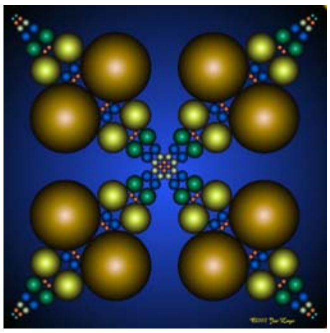
N° 96 – Juin 2005

Feuille de Vigne

Irem de Dijon

- Compression de texte.
- Album à colorier.
- Les fractions de Monsieur Farey.
- Femmes mathématiciennes dans l'histoire.
- Somme de diviseurs (suite).



Revue Trimestrielle

Issn 0246-5752

Editorial

Album à colorier, décompression… Détrompons-nous, il ne s'agit pas d'un cahier « spécial-vacances » glissé dans la Feuille de Vigne, mais bien d'un numéro de rentrée ! Et davantage encore puisque le cru semble de très bonne qualité.

N'appartenant pas à la famille des vins de garde, il conviendra donc de ne pas la déposer sur un rayonnage et l'oublier, mais bien au contraire d'en découvrir toute la palette des saveurs.

Si Michel Lafond nous étonnera toujours, Robert Ferachoglou ne manquera pas une nouvelle fois de nous instruire, et Marie Noëlle Racine abordera un sujet qui lui tient à cœur et qui annonce peut-être déjà d'autres réflexions sur les Filles et les Sciences.

A quand les données chiffrées sur la réalité en Bourgogne… A quand les données qui pourraient être la base de travaux statistiques dans nos classes, des calculs de moyenne aux problèmes d'adéquation en 1ère ES et 1ère S ?

A quand les collègues porté(e)s par cet élan, décideront-ils de créer en commun ex nihilo, une exposition itinérante sur les femmes et les mathématiques… L'IREM serait à la fois laboratoire et catalyseur. Sans doute les volontés, les synergies demandent à être développées en ce sens…
D'autres directions ne manquent pas, et l'IREM est sans doute le carrefour privilégié qui n'attend que votre passage (vos idées, votre participation) pour vous montrer que bien plus que Carrefour, il est aussi Rose des Vents qui vous aidera sur votre chemin.

P.S. On attend vos propositions d'articles pour les prochains numéros de la Feuille de Vigne.

Tristan DERAY

Sommaire

Articles

MISE EN PAGE :
Françoise BESSE

COMITÉ DE RÉDACTION ET DE LECTURE :
Daniel BEAU
Frédéric METIN
Marie-Noëlle RACINE

RÉDACTEUR EN CHEF :
Daniel BEAU

DIRECTEUR DE LA PUBLICATION :
Daniel BEAU, Directeur de l'IREM

N° D'ENREGISTREMENT :
1 496 ADEP

DÉPÔT LÉGAL :
n° 171 – 2ème semestre 2005

IMPRESSION :
Service Reprographie
Département de Mathématiques

FEUILLE DE VIGNE
Université de Bourgogne – UFR Sciences et Techniques
IREM
9 Avenue Alain Savary – BP 47870 – 21078 Dijon cedex
☎ 03 80 39 52 30 – Fax 03 80 39 52 39
@ : iremsecr@u-bourgogne.fr....
http://www.u-bourgogne.fr/irem

Bloc-notes

Cette rubrique vous informe des manifestations qui se dérouleront durant le prochain trimestre.

ACTIVITES 2005–2006 ORGANISEES PAR L'IREM DE DIJON

Les stages (ATTENTION, inscription avant le 15 septembre sur le site du Rectorat)

TITRE DU STAGE	ANIMATEUR(S)	DATES	LIEU
L'espace, représentations, sections, maths et art	M.N. RACINE J. TERRERAN D. MAGNIEN	10/11/05 04/05/06	IREM
Liaison classe de troisième/seconde en mathématiques	D. GARDES	10/11/05 17/01/06 24/03/06	Lycée de TONNERRE
Thèmes mathématiques au collège et au lycée	R. FERACHOGLOU & T. DE RAGO	16 & 17/11/05	IREM
Démonstration mathématique : éclairages historiques	P. REGNARD	22/11/05 02/03/06	IREM
L'Histoire des Maths comme outil didactique	F. METIN & P. GUYOT	23/11/05 30/03/06	NEVERS
L'Histoire des Maths comme outil didactique	F. METIN & P. GUYOT	24/11/05 29/03/06	AUXERRE
Probabilités en séries S et ES (nouveau programme)	R. FERACHOGLOU	30/11/05 15/12/05	IREM
Liaison classe de troisième/seconde en mathématiques	D. GARDES	01/12/05, 10/01, 02/03, 07/04, 12/05/06	Lycée de JOIGNY
L'Histoire des Maths comme outil didactique	F. METIN & P. GUYOT	01/12/05 07/04/06	CHALON
L'Histoire des Maths comme outil didactique	F. METIN & P. GUYOT	02/12/05 06/04/06	IREM
LE Q.C.M, un outil de formation et d'évaluation	D. GARDES	02/12/05 09/02/05	IREM
Thèmes mathématiques au collège et au lycée	R. FERACHOGLOU & T. DE RAGO	7 & 8/12/05	CHALON
Le raisonnement déductif : un enjeu majeur dans la formation mathématique	D. GARDES	8/12/05 28/02/06	IREM
Individualisation des apprentissages en mathématiques	D. GARDES	12/01/06 10/03/06	IREM
Modélisations mathématiques (collège-lycée)	R. FERACHOGLOU T. DE RAGO	07/03/06 30/03/06	IREM

Les formations

Les enseignant de l'Académie intéressés par ces formations peuvent s'inscrire à l'IREM qui, ES sur demande, enverra une convocation sous réserve d'accord du Chef d'établissement.
Les frais ne sont pas pris en charge

17 novembre 2005 Lieu : IREM, Faculté Sciences Mirande

Journée de formation organisée en collaboration avec l'IUFM de Bourgogne : **L'INTRODUCTION D'UNE PERSPECTIVE HISTORIQUE EN CLASSE - *Gérard HAMON***, *Professeur de Mathématiques au Lycée Ile de France à RENNES et* **Loïc LE CORRE**, *PLP Mathématiques/Sciences, L.P. Coëtlogon à RENNES, Animateurs à l'IREM de Rennes.*

Objectifs de la formation :
Favoriser l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement et la formation en mathématiques (lycée, collège, formation initiale et continue des enseignants)
Sensibiliser à l'histoire de la discipline et susciter une réflexion d'ordre historique et épistémologique sur les contenus.
Échanger des pratiques et débattre de quelques exemples d'utilisation pédagogique de textes historiques

Contenus :
Étude de textes anciens et leur contexte historique.
Présentation d'exemples de travaux réalisés en classe (Collège, Lycée, Lycée professionnel) et en formation continue.

Démarche pédagogique :
Exposés en séance plénière (matin), et débat.
Travaux en ateliers (après-midi) avec restitution plénière.

12 janvier 2006 Lieu : IREM, Faculté Sciences Mirande

Journée de formation organisée en collaboration avec l'IUFM de Bourgogne : ***DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES ET ENSEIGNEMENT* - *Denise GRENIER***, *Maître de conférences à l'Université de Grenoble, Directrice de l'IREM de Grenoble*

Objectifs de la formation :
Apporter aux formateurs une réflexion de nature didactique sur un problème d'enseignement des mathématiques

Contenus :
Quelques apports de concepts de didactique nécessaire à l'analyse du problème d'enseignement choisi

Démarche pédagogique :
Analyser, à l'aide d'outils didactiques, un problème d'enseignement des mathématiques (à l'école, au collège ou au lycée). Ce problème, qui peut être lié à l'enseignement de la démonstration, de la géométrie, de la recherche de problèmes en classe ou autre, sera déterminé ultérieurement.

23 mars 2006 Lieu : IREM, Faculté Sciences Mirande

Journée de formation organisée en collaboration avec l'IUFM de Bourgogne **:** ***INFORMATIQUE ET INTERNET : NOUVELLES PRATIQUES*, *Michel SOUCHET***, *Animateur du site Mathenpoche,* *Professeur de Mathématique au Collège A. Billaut à Nevers & **Gérard KUNTZ**, animateur à l'IREM de Strasbourg***.**

Objectifs de la formation :
Sensibiliser aux nouvelles pratiques de l'outil informatique, en particulier sur les sites associatifs comme Mathenpoche ou Sesamath.
Jeter les bases d'un groupe régional de recherche au sein de l'IREM et de l'IUFM.
Développer l'intérêt pour les logiciels libres et les sites collaboratifs.

Contenus :
Présentation du site Mathenpoche et des possibilités d'utilisation en ligne.
Exposés animés par des professeurs de l'Académie, autour d'utilisations d'Internet et de « tableaux virtuels »
Découverte des logiciels libres adaptés aux cours de mathématiques et des nouvelles créations pédagogiques.

Démarche pédagogique :
Exposés en séance plénière et débats.
Table ronde sur l'utilisation des TICE en classe.

INFORMATION COLLOQUES

Mardi 13 et Mercredi 14 Septembre 2005, (salle Dussane, École normale supérieure, 45 rue d'Ulm) :

"Science et enseignement. Accompagner une réforme"

Les conférences pédagogiques de 1904 et 1905, (mathématiques, physique, sciences naturelles, géographie)

Journées organisées par Hélène **GISPERT** (Université Paris XI-Orsay, GHDSO), Nicole **HULIN** (Centre Alexandre Koyré), Marie-Claire **ROBIC** (CNRS, E. H.-GO), avec la collaboration du Service Histoire de l'Éducation de l'INRP et le concours du Centre Cavaillès de l'ÉNS

Vendredi 30 septembre et samedi 1 octobre 2005, le Centre François Viète d'histoire des sciences et des techniques de l'Université de Nantes organise, avec l'appui de l'Université de **Nantes** et de l'ADERHEM, un colloque :

"Arts et Sciences au XVIème siècle"

Informations : http://www.sciences.univ-nantes.fr/cfv
Renseignements : evelyne.barbin@univ-nantes.fr

NOUVELLES ACQUISITIONS À LA BIBLIOTHÈQUE:

Actualisé le 02.06.05

Tout enseignant de l'académie peut emprunter des ouvrages à la bibliothèque

Les ouvrages :

▪ Ordinary differential equations	INCE	3209
▪ Produire et lire des textes de démonstration	Barbin	3211
▪ Rapport de jury –Concours 2004-Capes conc Interne & CAER	CNDP	3212

▪ Rapport de jury –Concours 2004-Capes conc Externe & CAFEP	CNDP	3213
▪ Rapport de jury –Concours 2004 PLP- conc Interne & CAER	CNDP	3214
▪ Rapport de jury –Concours 2004 PLP- conc Externe & CAFEP	CNDP	3215
▪ Rapport de jury –Concours 2004-Agregation Math.conc Interne & CAERDA	CNDP	3216
▪ L'univers des nombres	Stewart	3217
▪ La saga des calendriers ou le frisson millénariste	Lefort	3218
▪ La science au péril de sa vie	Simaan	3219
▪ Mathematics 1 - K7 vidéo- Théorème Pythagore, Tunnel Samos, Similitudes	CNDP	3220
▪ Rallye mathématique de Bourgogne 2005	Irem Dijon	3221
▪ Compte rendu Rallye Mathématique des collèges de C^ote d'Or 2005	Irem Dijon	3222
▪ Cours de mathématiques spéciales T.II de 1947 -Analyse	Commissaire	3223
▪ Cours de mathématiques spéciales T.III de 1947 – Calcul intégral	Commissaire	3224
▪ Cours de mathématiques spéciales T.IV de 1947 -Mécanique	Commissaire	3225
▪ Agrégation de mathématiques – cours d'analyse	Pommelet	3226
▪ Thèmes pour l'agrégation de mathématiques	Rombaldi	3227
▪ Histoire et philosophie des sciences –le rôle des mathématiques –cahier n°1	CGB –UB	3228
▪ Actes du colloque européen ITEM –Reims juin 2003	Inter-Irem	3229
▪ Alain CONNES –Médaille d'or 2004 CNRS –DVD	Dars	3230
▪ Le ciel à portée de main -50 expériences d'astronomie-12 maquettes	Causeret	3231
▪ Diathème-1ère STG -programme 2005	Didier	3232
▪ Math'x -1ère S – 2005	Didier	3233
▪ Diathème 6ème – 2005	Didier	3234
▪ Math'x – seconde – 2005	Didier	3235
▪ Modulo – 1ère S - 2005 – obligatoire & option	Didier	3236

Production des IREM :

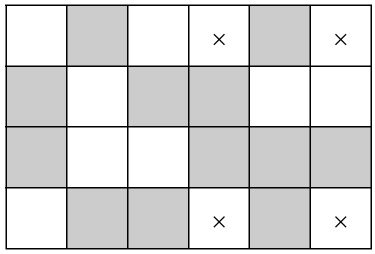
▪ Contes & énigmes pour raconter l'Histoire des Sciences (Fiches)	Irem Caen	B 5350
▪ La place du langage dans les apprentissages math à l'école-n°31	Irem Marseille	B 5351
▪ La place du langage dans les apprentissages math à l'école-n°31	Irem Marseille	B 5351
▪ Autour du signe "="	Irem Rennes	B 5352
▪ Quelques activités informatiques pour des classes de lycée	Irem Clermont	B 5353
▪ QCM: que cocher maintenant ?	Irem Clermont	B 5354
▪ Mathématiques Sciences Education autour de 1789 en Bretagne	Irem Rennes	B 5355
▪ De la terminale à la fac: langage et exigences en mathématiques	Irem Rennes	B 5356
▪ La démonstration au collège: quelles tâches? Quels outils?	Irem Rennes	B 5357
▪ La règle dans tous ses états –APMEP n° 165	Irem Montpellier	B 5358
▪ Procédés calculatoires en Chine ancienne	Irem Reims	B 5359
▪ Faire des math en classe?	ADIREM CNDP	B 5360
▪ Grand N n°75	Irem Grenoble	B 5361
▪ Thalès, quel théorème ?	Irem Dijon	B 5362
▪ Aires et intégrales	Irem Limoges	B 5363
▪ Contribution au nouvel élan: enseigner l'essentiel en math-n°1	Irem Lorraine	B 5364
▪ Aires	Irem Aquitaine	B 5365
▪ Entretien avec Nadine Brousseau / école Michelet	Irem Toulouse	B 5366
▪ Quelques exemples d'interface entre maths et conception architecturale	Irem Toulouse	B 5367
▪ La proportionnalité au collège	Irem Toulouse	B 5368
▪ Feuille de Vigne – n° 94	Irem Dijon	B 5369
▪ Feuille de Vigne – n° 95	Irem Dijon	B 5370

Jeux et Problèmes

Michel LAFOND, Lycée Le Castel à Dijon

JEU - 46.

