'ellipse ABCDE épouse le contour intérieur de la roue. Ses deux axes, tracés en pointillés sur la *figure 5* ci-dessus sont manifestement non parallèles à la direction de projection de la perspective cavalière indiquée par les lignes de fuite repérées grâce aux joints des carreaux au sol. C'est-à-dire que les axes de la représentation d'un cercle sur la face latérale d'un cube ne seraient pas parallèles aux arêtes du cube.

maître de la Passion de Darmstadt, *sainte Dorothée et sainte Catherine*, (MBAD).
©Photo MN Racine.
Figure 6

maître de la Passion de Darmstadt, *sainte Dorothée et sainte Catherine*, (MBAD).
©Photo MN Racine.
Figure 7

Dans la *figure 7*, à la partie du tableau limitée par le parallélogramme circonscrit à la représentation de la roue, nous avons essayé d’appliquer la transformation géométrique réciproque (affinité réciproque) $\mathcal{C}^{-1}$ de celle qui a été décrite précédemment de façon à obtenir un cercle (ou presque !) comme celui qui aurait pu être tracé sur la face avant (dans un plan frontal) du cube et qui aurait été une représentation en vue de face de la roue de S^{te} Catherine. L'image est un peu floue car il a fallu rajouter des pixels !

Représenter une sphère devient réalisable (*figure 8*). Il est important de remarquer qu’en général, on ne « voit » pas en même temps le pôle nord et le pôle sud d’une sphère lorsqu’elle est représentée en perspective cavalière.

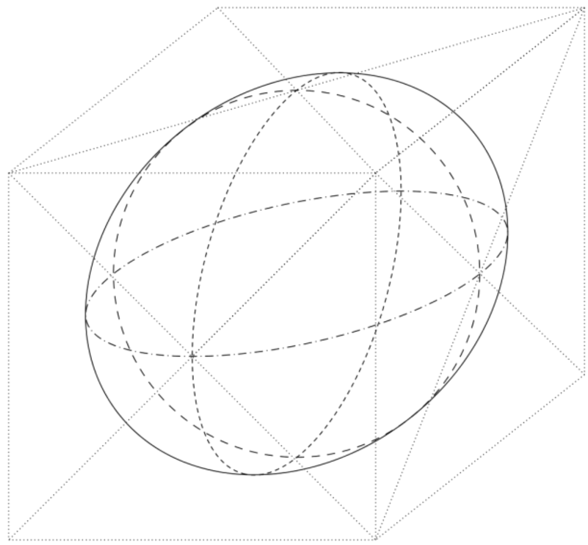


Figure 8
Sphère inscrite dans un cube.

Le contour apparent de la sphère, tracé ici en trait plein, est tangent aux cercles tracés sur la sphère. C'est encore une ellipse qui, sauf exception, n'est pas un cercle. Les 3 « cercles » en pointillés sont les translatés du cercle tracé sur la face avant et de ses représentations, tracées sur la face supérieure et sur la face droite.

Démontrons maintenant que la transformation géométrique qui transforme le cercle frontal en sa représentation sur une autre face du cube est une affinité dont l'axe est l'arête commune aux deux faces et dont la direction est la droite qui passe par les centres des deux faces.
Prenons l'exemple de la face supérieure : l'axe de l'affinité est la ligne de terre (AT) et sa direction la droite (ON).

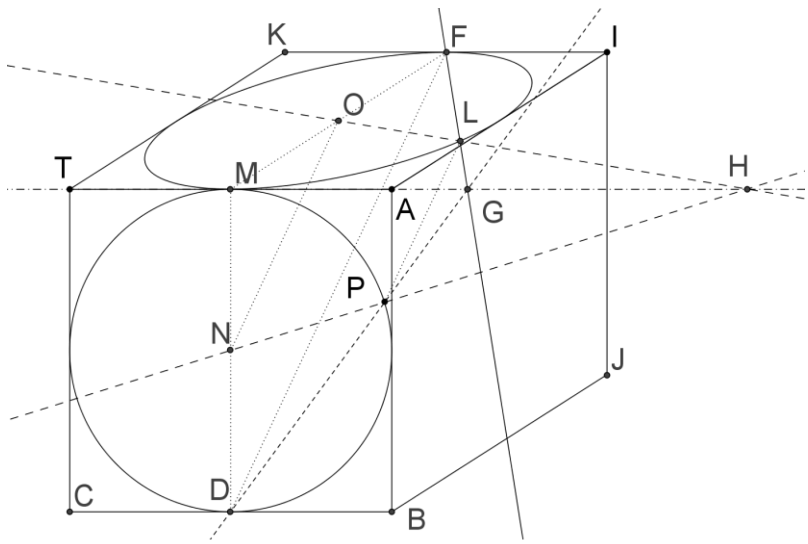


Figure 9

L'image de N, centre du cercle $\mathscr{C}$, point d'intersection des diagonales de ABCT, est le point O, point d'intersection des diagonales de ATKI.
L'image de D, milieu de [CB] est le point F, milieu de [KI].