Trouver un rectangle de 4 × 6 cases, chacune colorée en blanc ou noir, de telle sorte qu'il ne contienne aucun rectangle ayant ses 4 sommets unicolores.



La schéma proposé ne marche pas car il y a un rectangle "blanc".

PROBLÈME- 46.

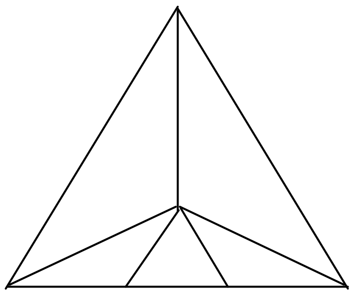
Démontrer dans l'ensemble des nombres réels l'implication :

$$\begin{cases} a + 2b \leq 3 \\ b + 3c \leq 4 \\ c + 4a \leq 5 \end{cases} \Rightarrow \quad \boldsymbol{a + b + c \leq 3}$$

Solutions des jeux du numéro précédent

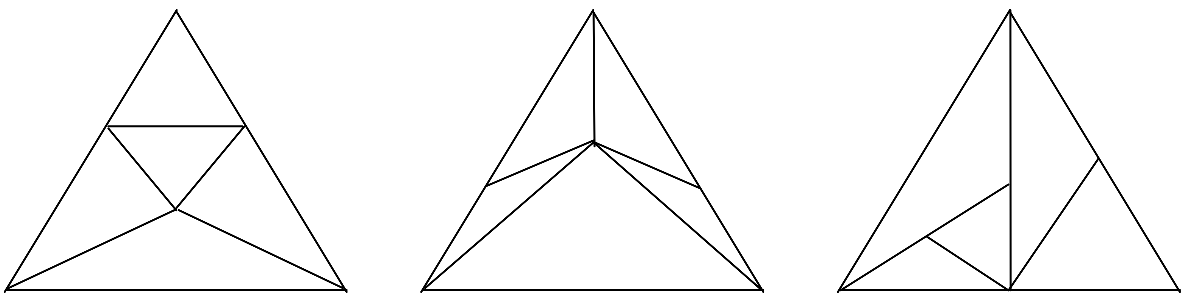
JEU - 45.

Il y a 4 manières de partager un triangle équilatéral en 5 triangles isocèles.
L'une d'elles est ci-contre, trouvez les 3 autres.



Solution :

Voici les 3 autres manières :



PROBLÈME- 45.

Avez-vous une bonne calculette ?

Démontrer que : $2985984^{2985984} \times 1679616^{1679616} = 4478976^{4478976}$.

[C'est la plus petite solution non évidente de $x^x\, y^y = z^z$ en nombres entiers]

Solution :

Posons

$$\begin{aligned} x &= 12^{6} = 2985984 \\ y &= 6^{8} = 1679616 \\ z &= 2^{11}\,3^{7} = 4478976 \end{aligned}$$

On a

$$x^x\, y^y = (12^6)^{12^6} \times (6^8)^{6^8} = ((2^2 \times 3)^6)^{12^6} \times ((2 \times 3)^8)^{6^8}$$

$$= (2^{12} \times 3^6)^{12^6} \times (2^8 \times 3^8)^{6^8} = (2^{12\times 12^6} \times 3^{6\times 12^6}) \times (2^{8\times 6^8} \times 3^{8\times 6^8})$$

$$= 2^{12^7 + 8\times 6^2} \times 3^{6\times 12^6 + 8\times 6^2} = 2^{2^{14}\times 3^7 + 2^{11}\times 3^8} \times 3^{2^{13}\times 3^7 + 2^{11}\times 3^2}$$

$$= 2^{2^{11}\,3^7(2^3+3)} \times 3^{2^{11}\,3^7(2^2+3)}$$

$$= \left(2^{2^{11}\,3^7}\right)^{11} \times \left(3^{2^{11}\,3^7}\right)^{7}$$

$$= \left(2^{11}\right)^{2^{11}3^7} \times \left(3^7\right)^{2^{11}3^7} = \left(2^{11}3^7\right)^{2^{11}3^7} = z^z$$

C Q F D

Compression de texte

Michel LAFOND, Lycée Le Castel à Dijon

Nous allons voir un algorithme (de David Huffman 1925-1999), qui permet de compresser n'importe quel texte écrit en français d'environ 15% en moyenne, et ceci sans perdre le moindre caractère ! C'est-à-dire qu'après décompression on retrouve le texte de départ sans perte d'information !

- Ceci semble paradoxal, car si à partir d'un texte de longueur N on peut en obtenir un de longueur 0,85 N, alors en itérant le processus de compression on pourrait parvenir à un texte arbitrairement court !

Le paradoxe est résolu en ce sens :
La quasi totalité de la littérature "ordinaire" sera effectivement compressée de 15% <u>en moyenne</u>.
Mais certains textes "inhabituels" ceux qui sont par exemple composés de mots contenant beaucoup de lettres rares comme WHISKY, seront peu compressés ou pire seront allongés par l'algorithme.
Les algorithmes de Huffman sont spécifiques à chaque langue, et celui qu'on va exposer pour le français ordinaire, compressera bien de 15% environ la quasi totalité des textes qu'on lit.
Voici une situation type :

	"TEL│PERE│TEL│FILS"	17 caractères
deviendra	"Z│ZE│PETCUIIGL"	14 caractères.

En musique l'algorithme MP3 (ou ses frères) supprime d'une musique une grande quantité d'informations complètement inutiles parce que l'oreille ne les perçoit pas ou peu. Mais ce qu'on obtient n'est pas la musique intégrale de départ qui est inaccessible à partir du seul fichier compressé.

Pour les images, l'algorithme JPEG (ou ses cousins) supprime également de l'information non pertinente avec évidemment une altération de l'image plus ou moins grande selon le taux de compression choisi.

- Pour un texte, les contraintes sont plus fortes, car il ne faut pas en perdre la moindre miette.

Pensons qu'un seul caractère erroné peut modifier complètement le sens d'un message.

D'abord, fixons <u>l'alphabet utilisé</u> : il est commode (pour le codage binaire) de prendre un alphabet dont le nombre de caractères est une puissance de 2. Habituellement c'est $2^8 = 256$ comme dans le code ASCII. Ce code permet à l'aide de 8 chiffres binaires d'écrire tous les entiers de 00000000 (le zéro décimal) à 11111111 (255 décimal). Ce qui permet de coder l'alphabet usuel des 26 lettres minuscules et majuscules, la ponctuation, les 10 chiffres etc. En général ça ne suffit pas : vérifiez par exemple sur votre ordinateur que dans la police "Times New Roman" il y a plus de 1100 caractères dont au moins 40 sortes de "a" !!! :

à á â ã ä å ā ă ą ậ ǻ ẫ ắ ằ ẳ ẵ ặ ạ ả ấ ầ ẩ   Ạ Ả Ấ Ầ Ẩ Ẫ Ậ Ắ Ằ Ẳ Ẵ Ặ A Á Â Ã Å Ā Ă Ą

Pour simplifier dans notre exemple, nous prendrons l'alphabet majuscule des 26 lettres non accentuées plus les 6 caractères :

"*BLANC*"	noté	|	servant de séparateur,
"*APOSTROPHE*"	noté	'	
"*POINT*"	noté	.	fin de phrase,
"*VIRGULE*"	noté	,	
"*TIRET*"	noté	-	le tiret peut servir aussi de parenthèse.
"*POINT D'INTERROGATION*"	noté	?	

Cela fait 32 caractères qu'on va coder dans un premier temps par un codage binaire ordinaire à 5 bits puisque $2^5 = 32$. Appelons ce codage BINAIRE-1

caractère	Code BINAIRE-1	caractère	Code BINAIRE-1
A	00000	P	10000
blanc	00001	Q	10001
B	00010	R	10010
C	00011	S	10011
D	00100	T	10100
E	00101	U	10101
F	00110	V	10110
G	00111	W	10111
H	01000	X	11000
I	01001	Y	11001
J	01010	Z	11010
K	01011	*apostrophe*	11011
L	01100	*virgule*	11100
M	01101	*tiret*	11101
N	01110	*point*	11110
O	01111	*interrogation*	11111

- C'est ici qu'intervient l'idée géniale de David Huffman, idée qu'il a eue lorsqu'il était étudiant au Massachussets Institute of Technology.

Le code BINAIRE-1 précédent utilise 5 bits par caractère ce qui est un peu bête quand on sait qu'en français ordinaire, 17 % des lettres sont des "E". Donc ce serait plus intelligent de coder les lettres fréquentes par des codes courts (comme 01 ou 010) et les lettres rares par des codes plus longs (comme 011011101) en jouant sur la fréquence des lettres de la langue qu'on veut coder, et en s'arrangeant pour qu'en moyenne le nombre de bits par caractère soit inférieur à 5.

En français ordinaire les lettres ont les fréquences suivantes (qui varient légèrement selon les textes qui ont été utilisés pour la statistique), classées de la plus fréquente à la moins fréquente :

	fréquence		fréquence		fréquence
E	0,144	D	0,033	*Virgule*	0,007
blanc	0,128	C	0,026	*tiret*	0,007
S	0,062	M	0,024	H	0,007
A	0,062	P	0,021	J	0,007
N	0,062	V	0,013	K	0,007
I	0,058	*apostrophe*	0,013	X	0,006
R	0,057	*point*	0,008	Y	0,006
T	0,057	Q	0,008	*interrogation*	0,006
U	0,049	B	0,007	Z	0,005
O	0,048	F	0,007	W	0,005
L	0,043	G	0,007		

La fréquence du "E" n'est que de 14 % et non de 17 % comme on le lit partout, parce qu'ici on prend en compte la ponctuation et le blanc.

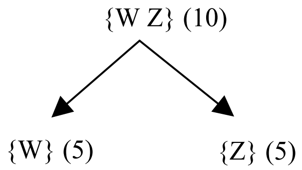
L'affectation des codes courts aux lettres fréquentes est optimisée lorsqu'on utilise l'algorithme de Huffman qui fonctionne ainsi :

On construit un arbre (dont les sommets seront des caractères ou groupes de caractères). Cet arbre sera binaire parce que de chaque sommet partiront deux branches. C'est cet arbre qui servira au codage compressé.
Chaque sommet de l'arbre sera accompagné de sa fréquence comptée en millièmes.
Au départ, les 32 sommets sont isolés (non connectés). On les connectera progressivement par fréquences croissantes. (Rappelons qu'un arbre est connexe par définition !).

Ainsi au départ on a {E} (144) {*blanc*} (128) {S} (62) -------- {Z} (5) {W} (5).

En bas de l'arbre **<u>on groupe les deux caractères les moins fréquents</u>** : ici W (5) et Z (5).
Ces deux sommets fils sont reliés à un sommet père qui prend le nom de la réunion des 2 sommets fils et dont la fréquence est la somme de leurs fréquences :

Départ de l'algorithme :

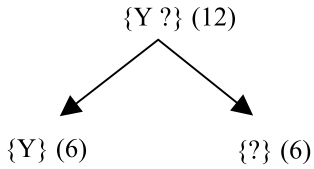


{*interrogation*} (6) {Y} (6)
{X} (6) {K} (7) etc.

L'alphabet transformé n'a donc plus que 31 "caractères" : {E} (144) ... {W Z} (10)

<u>On réitère cette étape tant qu'il reste des lettres isolées</u> :

Les 2 caractères les moins fréquents sont maintenant {Y} (6) et {*interrogation*} (6) d'où le nouveau sommet {Y ?} (12)



Les 2 caractères les moins fréquents sont maintenant {K} (7) et {X} (6) d'où le nouveau sommet {K X} (13) ;
ensuite on a {H} (7) et {J} (7) d'où le nouveau sommet {H J} (14);
ensuite on a {F} (7) et {G} (7) d'où le nouveau sommet {F G } (14);
ensuite on a {*virgule*} (7) et {*tiret*} (7) d'où le nouveau sommet {, -} (14);
ensuite on a {Q} (8) et {B}(7) d'où le nouveau sommet {Q B} (15);

On a la situation provisoire suivante (les fréquences sont classées au fur et à mesure) :

	Fréquence ×1000		Fréquence ×1000		Fréquence ×1000
E	144	O	48	{, -}	14
Blanc	128	L	43	V	13
S	62	D	33	*apostrophe*	13
A	62	C	26	{K X}	13
N	62	M	24	{Y ?}	12
I	58	P	21	{W Z}	10
R	57	{Q B}	15	*point*	8
T	57	{F G}	14		
U	49	{H J}	14		

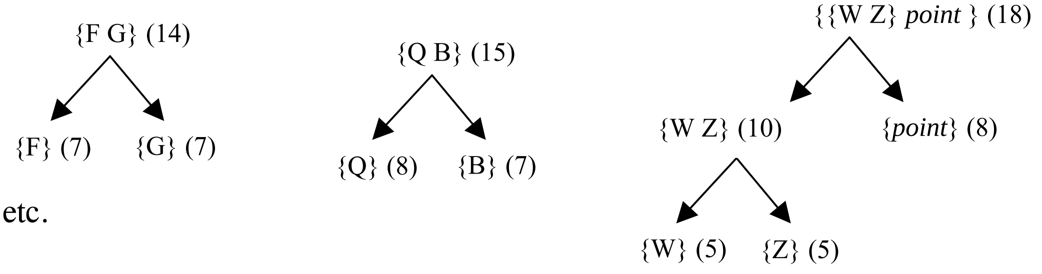
<u>Attention aux étapes suivantes</u> :

Les deux "caractères" les moins fréquents (voir la fin du tableau ci-dessus) sont maintenant {*point*} (8) et {W Z} (10) d'où le nouveau sommet {{W Z} {*point*}} (18);
Les deux "caractères" les moins fréquents sont désormais {Y ?} (12) et {K X} (13) d'où le nouveau sommet {{Y ?} {K X}} (25);
Les deux "caractères" les moins fréquents sont ensuite {V} (13) et {*apostrophe*} (13) d'où le nouveau sommet {V *apostrophe*} (26) = {V '} (26);
Les deux "caractères" les moins fréquents sont ensuite {, -} (14) et {H J} (14) d'où le nouveau sommet {{H J}{, -}} (28);

On a la situation intermédiaire suivante (les fréquences sont classées) :

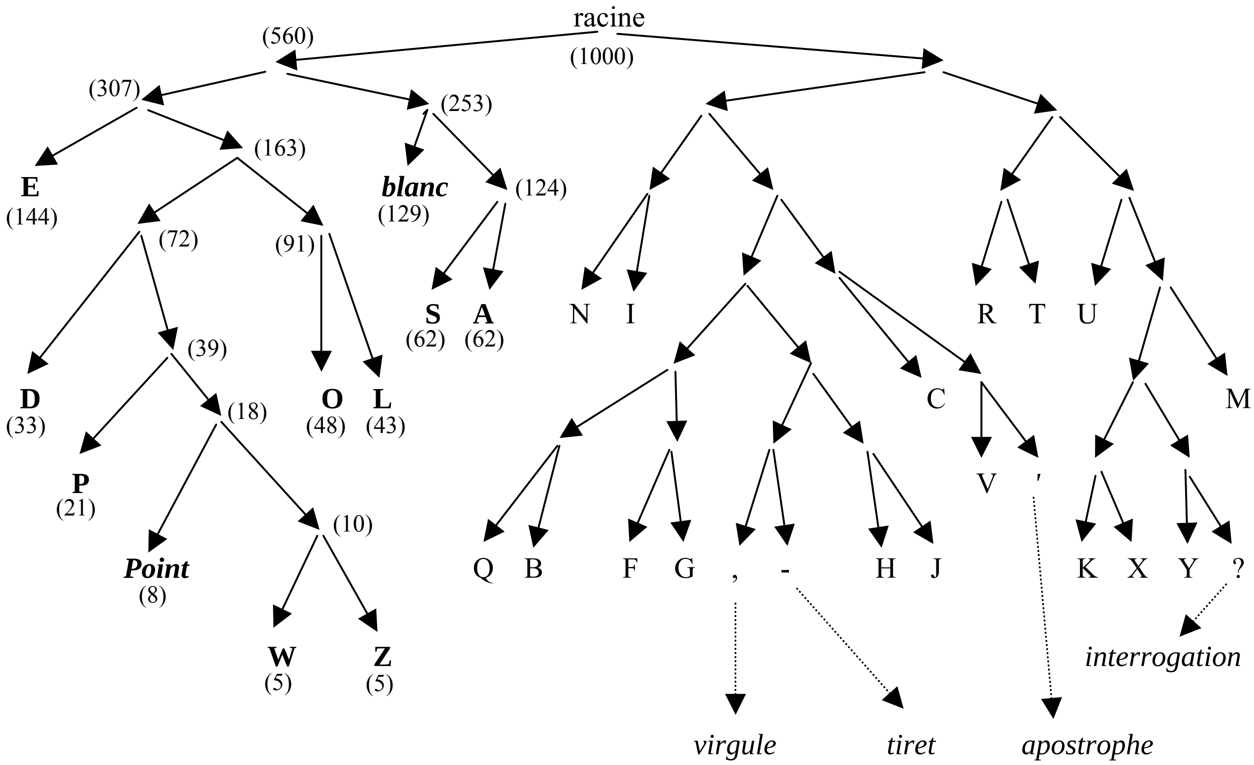
	Fréquence ×1000		Fréquence ×1000		Fréquence ×1000
E	144	O	48	{{W Z} *point}*	18
Blanc	128	L	43	{Q B}	15
S	62	D	33	{F G}	14
A	62	{{H J}{, -}}	28		
N	62	*{V apostrophe}*	26		
I	58	C	26		
R	57	{{K X}{Y ?}]	25		
T	57	M	24		
U	49	P	21		

L'arbre, se construit donc au fur et à mesure à partir du bas.
Actuellement, le bas de l'arbre a l'allure suivante :



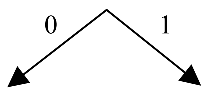
etc.

Voici ce qu'on obtient quand tout est fini :



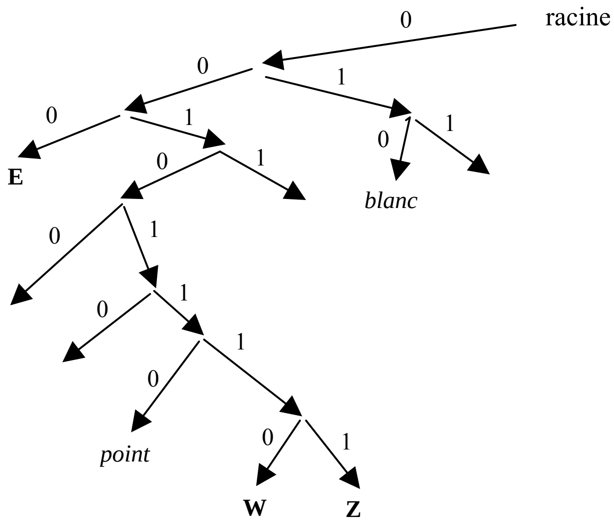
J'ai indiqué les fréquences ($\times$ 1000) uniquement dans la partie gauche de l'arbre.

Par construction la fréquence de chaque sommet non terminal est la somme des fréquences de ses deux fils, la fréquence de la racine est donc 1000, et plus un caractère est rare, plus il est situé bas dans l'arbre. On voit bien que pour économiser les chiffres binaires, il suffit de prendre comme longueur du code d'un caractère son niveau (profondeur) dans l'arbre.
C'est facile : on convient que pour chaque père, le fils gauche est codé 0 et le fils droit 1 :



Chaque branche est ainsi codée 0 ou 1, et on définit le **code BINAIRE-COMPRESSÉ** d'un caractère comme le nombre binaire obtenu en prenant dans l'ordre les bits des branches du chemin qui va de la racine de l'arbre au caractère (chemin qui est unique par définition d'un arbre).

Ainsi les 2 caractères les plus fréquents E et *blanc* seront codés respectivement 000 et 010.
W lui, sera codé 00101110.



Voici le tableau complet du codage binaire compressé :

Caractère	Code BINAIRE-COMPRESSÉ	caractère	Code BINAIRE-COMPRESSÉ
A	0111	P	001010
Blanc	010	Q	1010000
B	1010001	R	1100
C	10110	S	0110
D	00100	T	1101
E	000	U	1110
F	1010010	V	101110
G	1010011	W	00101110
H	1010110	X	1111001
I	1001	Y	1111010
J	1010111	Z	00101111
K	1111000	*apostrophe*	101111
L	00111	*virgule*	1010100
M	111111	*tiret*	1010101
N	1000	*point*	0010110
O	00110	*interrogation*	1111011

- On peut se demander pourquoi on ne prend pas le code 0 pour E puisque c'est le caractère le plus fréquent. De même on prendrait 1 pour *blanc* qui vient juste après etc.

Oui, mais il y a le <u>problème du décodage</u> !

Si pour compresser on prenait le codage disons : (E ; 0) (*blanc* ; 1) (S ; 00) (A ; 01) (N ; 11) etc. en suivant bêtement les fréquences, on serait bien embêté au moment de la décompression pour déchiffrer le message "0100110....." : en effet :
Le code commence par 0. Le début serait donc "E" ?
Mais ce même code commence par 01. Le début serait donc "A" ? etc.

On voit bien le problème : pour décompresser, il faut que dans le code BINAIRE-COMPRESSÉ, <u>**aucun code ne soit le préfixe d'un autre code**</u>**.**

Ceci est garanti par le fait que seuls les sommets terminaux de l'arbre (appelés aussi les feuilles de l'arbre) sont codés.

- Calculons le "Gain" réalisé par le codage BINAIRE-COMPRESSÉ.

Chacun des 32 caractères a la fréquence f_k et un nombre de bits B_k.

Donc le nombre moyen de bits par caractère est de $\sum_{k=1}^{k=32} f_k B_k = 4{,}306$.

Au lieu de 5 par le BINAIRE-1 ordinaire. Le gain est donc de 13,88 % en moyenne.
C'est-à-dire que pour tout texte respectant à peu près les fréquences données précédemment, (quasiment tous les textes en français) on aura un gain d'environ 14 % avec cette compression.

- RÉSUMONS : Le **protocole de la compression** est donc le suivant :

> - On part du texte clair (message M_0) supposé ne contenir que les 32 caractères sélectionnés.
>   On convertit chaque caractère de M_0 (avec les blancs) à l'aide de BINAIRE-COMPRESSÉ.
>   On obtient le message M_1 sous forme d'un nombre binaire.
> - On partage ce nombre M_1 en tranches de 5 bits à partir de la gauche.
>
> *Si le nombre de bits de la dernière tranche n'est pas multiple de 5, on la complète par des 0 ; cela donne un nombre binaire* M_1'
> - Enfin on convertit chaque tranche (5 bits) de M_1' en un caractère à l'aide de BINAIRE-1.
>   Cela donne le message final compressé : M_2.

Exemple : le texte clair est **M_0 = "TEL | PERE | TEL | FILS"**
On convertit à l'aide de BINAIRE-COMPRESSÉ :

T E L P E R E T E L F I L S

M_1 = "1101 000 00111 **010** 001010 000 1100 000 **010** 1101 000 00111 **010** 1010010 1001 00111 0110"

On partage ce nombre en tranches de 5 bits à partir de la gauche, la dernière tranche de 4 bits est complétée par un 0 :
M_1' = "11010 00001 11010 00101 00001 10000 00101 10100 00011 10101 01001 01001 00111 0110**0**"
On convertit chaque tranche de M_1' en un caractère à l'aide de BINAIRE-1 :

M_1' = "11010 00001 11010 00101 00001 10000 00101 10100 00011 10101 01001 01001 00111 0110**0**"
Z *blanc* Z E *blanc* P E T C U I I G L

Cela donne le message final compressé : **M_2 = "Z|ZE|PETCUIIGL"**

On est passé de 17 caractères dans M_0 à 14 caractères dans M_2. Ici, on gagne 17,6 %.

- On pourrait essayer de compresser à nouveau M_2. Mais en général, la seconde compression ne donne rien, car la première est optimisée.

- Remarque :
  Le message final M_2 ne commence jamais par un *blanc* et ne finit jamais par un *blanc*.

En effet : le *blanc* de BINAIRE-1 est codé astucieusement 00001.

M_1 ne peut pas commencer par 00001 puisque aucun code de BINAIRE-COMPRESSÉ ne commence par quatre 0.
M_1 ne peut pas finir par 00001 puisque :
- ou bien M_1 a été complété par un ou plusieurs 0 donc ne se termine pas par 1 ;
- ou bien M_1 avait un nombre de bits multiple de 5, mais 00001 n'est pas un code de BINAIRE-COMPRESSÉ.

- La décompression s'effectue sans problème. Exemple :

Le message compressé M_2 = "Z│ZE│PETCUIIGL" est codé avec BINAIRE-1. On obtient :
M_1' = "11010 00001 11010 00101 00001 10000 00101 10100 00011 10101 01001 01001 00111 0110**0**"
M_1' est décodé avec BINAIRE-COMPRESSÉ. On a vu que c'était possible de manière unique.
Bien entendu, si à la fin, les derniers 0 de M_1' ne correspondent à aucun code, c'est qu'ils ont été ajoutés pour obtenir un nombre de bits multiple de 5 et on les ignore purement et simplement.
C'est plus facile si on a le tableau BINAIRE-COMPRESSÉ classé par codes binaires croissants :

caractère	Code BINAIRE-COMPRESSÉ	caractère	Code BINAIRE-COMPRESSÉ
000	E	111111	M
010	*blanc*	0010110	*point*
0110	S	1010000	Q
0111	A	1010001	B
1000	N	1010010	F
1001	I	1010011	G
1100	R	1010100	*virgule*
1101	T	1010101	*tiret*
1110	U	1010110	H
00100	D	1010111	J
00110	O	1111000	K
00111	L	1111001	X
10110	C	1111010	Y
001010	P	1111011	*interrogation*
101110	V	00101110	*W*
101111	*apostrophe*	00101111	Z

Allons-y de gauche à droite :

M_1' = "1101000001110100010100001100000010110100000111010101001010010011101100".