Le point P décrit le cercle $\mathscr{C}$.

(DP) coupe l'arête (AT) en G. L'image de (DP) est (GF)
(NP) coupe l'arête (AT) en H. l'image de (NP) est (HO).
L'image L de P est à l'intersection de (FG) et (OH).
Lorsque P décrit le cercle $\mathscr{C}$, L décrit l'image du cercle $\mathscr{C}'$.

Les points de la ligne de terre (AT) étant invariants, (AT) est l'axe de l'affinité.
(NO) et (DF) sont parallèles (théorème de la droite des milieux). La direction de l'affinité est (ON).
Comme les triangles MON et ALP sont homothétiques dans l'homothétie de centre H et de rapport $\frac{MH}{AH}$, (PL) est parallèle à (ON), ce qui termine la démonstration.

Voici, à titre d'exemples, d'autres représentations de cercles inscrits sur les faces d'un cube construit dans diverses perspectives cavalières (elles seront indiquées avec la notation PC(α ; k) où α, exprimé en degrés décimaux, désigne l'angle de projection et k le rapport de projection de la perspective cavalière).

Figure 10
PC(50° ; 0,73)

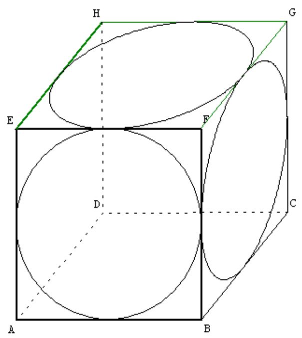


Figure 11
PC(90° ; 0,62)

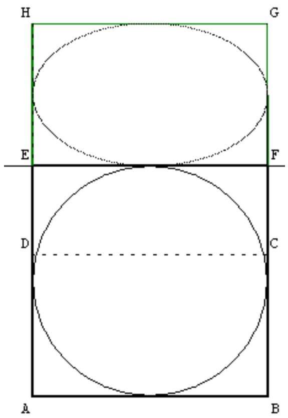


Figure 12
PC(30° ; 0,6)

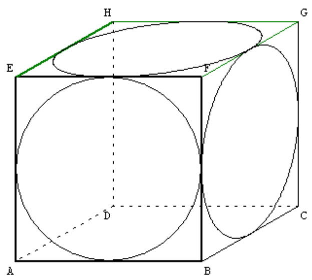
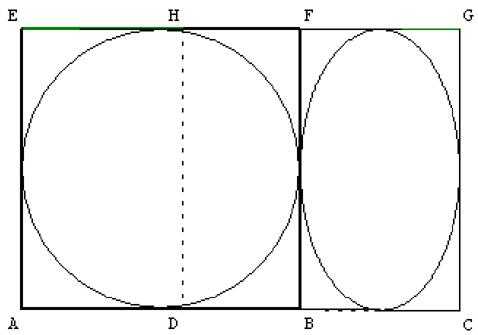


Figure 13
PC(0° ; 0,57)



MISE EN PAGE :
Françoise BESSE

COMITÉ DE RÉDACTION ET DE LECTURE :
Françoise BERTRAND
Catherine LABRUERE CHAZAL
Michel LAFOND
Alain MASCRET
Jean-François MUGNIER
Marie-Noëlle RACINE

RÉDACTEUR EN CHEF :
Catherine LABRUERE CHAZAL

DIRECTEUR DE LA PUBLICATION :
Catherine LABRUERE CHAZAL, Directrice de l'IREM

DÉPÔT LÉGAL :
n° 199 – 2e semestre 2011

IMPRESSION :
Service Reprographie

FEUILLE DE VIGNE
Université de Bourgogne – UFR Sciences et Techniques
IREM
9 Avenue Alain Savary – BP 47870 – 21078 Dijon cedex
☎ 03 80 39 52 30 – Fax 03 80 39 52 39
@ : iremsecr@u-bourgogne.fr.
http://math.u-bourgogne.fr/IREM