1 n'est pas un code.
11 non plus.
110 non plus.
1101 correspond à T.
La suite 000 correspond à E . Puis 00111 correspond à L. Soit le début : "TEL"
Il reste après "TEL" : "010 001010 000 1100 000 010 1101 000 00111 010 1010010 1001 00111 01100"
qui est converti en ... │ PERE│TEL│FIL ...
Et enfin, en ignorant le 0 terminal, 0110 est converti en "S"
Nous retrouvons bien M_0 = "TEL │ PERE │ TEL │ FILS".

Bibliographie : TANGENTE Hors série Numéro 12.

Album à colorier

Françoise POISSON, Jean TERRERAN, Lycée de Sens

2nde (04-05)

Lors d'un stage « HISTOIRE DES MATHEMATIQUES », animé par Frédéric METIN et Patrick GUYOT, en 2004, nous avons découvert les démonstrations illustrées des propositions d'Euclide par BYRNE : « The éléments of Euclid » (édition 1847).
Il s'agit d'utiliser des couleurs pour faire apparaître les propriétés utiles à une démonstration.
On peut trouver de tels exemples sur le site :
http://www.math.ubc.ca/people/faculty/cass/Euclid/byrne.htm/
Nous avons choisi de mettre en place une activité s'inspirant de cette méthode ; elle vient après le cours sur les TRIANGLES en Seconde.
A l'origine elle était prévue pour l'AIDE INDIVIDUALISEE ; elle a finalement été testée dans deux classes de Seconde sur une séance de module d'une heure, une classe de 2nde Arts plastiques et une 2nde option SES.

Le matériel utilisé :

- une fiche 1 donnant la liste des configurations utiles à la résolution des deux exercices proposés ;
- une fiche 2 comportant deux exercices, le premier étant un exercice guidé ;
- des crayons de couleur (au moins quatre : rouge, vert, bleu et jaune) ;
- un transparent de la fiche 1 en couleur et un rétroprojecteur.

Déroulement de la séance :

Les élèves sont en binôme.
Premier temps (10 à 15 mn maximum) : travail sur la fiche n° 1.
On commente collectivement les configurations n° 1 à 4, les élèves coloriant au fur et à mesure leur version qui est en noir et blanc (coût des photocopies oblige…).
Pour la configuration n° 1, les élèves repèrent bien la propriété attendue
On leur donne alors la consigne de coloriage.
Ils adoptent le même principe pour la configuration n° 2.
Pour la suite, on précise que : « deux éléments (angles ou segments) sont de la même couleur si et seulement si leurs mesures sont égales ».
Ils appliquent ce principe à la configuration n° 3 sans difficulté.
Pour la configuration n° 4, il est nécessaire de les aider car peu connaissent cette propriété.
On les laisse ensuite colorier leur fiche en projetant le transparent en couleur au rétroprojecteur.

Deuxième temps (environ 30 mn) : résolution de l'exercice guidé.
Il faut d'abord rappeler les trois principes suivants :

1) « on ne colorie deux éléments de la même couleur que si l'on sait par hypothèse qu'ils sont égaux ou si on l'a justifié » ;
2) « à partir du moment où deux éléments sont de la même couleur, on peut se servir de leur égalité pour les questions suivantes » ;
3) « faute d'information, on laisse les éléments sans couleur.

Question 1) : aucun problème.

Question 2) a) : certains élèves colorient déjà en bleu les angles $\widehat{FBK}$ et $\widehat{FKB}$: leur rappeler la première consigne.

D'autres attribuent déjà une autre couleur à ces deux angles : leur rappeler la troisième consigne.

Question 2) b) et c) : l'obtention d'une équation où l'inconnue est une couleur les amuse

Question 2° d) : quelques élèves ont du mal à reconnaître la propriété… au milieu de tous les angles bleus.

Question 3) : pour l'écriture des rapports, la consigne semble moins claire aux élèves.

SVP : proposez-nous une meilleure formulation !

<u>Troisième temps (le temps restant) : résolution de l'exercice non guidé.</u>

Quelques élèves seulement ont le temps de terminer cet exercice.

Aux très rapides (!) on peut demander si le triangle POQ est rectangle.

En prolongement, on pourrait leur demander de rédiger le deuxième exercice (on ne l'a pas fait…).

Bilan :

Cette activité a plu aux élèves.

Elle a permis de donner du sens à certains « cas d'égalité » des triangles.

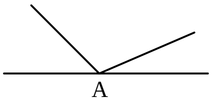
Le respect des consignes leur a mieux fait sentir ce que l'on appelle **la rigueur** dans une démonstration, notamment la nécessité de donner le bon argument au bon moment : « j'ai colorié cet angle en bleu parce que … ».

Cependant il ne faudrait pas que les élèves croient que cette technique les dispense d'apprendre le cours : elle s'appuie en effet sur une parfaite connaissance des configurations. Les résultats aux évaluations sont là pour leur rappeler cette dure réalité !

Fiche n°1

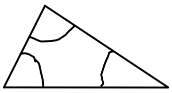
Liste des configurations utiles

n°1



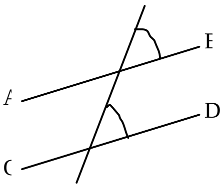
$\angle + \angle + \angle = 180°$

n°2



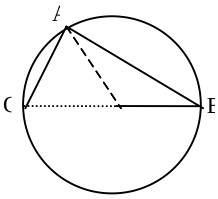
$\angle + \angle + \angle = 180°$

n°3



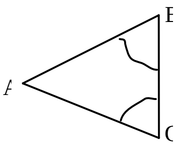
$\angle = \angle$ (AB) // (CD)

n°4



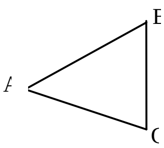
ABC rectangle : ______ = ... = - - - - - - -

n°5



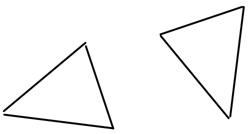
$\angle = \angle$ ABC isocèle en A

n°6



______ = ______ ABC isocèle de sommet A

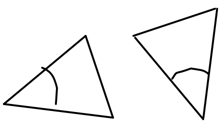
n°7



______ = ______
______ = ______
______ = ______

Les deux triangles sont isométriques

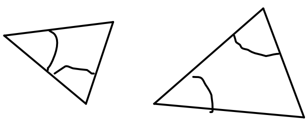
n°8



______ = ______
______ = ______
$\angle = \angle$

Les deux triangles sont isométriques

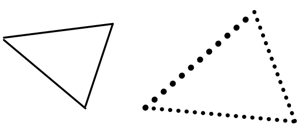
n°9



$\angle = \angle$
$\angle = \angle$

Les deux triangles sont semblables

n°10



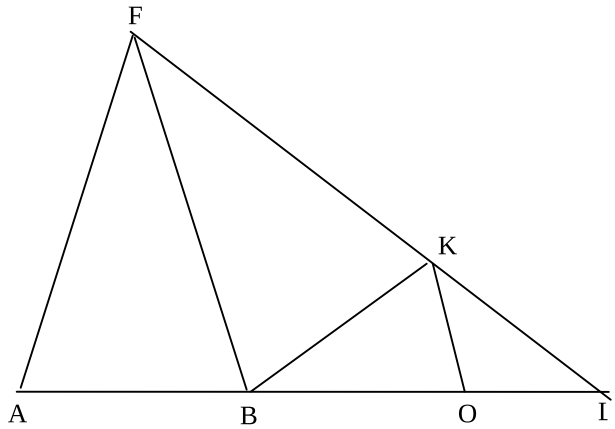
$\dfrac{\text{\_\_\_\_}}{\cdots\cdots} = \dfrac{\text{\_\_\_\_}}{\cdots\cdots} = \dfrac{\text{\_\_\_\_}}{\cdots\cdots}$

Les deux triangles sont semblables

Fiche n°2
Se munir de crayons de couleur.

Exercice guidé

Sur la figure ci-dessous :
• les triangles ABF et BFK sont isocèles de sommet F et OBK est isocèle de sommet B ;
  les points A, B, O et L sont alignés ;
• AF = 5 et AB = BO = 3.



Le but de cet exercice est de démontrer que les côtés [BF] *et* [OK] *sont parallèles et de calculer la longueur exacte de* KO.

1° a) Repasser en rouge tous les segments de longueur 5.
   Repasser en vert tous les segments de longueur 3.
  b) En observant ces couleurs, donner la propriété qui permet d'affirmer que les triangles ABF et BFK sont isométriques : ………………………………………………………….

2° ***Dans ce qui suit, on va colorier les angles < avec la couleur adéquate, sinon on laissera en blanc puis on reportera cette couleur sur la figure ci-dessus.***
  a) Colorier en bleu tous les angles égaux à $\widehat{FAB}$ et en jaune tous les angles égaux à $\widehat{AFB}$
  b) On veut savoir si l'angle $\widehat{OBK}$ doit être colorié en bleu, en jaune ou rester en blanc.
   Pour cela :
   dans le triangle ABF : < + < + < = 180° d'après …………
   pour les trois angles de sommet B : < + < + < = 180° d'après …………
   donc < = < : la couleur de $\widehat{OBK}$ est donc < .
  c) Les angles $\widehat{BKO}$ < et $\widehat{BOK}$ < sont de la même couleur d'après ……………
   dans le triangle BOK : < + < + < = 180° d'après ……….
   et pour les trois angles de sommet B : < + < + < = 180° (vu en 2°b)
   donc : deux fois l'angle < = deux fois l'angle <
   donc les angles $\widehat{BKO}$ et $\widehat{BOK}$ sont <
  d) $\widehat{FBA}$ < = $\widehat{BOK}$ <
   On en déduit que les côtés [BF] et [OK] sont ……………………… d'après ……………

3° Dans les triangles ABF et BKO : < = < et < = <

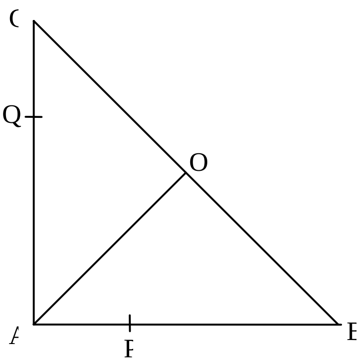
  Les triangles ABF et BKO sont donc …………………d'après ………………
Dans ce qui suit, colorier les pointillés avec la couleur adéquate (se reporter au 1°a))

Le trait noir "épais" représente KO : on peut écrire les rapports ci-contre : $\frac{}{\ldots\ldots} = \frac{}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

On a donc : $\frac{}{} = \frac{\ldots\ldots \times \ldots\ldots}{\ldots\ldots}$; en déduire la longueur KO.

Exercice non guidé

ABC est un triangle rectangle isocèle en A.
O est le milieu de [BC].
On place les points P sur [AB] et Q sur [AC] tels que AP = CQ.
Le but de cet exercice est de démontrer que le triangle OPQ *est isocèle de sommet* O.
1° Sur la figure ci-dessous, illustrer les données de cet énoncé en coloriant les segments de même longueur d'une même couleur.
2° a)En justifiant, colorier en bleu les angles aigus qui sont égaux.
b) On colorie le segment [AO] en .... d'après ....
c) Les triangles ABO et ACO sont .... d'après ....
d) On peut colorier d'autres angles en bleu : le faire et justifier.
3° Quelle propriété permet de justifier que les triangles OCQ et OAP sont isométriques ?
4° En déduire que le triangle OPQ est isocèle en O.



Les fractions de Monsieur Farey

Robert FERACHOGLOU, Lycée Le Castel à Dijon

I – Des fractions vérifiant « l'addition des cancres »

Le géologue anglais John Farey suggéra en 1816 de ranger dans l'ordre croissant les fractions irréductibles, comprises entre 0 et 1, et dont le dénominateur ne dépasse pas une valeur donnée. Par exemple, celles dont le dénominateur est inférieur ou égal à 5 se rangent ainsi :

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}.$$

Farey remarqua que dans une telle suite, si $\frac{a}{b}, \frac{e}{f}$ et $\frac{c}{d}$ sont trois termes consécutifs, alors le terme médian s'obtient à partir de ses deux voisins par « l'addition des cancres » : $\frac{e}{f} = \frac{a+c}{b+d}$.

D'autres propriétés simples sont également visibles lorsqu'on observe attentivement cette suite. Cependant Farey, qui n'était qu'un mathématicien moyen (et même un géologue quelconque, puisqu'il est aujourd'hui presque entièrement oublié en tant que tel), ne donna aucune preuve des résultats publiés. C'est Louis Augustin Cauchy qui démontra les propriétés en question ; ce dernier, bon prince, a conservé le nom de Farey attaché à ces suites de fractions.

Cet article propose de mettre en évidence quelques propriétés des suites de Farey, et d'établir les résultats mis en avant. Il peut constituer un matériau d'activités pour les professeurs de Collège qui souhaiteraient sortir des sentiers battus (apprentissage du calcul des fractions, géométrie, cercle) ; les professeurs de Lycée pourront y trouver les idées d'un devoir à la maison (de la Seconde à la Terminale S, en Arithmétique comme en Géométrie).

II – Propriétés des suites de Farey

1. Introduction

Définition et notation

> Pour $n \geq 1$, la n-ième suite de Farey est la suite, rangée dans l'ordre croissant, des fractions irréductibles comprises entre 0 et 1, dont le dénominateur ne dépasse pas n. On note F_n cette suite.
>
> (On convient que $0 = \frac{0}{1}$ et que $1 = \frac{1}{1}$.)

Voici les sept premières suites de Farey :

$$F_1 = \left(\frac{0}{1},\frac{1}{1}\right),$$

$$F_2 = \left(\frac{0}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{1}\right),$$

$$F_3 = \left(\frac{0}{1},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{1}\right),$$

$$F_4 = \left(\frac{0}{1},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{1}{1}\right),$$

$$F_5 = \left(\frac{0}{1},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{1}{1}\right),$$

$$F_6 = \left(\frac{0}{1},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{1}{1}\right),$$

$$F_7 = \left(\frac{0}{1},\frac{1}{7},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{2}{7},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{1}{2},\frac{4}{7},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{5}{7},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7},\frac{1}{1}\right).$$

Remarques et conjectures

En observant attentivement chacune de ces suites, un esprit curieux à peine aiguisé formulera sans peine les conjectures suivantes :

a) la fraction $\frac{1}{2}$ occupe la position médiane dans F_n ;

b) si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont deux termes consécutifs, alors $bc - ad = 1$;

c) si $\frac{a}{b}$, $\frac{e}{f}$ et $\frac{c}{d}$ sont trois termes consécutifs, alors $\frac{e}{f} = \frac{a+c}{b+d}$. (C'est l'addition des cancres.)

d) si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont deux termes consécutifs d'une suite de Farey, alors la première fraction qui apparaîtra entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ dans une suite de Farey ultérieure est la fraction $\frac{a+c}{b+d}$.

Nous allons dans la suite formuler et démontrer ces propriétés, ainsi que quelques autres.

2. De bien curieuses propriétés arithmétiques

Propriété 1

Pour tout $n \geq 1$, la fraction $\frac{1}{2}$ occupe la position médiane dans F_n .

Preuve

Si la fraction irréductible $\frac{a}{b}$ appartient à F_n, alors il est clair que la fraction « symétrique » $1 - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b}$ est comprise entre 0 et 1.

D'autre part, puisque $\frac{a}{b}$ est irréductible, a et b sont premiers entre eux. Alors, b et $b-a$ sont aussi premiers entre eux (car si d divise b et $b-a$, alors d divise leur différence : a). Ainsi la fraction $\frac{b-a}{b}$ est irréductible elle aussi, donc elle appartient à F_n.

Propriété 2

Pour tout $n \geq 1$, on a $F_n \subset F_{n+1}$ et, si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont deux fractions consécutives dans F_{n+1}, alors l'une au moins de ces deux fractions appartient aussi à F_n.

Preuve

Il est clair que $F_n \subset F_{n+1}$ d'après la définition de ces suites.

Si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont consécutives dans F_{n+1} il est impossible qu'elles soient toutes les deux absentes dans F_n car, si c'était le cas, on aurait forcément : $b = d = n+1$ et, comme les deux fractions sont consécutives, on aurait aussi : $c = a+1$.

Mais, comme à l'évidence : $\frac{a}{b} = \frac{a}{n+1} < \frac{a}{n} < \frac{a+1}{n+1} = \frac{c}{d}$, la fraction $\frac{a}{n}$, qui par définition appartient à F_n (donc à F_{n+1}), serait une fraction de F_{n+1} strictement comprise entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, qui sont pourtant consécutives dans F_{n+1}. C'est absurde.

Conclusion : l'une au moins des deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ appartient à F_n.

Propriété 3

Si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont deux fractions consécutives de la suite F_n, alors :

3.1. $bc - ad = 1$;

3.2. la fraction $\frac{a+c}{b+d}$ est irréductible et elle est comprise entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$;

3.3. la fraction $\frac{a+c}{b+d}$ est la première fraction qui va apparaître entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, dans une suite de Farey d'ordre supérieur.

Preuve par récurrence

- Si $n=1$, la vérification est immédiate avec les deux seules fractions de F_1, qui sont : $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{1}$.
- Supposons que les trois affirmations soient vraies pour la suite F_n.
- Soit alors $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, deux fractions consécutives de la suite F_{n+1}. Distinguons deux cas.

1^er^ cas : si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ appartiennent toutes les deux à F_n, on a $bc - ad = 1$ d'après l'hypothèse de récurrence.

2ème cas : si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ n'appartiennent pas toutes les deux à F_n, d'après la propriété 2, une des deux appartient à F_n et pas l'autre ; on peut supposer, par exemple, que $\frac{a}{b} \in F_n$ et $\frac{c}{d} \in F_{n+1} \setminus F_n$.

Soit alors $\frac{r}{s}$ la fraction irréductible suivant $\frac{a}{b}$ dans F_n ; on a, d'après l'hypothèse de récurrence :

$br - as = 1$ et $\frac{c}{d} = \frac{a+r}{b+s}$.

Or, $a+r$ et $b+s$ sont premiers entre eux d'après Bézout, car $b \times (a+r) + (-a) \times (b+s) = br - as = 1$.

Cela impose que la fraction $\frac{a+r}{b+s}$ est irréductible, et donc : $c = a+r$ et $d = b+s$.

Ainsi $bc - ad = b(a+r) - a(b+s) = br - as = 1$.

Nous avons ainsi établi dans tous les cas que $bc - ad = 1$. Cela prouve la propriété 3.1. au rang $n+1$.

D'autre part, $b \times (a+c) + (-a) \times (b+d) = bc - ad = 1$, ce qui montre d'après Bézout que la fraction $\frac{a+c}{b+d}$ est irréductible.

De plus, $\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{b(b+d)} = \frac{1}{b(b+d)} > 0$ et $\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{bc-ad}{d(b+d)} = \frac{1}{d(b+d)} > 0$.

Cela montre que $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. La propriété 3.2. est donc vraie au rang $n+1$.

Enfin, soit $\frac{r}{s}$ la première fraction irréductible qui va apparaître entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, dans une certaine suite (F_m), avec $m \geq n+2$.

Le système à l'inconnue (u,v) : $\begin{cases} au + cv = r \\ bu + dv = s \end{cases}$ a une solution unique dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} u = \dfrac{sc - rd}{bc - ad} = sc - rd \\ v = \dfrac{br - as}{bc - ad} = br - as \end{cases}.$$

Cela montre que *u* et *v* sont des entiers relatifs mais, comme $\frac{a}{b} < \frac{r}{s} < \frac{c}{d}$, on a $sc - rd > 0$ et $br - as > 0$. Donc *u* et *v* sont des entiers naturels non nuls.

Il en résulte en particulier que $bu + dv \geq b + d$, avec l'égalité seulement si $u = v = 1$.

Ainsi la première fraction à apparaître entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ est $\frac{r}{s} = \frac{au+cv}{bu+dv}$, mais la fraction $\frac{a+c}{b+d}$ est elle aussi comprise entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ et, son dénominateur étant inférieur ou égal à $bu+dv$, elle devrait apparaître dans une suite de Farey d'ordre inférieur ou égal.

$\frac{r}{s}$ étant la première, il en résulte que $bu+dv=b+d$, d'où $u=v=1$, et donc $\frac{r}{s}=\frac{a+c}{b+d}$.

Conclusion : $\frac{a+c}{b+d}$ est bien la première fraction qui va apparaître entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, dans une suite de Farey d'ordre supérieur. Cela prouve que 3.3. est vraie au rang $n+1$.
Voilà qui achève la démonstration.

Propriété 4

Si $\frac{a}{b}$, $\frac{r}{s}$ et $\frac{c}{d}$ sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une même suite de Farey, alors $\frac{r}{s}=\frac{a+c}{b+d}$, même si cette dernière fraction n'est pas irréductible.

Preuve

Comme $\begin{cases} br-as=1 \\ -dr+cs=1 \end{cases}$, il vient : $\begin{cases} r=\dfrac{a+c}{bc-ad} \\ s=\dfrac{b+d}{bc-ad} \end{cases}$.

Cela montre sans ambiguïté que $\frac{r}{s}=\frac{a+c}{b+d}$, même si $bc-ad\neq 1$.

Ce dernier cas est possible. Par exemple, dans F_3 avec les trois termes consécutifs $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$, on a bien $\frac{1}{2}=\frac{1+2}{3+3}$, mais la fraction $\frac{1+2}{3+3}$ n'est pas irréductible.

III – Les cercles de Ford

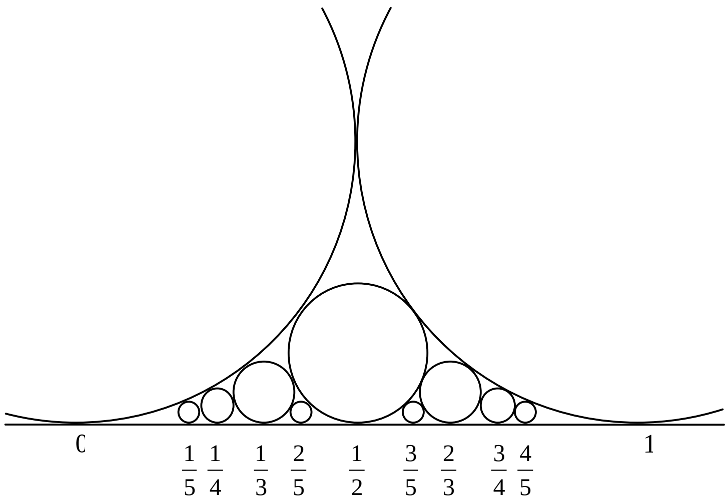
1. De quoi s'agit-il ?

Le mathématicien américain Lester Randolph Ford (1886-1975), spécialiste en théorie des nombres, se pencha à titre ludique sur les fractions de Farey. Il en donna en 1917 une propriété géométrique étonnante, que nous allons développer ci-après.

Définition

A chaque fraction dont la forme irréductible est $\frac{p}{q}$, on associe le cercle de centre le point de coordonnées $\left(\frac{p}{q},\frac{1}{2q^2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2q^2}$. C'est le cercle de Ford associé.

La figure suivante représente les cercles de Ford associés aux fractions de la suite de Farey F_5 .



Cela suscite un certain étonnement, et quelques conjectures, que nous allons démontrer.

2. Propriétés des cercles de Ford

Propriété 5

Tous les cercles de Ford sont tangents à l'axe (Ox).

Preuve

La distance à (Ox) du cercle associé à $\dfrac{p}{q}$ est égale à $\dfrac{1}{2q^2}$, qui est le rayon.
Cela montre que ce cercle est tangent à (Ox).

Propriété 6

Les cercles de Ford associés à deux termes consécutifs d'une même suite de Farey sont tangents entre eux.

Preuve

Considérons les deux cercles de Ford associés aux fractions $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$, consécutives dans une suite de Farey. Soit $A\left(\dfrac{a}{b},\dfrac{1}{2b^2}\right)$ et $B\left(\dfrac{c}{d},\dfrac{1}{2d^2}\right)$ leurs centres.

On a : $AB^2=\left(\dfrac{c}{d}-\dfrac{a}{b}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2d^2}-\dfrac{1}{2b^2}\right)^2=\dfrac{(bc-ad)^2}{b^2d^2}+\dfrac{(b^2-d^2)^2}{4b^4d^4}$, donc, compte tenu de l'égalité $bc-ad=1$: $AB^2=\dfrac{4b^2d^2+(b^2-d^2)^2}{4b^4d^4}=\dfrac{(b^2+d^2)^2}{4b^4d^4}$.

On en déduit : $AB=\dfrac{b^2+d^2}{2b^4d^4}=\dfrac{1}{2b^2}+\dfrac{1}{2d^2}$.

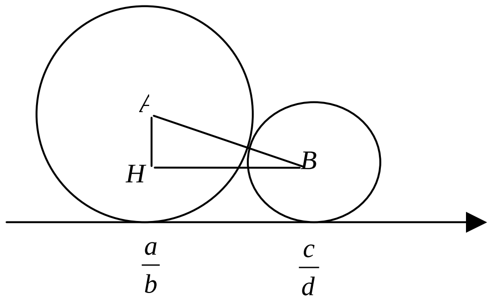
Cela montre que la distance des centres est égale à la somme des rayons, donc que les deux cercles sont tangents.

Propriété 7

> Réciproquement, soit deux cercles de Ford tangents entre eux, associés aux fractions irréductibles $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ (avec $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$).
>
> Alors $bc - ad = 1$. De plus, $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont deux termes consécutifs d'une même suite de Farey.

Preuve

Supposons que les deux cercles de Ford associés aux fractions irréductibles $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont tangents. Si A et B sont les centres de ces cercles, on a, dans le triangle rectangle AHB (voir figure ci-dessous) : $AH^2 + HB^2 = AB^2$.



Comme $AB^2 = \left(\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2d^2}\right)^2$, $BH^2 = \left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right)^2 = \frac{(bc-ad)^2}{b^2d^2}$ et $AH^2 = \left(\frac{1}{2b^2} - \frac{1}{2d^2}\right)^2$, on en tire :

$\frac{(bc-ad)^2}{b^2d^2} + \frac{(b^2-d^2)^2}{4b^4d^4} = \frac{(b^2+d^2)^2}{4b^4d^4}$.

Cela montre que $\frac{(bc-ad)^2}{b^2d^2} = \frac{(b^2+d^2)^2}{4b^4d^4} - \frac{(b^2-d^2)^2}{4b^4d^4} = \frac{4b^2d^2}{4b^4d^4} = \frac{1}{b^2d^2}$. Donc $(bc-ad)^2 = 1$, mais, comme l'inégalité $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ implique $bc - ad > 0$, on a en fait : $bc - ad = 1$.

Supposons par exemple que $b \le d$; alors $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ appartiennent toutes deux à la suite de Farey F_d.

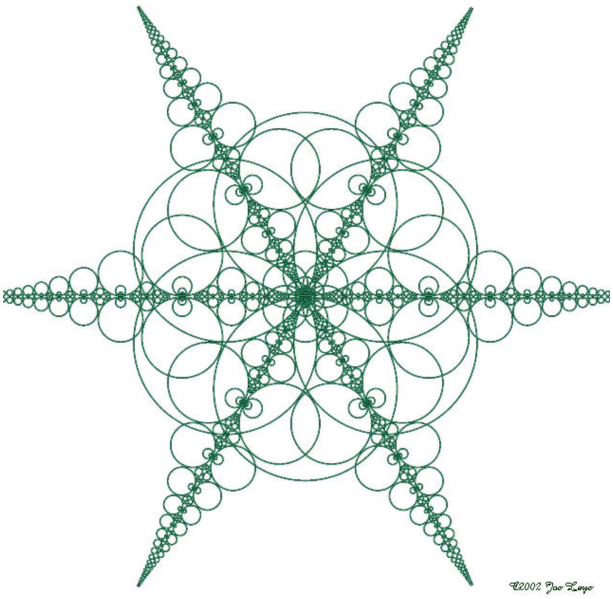
Si elles n'étaient pas consécutives, il existerait $\frac{r}{s} \in F_d$, avec $\frac{a}{b} < \frac{r}{s} < \frac{c}{d}$. On aurait $s \le d$ et il existerait deux entiers naturels non nuls u et v tels que $s = bu + dv$ (voir la démonstration du point 3.3. de la propriété 3).

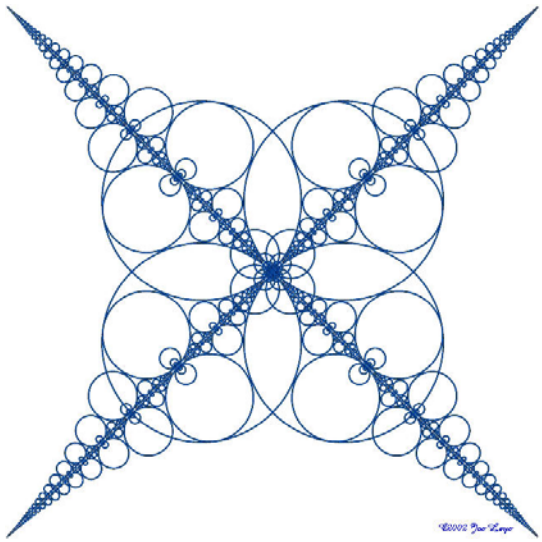
Alors $d < b + d \le ub + vd = s \le d$, ce qui est absurde.

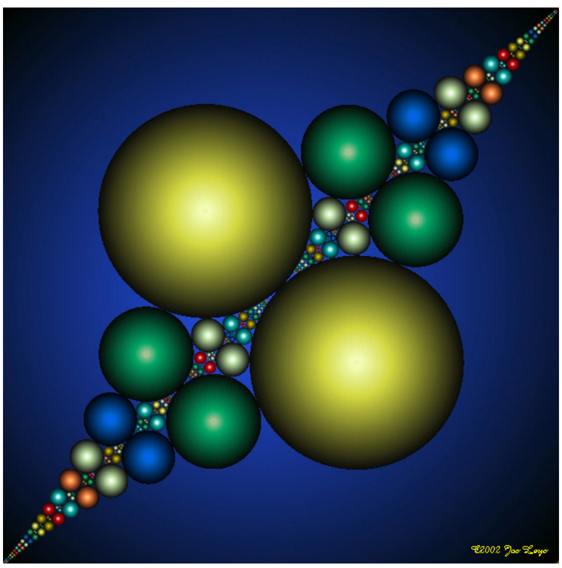
Conclusion : les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont bien consécutives dans F_d. On procède de même si $b \ge d$.

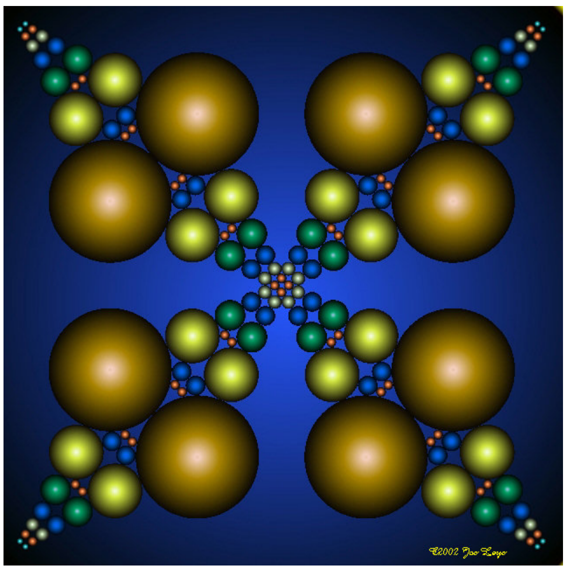
3. Avec les cercles de Ford : fractales et images

Les propriétés précédentes des cercles de Ford, et leur aspect fractal dès qu'on augmente la taille de l'entier n, ont inspiré certains artistes. Nous reproduisons ci-dessous quelques images de Jos Leys tirées de son site internet www.josleys.com.









IV – Les suites de Farey pour l'approximation

1. <u>Position du problème</u>

Les fractions de Farey, comme d'autres fractions particulières telles que les fractions continues, sont utilisées pour approcher ou encadrer certains nombres.
Elles ont l'avantage de comporter un dénominateur ne dépassant pas une valeur donnée, fixée par avance.
Elles se prêtent bien au calcul mental, puisque si un réel x est encadré par deux fractions de Farey consécutives $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, l'addition des cancres permet de déterminer une fraction intermédiaire : $\frac{a+c}{b+d}$, et donc de raffiner l'encadrement.
De plus, si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont consécutives et $\frac{a}{b} < x < \frac{c}{d}$, l'égalité $bc - ad = 1$ donne l'amplitude de l'encadrement : $\frac{1}{bd}$. L'erreur est donc connue et maîtrisée.

2. <u>Mise en ouvre</u>

Supposons que l'on veuille encadrer le nombre $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ par des fractions dont le dénominateur ne dépasse pas 20, on commence par encadrer x par deux termes consécutifs de F_2 : $\frac{1}{2} < x < \frac{1}{1}$. Puis à chaque étape, on calcule la fraction suivante par l'addition des cancres et on la positionne par rapport à x.

<u>*Etape 2*</u> : $\frac{1+1}{2+1} = \frac{2}{3}$ et $\frac{2}{3} < x < \frac{1}{1}$.

<u>*Etape 3*</u> : $\frac{2+1}{3+1} = \frac{3}{4}$ et $\frac{2}{3} < x < \frac{3}{4}$.

<u>*Etapes 4, 5, 6*</u> : on obtient successivement et mentalement les nouvelles fractions $\frac{5}{7}$, $\frac{7}{10}$ et $\frac{12}{17}$.

Finalement, l'encadrement voulu est : $\frac{12}{17} < x < \frac{5}{7}$. C'est le meilleur encadrement possible avec des fractions de dénominateur inférieur ou égal à 20. L'amplitude est de l'ordre de 0,0084, nettement inférieure à $\frac{1}{20}$.
Si l'on veut des fractions de dénominateur ne dépassant pas 100, on obtient les fractions suivantes.

Par défaut	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{12}{17}$	$\frac{41}{58}$	$\frac{70}{99}$
Par excès	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{17}{24}$	$\frac{29}{41}$	

On a donc établi très rapidement – et mentalement – l'encadrement : $\frac{70}{99} < x < \frac{29}{41}$ (le meilleur avec des dénominateurs de cette taille), d'amplitude $\frac{1}{41 \times 99} \approx 2,5 \times 10^{-4}$.

Remarque : on sait que les fractions continues ont aussi la propriété de réaliser des approximations fractionnaires d'un nombre, optimales en terme de taille de dénominateur. En fait les « réduites » successives obtenues par le développement en fractions continues sont certains des termes obtenus par la méthode des suites de Farey.

Sur l'exemple précédent, les réduites successives sont : $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{12}{17}, \frac{29}{41}, \frac{70}{99}$.

3. Application à l'approximation de certaines constantes astronomiques

Les problèmes de calendrier font intervenir des constantes dont l'approximation fractionnaire conditionne le rythme de certaines modifications périodiques (années bissextiles, jours ou mois « rajoutés », …). Les suites de Farey permettent de comprendre ces modifications ou d'en décider de nouvelles…

Exemple 1

Dans les calendriers solaires (comme le calendrier grégorien), la référence est le nombre de jours dans une année tropique. Ce nombre vaut $a = 365,242199...$.

Voici les premières fractions de Farey approchant le nombre $a' = a - 365 = 0,242199...$:

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{9},\ \frac{3}{13},\ \frac{4}{17},\ \frac{5}{21},\ \frac{6}{25},\ \frac{7}{29},\ \frac{8}{33},\ \frac{15}{62},\ \frac{23}{95},\ \frac{31}{128},\ \dots$$

On pourra justifier le rajout d'un jour tous les 4 ans, ou mieux : de 6 jours tous les 25 ans (ce qui correspond à 24 jours tous les 100 ans, et justifie la correction d'un jour par siècle…).

Une autre façon de voir les choses est de remarquer que : $\frac{6}{25} = \frac{24}{100} = \frac{25}{100} - \frac{1}{100} = \frac{1}{4} - \frac{1}{100}$. Cela justifie le rajout au calendrier d'un jour tous les 4 ans et le retrait d'un jour tous les 100 ans (1700, 1800, 1900 n'étaient pas des années bissextiles).

Exemple 2

Dans les calendriers lunaires (comme le calendrier musulman), la base de calcul est le nombre de jours l dans une lunaison. On a : $12l = 354,367056...$.

Voici les premières fractions de Farey approchant le nombre $l' = 12l - 354 = 0,367056...$:

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{8},\ \frac{4}{11},\ \frac{7}{19},\ \frac{11}{30},\ \frac{18}{49},\ \frac{29}{79},\ \dots$$

Le lecteur pourra retrouver et justifier le fait que le calendrier musulman comporte, sur 30 ans, 19 années « communes » de 354 jours et 11 années « abondantes » de 355 jours.

Exemple 3

Dans les calendriers luni-solaires (comme le calendrier chinois et le calendrier juif), le nombre référence est le nombre de lunaisons dans une année tropique : $m = 12,368267$.

Voici les premières fractions de Farey approchant le nombre $m' = m - 12 = 0,368267...$:

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{8},\ \frac{4}{11},\ \frac{7}{19},\ \frac{11}{30},\ \frac{18}{49},\ \frac{25}{68},\ \frac{32}{87},\ \frac{39}{106},\ \frac{46}{125},\ \frac{53}{144},\ \frac{60}{163},\ \frac{67}{182},\ \ldots$$

Même si ces calendriers sont beaucoup plus complexes, les lecteurs intéressés pourront se reporter à [3] et expliquer certaines particularités de ces calendriers à l'aide des précédentes fractions de Farey ; par exemple, dans le calendrier juif, la fraction $\frac{7}{19}$ permet de justifier le cycle de Méton de sept années embolismiques de 13 lunaisons sur 19 ans. (Voir [3].)

V – Autres approches, autres pistes de recherche

1. <u>Représentation géométrique des suites de Farey</u>

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, convenons de représenter la fraction irréductible $\frac{a}{b}$ par le point de coordonnées (b,a) ou, ce qui revient au même, par le vecteur de composantes (b,a).
Les fractions de Farey de la suite F_n correspondent à certains points à coordonnées entières de la région définie par les contraintes : $0 \leq y \leq x \leq n$ (triangle de Farey). Si l'on note A_1, A_2, …les points correspondant aux fractions ordonnées de la suite F_n, alors les droites (OA_1), (OA_2), … sont rangées dans l'ordre croissant de leurs coefficients directeurs, qui sont justement ces fractions.

Avec ces conventions, les propriétés 3 et 4 des suites de Farey se traduisent ainsi :

<u>*Propriété 8*</u>

a) Si (OA_1) et (OA_2) sont deux droites consécutives d'un même triangle de Farey, alors l'aire du triangle OA_1A_2 est égale à $\frac{1}{2}$.
b) Si (OA_1) et (OA_3) sont deux droites consécutives d'un même triangle de Farey, alors la première droite qui va apparaître dans un triangle de Farey d'ordre supérieur est la droite (OA_2), où A_2 est défini par la règle du parallélogramme : $\overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_3}$.
c) Si (OA_1), (OA_2) et (OA_3) sont trois droites consécutives d'un même triangle de Farey, alors le point A_2' défini par la règle du parallélogramme $\overrightarrow{OA_2'} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_3}$ appartient à la droite (OA_2).
De plus, lorsque $A_2 = A_2'$, le parallélogramme $OA_1A_2A_3$ a une aire égale à 1.

<u>*Preuve*</u>

Tout découle de la remarque suivante : si A_1 et A_2 sont associés aux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ consécutives dans une suite de Farey, alors :

$$\text{aire } (OA_1A_2) = \frac{1}{2}\det(\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OA_2}) = \frac{1}{2}(bc-ad) = \frac{1}{2}.$$

Les vérifications suivantes sont laissées au lecteur.

On peut en fait associer à tout nombre réel positif t la droite d'équation $y = tx$, qui passe par l'origine, et cette correspondance est bijective. Les rationnels sont alors associés aux droites passant par au moins un point à coordonnées entières. Ainsi, la droite associée au rationnel $\frac{a}{b}$ (a et b entiers positifs) passe par le point (b, a) et, si le point à coordonnées entières de cette droite le plus proche de l'origine est (d, c), alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et la fraction $\frac{c}{d}$ est irréductible.

L'approximation d'un réel t compris entre 0 et 1 par des fractions de Farey peut être abordé géométriquement par le biais de cette représentation.
Nous ne creuserons pas ici davantage ce sujet. Le lecteur intéressé pourra se reporter à tout ouvrage présentant le « *codage sturmien des nombres* ». (Voir par exemple [4].)

2. Longueur d'une suite de Farey

Une fraction irréductible de dénominateur n, comprise entre 0 et 1, s'écrit $\frac{a}{n}$, avec $1 \leq a \leq n$ et a premier avec n. Le nombre d'entiers a vérifiant cette propriété est traditionnellement désigné par $\phi(n)$, où ϕ est l'indicatrice d'Euler. On obtient donc le résultat suivant :

Propriété 9

> La n-ième suite de Farey comporte un nombre S_n de termes égal à : $S_n = 1 + \phi(1) + \phi(2) + ... + \phi(n)$.
> (Le 1 initial est dû au fait que l'on dénombre les fractions 0/1 et 1/1.)

On peut vérifier ce résultat et visualiser les fractions correspondantes pour les premières valeurs de n, dans le tableau suivant.

Dénominateur n	Nouvelles fractions	Nombre $\phi(n)$	S_n = Nombre d'éléments de F_n
1	$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}$	$1+\phi(1) = 2$	2
2	$\frac{1}{2}$	$\phi(2) = 1$	3
3	$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$	$\phi(3) = 2$	5
4	$\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$	$\phi(4) = 2$	7
5	$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$	$\phi(5) = 4$	11
6	$\frac{1}{6}, \frac{5}{6}$	$\phi(6) = 2$	13
7	$\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$	$\phi(7) = 6$	19
8	$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$	$\phi(8) = 4$	23
9	$\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}$	$\phi(9) = 6$	29

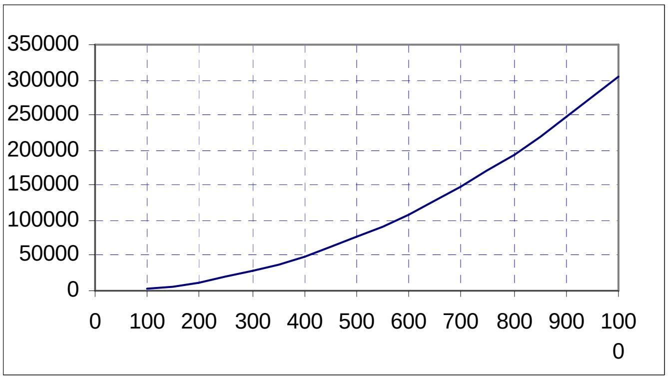
La dernière colonne laisse penser que le nombre d'éléments de F_n est premier, mais il n'en est rien, puisque, par exemple, F_{10} contient 33 fractions et F_{14} contient 65 fractions.

On sait calculer $\phi(n)$ pour tout entier n : $\phi(1)=1$ et, si un entier $n \geq 2$ admet pour diviseurs premiers distincts les nombres $p_1, ..., p_r$, alors $\phi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)...\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$.

(Par exemple, $\phi(240) = 240 \times \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = 240 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = 64$.)

En revanche, il n'existe pas de formule simple donnant la somme $1+\phi(1)+\phi(2)+...+\phi(n)$.
Cherchons-en empiriquement un équivalent asymptotique ; à l'aide du logiciel de calcul formel Maple, nous avons obtenu les résultats suivants.

n	$S_n = 1+\phi(1)+\phi(2)+...+\phi(n)$
100	3045
200	12233
300	27399
400	48679
500	76117
600	109501
700	149019
800	194751
900	246327
1000	304193
10000	30397487



Les valeurs de S_n et la représentation graphique de S_n en fonction de n laissent présager une dépendance quadratique : $S_n \sim kn^2$. En effet, les valeurs des différents quotients $\frac{S_n}{n^2}$ sont voisines, et toutes proches de 0,304. Or $\frac{3}{\pi^2} \approx 0,30396$.

Tout cela permet de conjecturer que, pour les grandes valeurs de n, $S_n \sim \frac{3}{\pi^2} n^2$.

Quel lecteur saurait démontrer ce résultat ?

Bibliographie

- [1] John Conway, Richard Guy, Le livre des nombres, Eyrolles.
- [2] Bulletin vert de l'APMEP, L'arithmétique, numéros spéciaux 432-433-434.
- [3] Jean Lefort, La saga des calendriers, Pour la Science, Belin.
- [4] Jean-Pierre Reveillès, Les nombres, Problèmes anciens et actuels, Le codage strurmien des nombres, Ellipses.

Remerciements

Je remercie tout particulièrement Marie-Noëlle Racine et Michel Lafond pour leur relecture sourcilleuse de cet article, ce qui a permis d'en gommer quelques erreurs et défauts.
Concernant la dernière phrase, en forme de question, Michel Lafond, qui ne résiste jamais à un défi, me fait part d'une remarque *à chaud* que je restitue sans commentaire :

« On démontre assez facilement (en prenant les parties entières des indices) que :

$S_n + S_{n/3} + S_{n/5} + S_{n/7} + S_{n/9} + S_{n/11} + \ldots = \dfrac{3n^2+6n}{8}$ *si n est pair et* $\dfrac{3n^2+8n+5}{8}$ *si n est impair,*

ce qui permet assez facilement d'aboutir à $S_n \approx \dfrac{3}{\pi^2}n^2$. *»*

Cela déplace le défi : qui vérifiera cette affirmation ?

Femmes mathématiciennes dans l'histoire

Marie-Noëlle RACINE, Lycée du Castel à Dijon

Le 20 janvier dernier, j'ai co-présenté une conférence sur les femmes mathématiciennes dans l'histoire.

L'idée était venue un an plus tôt, lors d'une réunion de concertation de notre IREM de Dijon : le directeur nous annonce qu'il a l'intention de faire venir une exposition sur les femmes mathématiciennes afin de donner des idées aux filles des lycées et collèges de l'académie, et de les inciter à se lancer dans des études scientifiques après le bac. Notre directeur souhaitait que des animateurs de l'IREM se déplacent dans les établissements de l'académie avec cette exposition. Idée logique : pour remplir l'université qui se vide de ses étudiants, il faut aller faire de la publicité en amont, dans les établissements vivier de notre université. Et puis surtout, les enseignants de l'université ont remarqué que les filles n'osent pas toujours se lancer dans des études longues et qu'elles n'ont, en général, pas confiance en elles. D'autre part, cette publicité à destination des filles touchera sans doute aussi quelques garçons. Mais, ... nous ne sommes que quatre professeurs présents à cette concertation ! Et oui, les réunions de concertation à l'IREM de Dijon ne sont pas très fréquentées par les collègues ! Alors, qui va aller faire un tour dans les lycées ? Quand ? Combien de fois ? Il faudra des contacts sur place qui organisent cette venue. Qui contacter ? Je propose alors d'organiser plutôt une réunion-formation-information. Régulièrement, les activités que nous organisons, conférences, débats, ... attirent vingt à trente professeurs de l'académie. Cela fera un vivier de professeurs qui pourront ensuite prévoir exposition, débats ou conférences diverses à leur guise, dans leur établissement. Cette journée comporterait deux parties, l'une sur les femmes mathématiciennes dans l'histoire, l'autre sur le comportement des femmes à l'heure actuelle face aux sciences et aux mathématiques en particulier. Faisant partie du groupe d'histoire des maths de l'IREM, je me charge d'animer la partie «les femmes mathématiciennes dans l'histoire» et, pour la seconde partie, je propose de faire appel à Gérard Bonneval, professeur dans un lycée d'Auxerre, animateur du groupe réfléchissant sur la filière SMS au sein de la commission lycée de l'APMEP. Gérard travaille depuis longtemps avec une association dijonnaise FETE (FEminin TEchnique) (1 rue Mozart, 21000 Dijon), association très active sur la promotion des carrières au féminin, sur l'observation du comportement des filles, observation de nos comportements à nous professeurs (hommes ou femmes), différents selon que nous nous adressons à des élèves filles ou à des garçons, association qui analyse aussi le contenu des livres de maths distribués aux élèves et notamment, analyse les énoncés, les mises en situation de personnages, les dessins qui agrémentent les manuels actuels. Je ne résiste d'ailleurs pas à l'envie de dire que nous mettons plus souvent en scène des garçons que des filles et que le choix des activités prévues pour les filles, les propos qu'on leur prête, sont la plupart du temps très stéréotypés et assez «conventionnels». Bref, revenons à la préparation de la matinée du 20 janvier.
Je dispose d'un créneau d'environ deux heures trente pour un exposé-atelier sur les femmes mathématiciennes dans l'histoire et je suis prévenue un an à l'avance. L'idée aura donc le temps de faire son chemin. Tout d'abord, je fais le point sur ce que je sais déjà du sujet. Depuis cinq ans que je fais partie d'un groupe qui travaille sur l'histoire des maths, j'ai entendu parler de quelques femmes qui ont jalonné cette histoire. Comme tout le monde, ou tout au moins comme beaucoup d'entre nous, j'ai entendu parler de Hypatie, fille de Théon d'Alexandrie, qui fut lapidée par les chrétiens parce qu'elle pratiquait l'enseignement des mathématiques. Comme tout

le monde, j'ai entendu parler de Maria Agnesi qui a donné son nom à une courbe. Comme tout le monde, j'ai entendu parler de Sophie Germain qui est entrée en contact avec Gauss sous le pseudonyme de M. Leblanc. Comme tout le monde, j'ai entendu parler de Sonia Kovalevskaïa mêlée à une histoire d'amour soi-disant prétexte au fait qu'il n'y a pas de prix Nobel de mathématiques. Comme tout le monde, j'ai entendu parler de Emmy Noether dont les travaux en algèbre ont fait qu'on a qualifié certains anneaux de noethériens. J'ai aussi des renseignements sur Emilie du Châtelet qui a traduit les *principia* de Newton et diffusé en France les idées de ce savant anglais, mais plus connue du public pour avoir été la tendre amie de Voltaire.

C'est déjà une base, je vais creuser la question, raconter des histoires ou détruire certains mythes. Je vais chercher des écrits de ces femmes et faire travailler les collègues sur les textes. J'envisage de replacer chacune d'entre elles dans son contexte historique, culturel, mathématique, car parler des femmes, ce n'est pas seulement parler de leur vie et raconter des anecdotes, mais c'est aussi placer leur vie et leur œuvre dans leur époque : situation géographique et contexte politique, économique, social, scientifique et philosophique, faire voir l'état de la recherche en mathématiques, évoquer les noms des mathématiciens qu'elles ont fréquentés, lus ou avec lesquels elles ont correspondu ou travaillé. Et puis surtout, parler des femmes c'est montrer leur travail, les textes qu'elles ont écrit ou les mathématiques qu'elles ont pratiquées. J'imagine que sur mon chemin je vais trouver d'autres femmes jalonnant l'histoire des mathématiques. Pour servir de support à mon propos, pour mieux situer les femmes dont je vais parler, j'ai en tête de réaliser une triple fresque : mettre en parallèle une frise qui rende compte des événements politiques ou culturels, qui pourrait être agrémentée de citations d'auteurs des différentes époques, qui ont écrit à propos des femmes ; une seconde frise qui citerait les grands mathématiciens ou les grands développements des mathématiques de l'Antiquité au XXème siècle ; et enfin, un troisième axe sur lequel je placerais les noms des femmes que j'évoquerais. Il existe déjà des frises similaires, mais qui ne couvrent pas la totalité de la période depuis –700 jusqu'à nos jours, ou qui placent Thalès et Pythagore à la même distance que Cartan et Artin, alors qu'il y a 200 ans entre les deux premiers et que les deux derniers sont du même siècle. La frise que je veux concevoir devra respecter l'échelle des temps.

Je pense à tout cela, doucement durant l'été et, à la rentrée, je propose à une collègue, Michelle Jeannin, professeure retraitée, d'intervenir avec moi : elle avait déjà présenté, durant 45 minutes environ, en octobre 2000, une conférence sur les femmes mathématiciennes, où elle racontait leurs histoires. Ses sources avaient été internet, et plus précisément le site du collège de St Andrews (ce site a changé de nom, voir plus loin, j'en reparlerai), site qu'un de ses amis visitait régulièrement et dont il lui imprimait les renseignements donnés. Elle est tout de suite partante et nous programmons de nous revoir certains mardis matin pendant une heure ou une heure trente. Ces réunions nous ont permis de faire le point sur nos lectures diverses, sur l'avancement de nos recherches, nous ont permis de discuter de certains points de vue, de faire des choix parmi les informations que nous avions récoltées. Nous n'avons pas pu communiquer par internet parce que Michelle n'est pas encore connectée et qu'à ce moment-là, je suis en panne d'ordinateur. C'est donc la fille de Michelle, pas du tout mathématicienne, habitant à plus d'une centaine de kilomètres de là, qui consulte les sites anglais, fait traduire les pages par le traducteur (en ligne), imprime les renseignements et nous les envoie par courrier postal !...

Quels sites avons-nous consultés ? C'est facile de les trouver : sur le moteur de recherche «google», il suffit d'indiquer «femmes mathématiciennes». On vous propose alors une multitude de sites à consulter. Le plus important est celui du Agnes Scott collège, en anglais, mais google propose de vous traduire les pages en français. Cela donne quelque chose comme :

«La vie de Hypatia était un enrichi avec une passion pour la connaissance. Hypatia était la fille de Theon, qui a été considéré un des hommes les plus instruits à Alexandrie, Egypte. Theon a soulevé Hypatia dans un monde d'éducation. La plupart des historiens identifient maintenant Hypatia non seulement en tant qu'un mathématicien et scientifique, mais également en tant que philosophe.» (pour la version française), alors que la version originale en anglais était «The life of Hypatia was one enriched with a passion for knowledge. Hypatia was the daughter of Theon, who was considered one of the most educated men in Alexandria, Egypt. Theon raised Hypatia in a world of education. Most historians now recognize Hypatia not only as a mathematician and scientist, but also as a philosopher». A vous de voir si vous préférez le texte anglais ou sa traduction mot à mot ! Si vous tenez absolument à vous plonger dans un site en français, alors vous pouvez vous diriger vers le site de Mme Eveilleau. Ce professeur a repris quelques pages seulement du site agnesscott. Il est donc très partiel mais peut suffire pour une première approche et pour trouver quelques repères dans la vie des mathématiciennes citées. Vous pourrez trouver également quelques sites spécialisés, parlant d'une seule mathématicienne et des mathématiques qu'elle a pratiquées. En fait, ces sites ne nous ont rien appris de nouveau ou que nous n'ayons déjà lu quelque part, mais ils sont en général très bien illustrés, et je vous invite à les parcourir et à les faire découvrir à vos élèves.

J'ai parlé tout à l'heure du site de l'université de Saint Andrews, ce site a changé de nom, il n'est plus sous le vocable «Saint Andrews», vous devez désormais consulter celui de «Mac Tutor». Vous aurez de la même manière qu'auparavant les biographies des mathématiciens du monde entier, et bien d'autres choses encore ! Bonne navigation !

En ce qui concerne les livres que nous avons pu consulter, je citerai tout d'abord les classiques sur l'histoire des maths, à savoir :

- *mathématiques et mathématiciens* de Dedron et Itard, édité chez Magnard. Les auteurs ne citent que Hypathie (une phrase de 3 lignes), et la marquise du Châtelet (au détour d'une phrase).
- *Histoire des maths* de Jean-Paul Collette, édité au Québec chez VUIBERT/ERPI. L'auteur cite, dans une petite phrase, Hypathie, Maria Agnesi et Emmy Noether.

Quelle déception, évidemment de ne trouver dans ces ouvrages généraux que le nom d'une ou deux femmes, et encore, on parle d'elles sur le plan anecdotique et non pas sur le plan proprement des mathématiques. Une phrase sibylline, juste pour dire qu'elles ont existé, qu'elles ont pu travailler les mathématiques, mais on ne connaît pas davantage de textes qu'elles ont pu écrire. C'est assez frustrant.

Nous avons alors l'idée de consulter un ouvrage écrit par des femmes, *une histoire des maths* de Jeanne Peiffer et Amy Dahan, publié en format poche collection «points sciences» aux éditions du SEUIL. Il n'est question que d'Hypatie, 6 lignes qui résument bien sa vie et sa pensée, mais rien de vraiment consistant pour notre propos.

Alors, où trouver des renseignements sur les femmes mathématiciennes ?

Un ouvrage paraît fort à propos, il s'agit d'une réédition, des extraits d'un livre écrit au XIXème par un certain monsieur A.Rebière : les éditions du kangourou ont choisi de rééditer la partie *Mathématiciennes (de l'antiquité au XIXème)*. Vous y trouverez les noms de 90 femmes mathématiciennes, accompagnés de commentaires sur leur vie ou leur œuvre. Vous y trouverez aussi une bibliographie importante.

Un autre ouvrage a été, fort à propos aussi, acheté par la bibliothèque de Dijon : *une histoire des femmes de science en France de l'antiquité à la révolution*, écrit par Jean-Pierre Poirier, édité par les éditions Pygmalion/Gérard Watelet à Paris en 2002. Ce livre parle de quelques mathématiciennes, astronomes, physiciennes, etc.. Il raconte la vie de ces femmes et donne des indications sur leur œuvre.

Et puis, je ne voudrais pas terminer cette courte énumération d'ouvrages sans citer l'excellente brochure éditée par l'IREM de Besançon en 1993, résultat d'un travail mené par une professeure et ses élèves : *mathématiciennes, ces inconnues parmi d'autres*. Une première partie évoque des mathématiciennes dans l'histoire. Pour chacune d'entre elles, il est fait un compte rendu court, mais suffisamment détaillé et explicite, de l'époque, de la situation géographique des événements, de la personne et de son œuvre. Cet ouvrage est illustré par des cartes, des fac-similés de textes,

des reproductions de tableaux. Une deuxième partie regroupe des témoignages de femmes mathématiciennes aujourd'hui.
Ces trois livres peuvent être mis entre toutes les mains et je vous les recommande.
Il existe encore bien d'autres ouvrages qui parlent plus spécialement de telle ou telle, des livres, des romans, des articles. Je citerai notamment un roman sur la vie de Hypatie, écrit par Arnulf Zittelmann et publié aux éditions MEDIUM, je citerai aussi un article sur Sophie Germain, écrit par Amy Dahan Dalmedico, publié dans le livre les mathématiciens, aux éditions Belin.pour la science, en 1996.

On a du mal à retrouver des textes mathématiques écrits par des femmes. Certaines étaient des pédagogues plus que des chercheurs, elles ont surtout écrit pour transmettre un savoir à leur progéniture. D'autres ont travaillé dans l'ombre de leur mari et les écrits sont publiés sous le nom de l'homme, même si la publication, comme dans le cas du marquis de l'Hospital, se fait tardivement et que son épouse, la marquise, a terminé les travaux de son mari. Les femmes qui se sont lancées dans la recherche ont eu l'appui d'un homme pour se faire connaître et respecter dans un monde qui leur était hostile. La culture scientifique leur a été longtemps interdite, les préjugés étaient tels que les femmes qui ont pu percer ou dont l'histoire a retenu le nom, étaient des femmes hors du commun, qui se sont battues pour pouvoir étudier, pour pouvoir enseigner ou chercher. Elles ont dû affronter l'opinion publique ou la «faculté» farouchement opposée à l'intrusion des femmes dans ce milieu.
Alors, messieurs, c'est facile d'écarter les dames de la connaissance et ensuite, de leur tirer dessus à boulets rouges en disant, à l'instar de Jules Verne dans *Sans dessus dessous* : «étant donnée sa conformation cérébrale, il n'est pas de femme qui puisse devenir une Archimède et encore moins une Newton !» (propos cités dans *les maths & la plume* vol.2).
Alors mesdames, ne partons pas battues d'avance (certains tests prouvent que c'est souvent le cas). Les femmes ne réussissent pas moins bien que les hommes et Mme Anne THIERRY de l'association FETE a su nous en convaincre l'après-midi de ce jeudi 20 janvier 2005.

Mesdemoiselles, osez vous lancer dans des études scientifiques, vous le valez bien !
Mesdemoiselles, osez vous lancer dans des études scientifiques, vous y avez votre place, prenez-la !

Somme de diviseurs

(suite de l'article paru dans le n° 95)

Tristan DERAY, Lycée Hilaire de Chardonnet à Chalon s/Saône

§ 16

Nous avons donc d'excellents exemples de la proposition, dont il nous est impossible de douter, mais nous ne pouvons proposer de preuve. Bien des propositions mathématiques demeurent sans preuve, et ce bien que leur vérité soit exempte de doute. Dans cette recherche de vérité, ce n'est pas de manière fortuite que viendra à l'esprit, au sujet des sommes des diviseurs, la question de savoir s'il existe une suite récurrente en rapport avec les nombres pentagonaux. Je ne considère pas cette question difficile pour elle-même mais plutôt comme une conséquence, que j'expliquerai brièvement…

§ 17

J'ai été conduit à cette observation en considérant l'expression infinie :

$$s = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)\&\,c.$$

Expression qui développée, puis ordonnée suivant les puissances de x, peut s'écrire sous la forme : $s = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + x^{51} + x^{57} - \&c.$

où les nombres qui apparaissent dans les exposants sont ceux décrits précédemment, c'est-à-dire les nombres pentagonaux et la suite associée à ceux-ci antérieurement. De cette expression, il est facile d'extraire la suivante :

$$s = \&\,c. + x^{26} - x^{15} + x^7 - x^2 + x^0 - x^1 + x^5 - x^{12} + x^{22} - x^{35} + x^{51} - \&c.$$

§ 18

Je ne peux pas donner une démonstration rigoureuse de ces deux formules exprimant s, mais cependant, il n'est pas difficile de voir que si l'expression

$$s = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)\&\,c.$$

est développée, tous ses facteurs étant multipliés entre eux, les premiers termes de la suite qui en résultera sera : $s = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \&c.$

Les deux signes + et − apparaissent successivement par paires, et les exposants de x suivant les mêmes règles que celles déjà données. De plus en acceptant l'égalité de ces deux formules, les propriétés des sommes des diviseurs, que j'avais auparavant indiquées, peuvent être établies fermement.

§ 19

Si nous admettons comme établies les égalités

$$s = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)\&\,c.$$

et $\quad s = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + x^{51} + x^{57} - \&c.$

nous avons les logarithmes

$$ls = l(1-x) + l(1-x^2) + l(1-x^3) + l(1-x^4) + l(1-x^5) + \&c.$$

$$ls = l(1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \&c.)$$

En dérivant chaque membre des égalités, il viendra :

$$\frac{ds}{s} = -\frac{dx}{1-x} - \frac{2xdx}{1-x^2} - \frac{3x^2dx}{1-x^3} - \frac{4x^3dx}{1-x^4} - \&c.$$

$$\text{et} \quad \frac{ds}{s} = -\frac{dx - 2xdx + 5x^4dx + 7x^6dx - 12x^{11}dx - 15x^{14}dx + \&c}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \&c}$$

En multipliant les deux expressions par $-\frac{x}{dx}$, il vient :

$$-\frac{xds}{sdx} = \frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{4x^4}{1-x^4} + \frac{5x^5}{1-x^5} + \&c.$$

$$\text{et} \quad -\frac{xds}{sdx} = \frac{x + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + 12x^{12} + 15x^5 - 22x^{22} - 26x^{26} + \&c.}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \&c.}$$

§ 20

Pour montrer que ces expressions sont égales entre elles, transformons tout d'abord chaque terme de la première en une progression géométrique, et disposons ensuite cette infinité de progressions géométriques suivant les puissances de x de la manière qui suit :

$$\begin{array}{lcccccccccccc}
-\frac{xds}{sdx} = & x^1 & +x^2 & +x^3 & +x^4 & +x^5 & +x^6 & +x^7 & +x^8 & +x^9 & +x^{10} & +x^{11} & +x^{12} \\
 & & +2 & & +2 & & +2 & & +2 & & +2 & & +2 \\
 & & & +3 & & & +3 & & & +3 & & & +3 \\
 & & & & +4 & & & & +4 & & & & +4 \\
 & & & & & +5 & & & & & +5 & & \\
 & & & & & & +6 & & & & & & +6 \\
 & & & & & & & +7 & & & & & \\
 & & & & & & & & +8 & & & & \\
 & & & & & & & & & +9 & & & \\
 & & & & & & & & & & +10 & & \\
 & & & & & & & & & & & +11 & \\
 & & & & & & & & & & & & +12
\end{array}$$

§ 21

Si l'on regroupe ensemble pour chaque puissance de x les coefficients, nous obtiendrons :

$$-\frac{xds}{sdx} = x^1 + x^2(1+2) + x^3(1+3) + x^4(1+2+4) + x^5(1+5) + x^6(1+2+3+6) + \&c.$$

où il est manifeste que pour chaque puissance de x, les nombres qui apparaissent dans la somme formant le coefficient d'un x^n, sont les diviseurs de l'exposant du terme x^n.

Ainsi, le coefficient x^n sera la somme de tous les diviseurs de n, qui a été notée précédemment $\int n$. Par conséquent, la suite trouvée égale à $-\frac{xds}{sdx}$ sera :

$$-\frac{xds}{sdx} = x\int 1 + x^2\int 2 + x^3\int 3 + x^4\int 4 + x^5\int 5 + x^6\int 6 + \&c.$$

En posant $x = 1$, nous obtiendrons la suite des sommes des diviseurs de tous les entiers suivant leur progression naturelle.

§ 22

Désignons par t cette série, de sorte que $t = x^1\int 1 + x^2\int 2 + x^3\int 3 + x^4\int 4 + x^5\int 5 + x^6\int 6 + \&c.$

Comme $t = -\frac{xds}{sdx}$, nous aurons :

$$t = \frac{x^1 + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + 12x^{12} + 15x^5 - 22x^{22} - 26x^{26} + \&c.}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \&c.}$$

Ainsi, nécessairement le développement de ce quotient qui représente t, sera égal à la première.
Il est clair que la série obtenue pour t est récurrente, chaque terme de celle-ci est déterminé par les précédents

§ 23

Il est facile de trouver la suite récurrente, si nous identifions ces deux expressions de t et multiplions chaque membre par le dénominateur $1 - x - x^2 + x^5 + x^7 + \&c$ du quotient. Cela étant fait, on dispose les termes suivant les puissances de x comme indiqué ci-dessous :

$$\begin{array}{llllllllll}
x^1\int 1 & +x^2\int 2 & +x^3\int 3 & +x^4\int 4 & +x^5\int 5 & +x^6\int 6 & +x^7\int 7 & +x^8\int 8 & +x^9\int 9 & +x^{10}\int 10 \\
 & -\int 1 & -\int 2 & -\int 3 & -\int 4 & -\int 5 & -\int 6 & -\int 7 & -\int 8 & -\int 9 \\
 & & -\int 1 & -\int 2 & -\int 3 & -\int 4 & -\int 5 & -\int 6 & -\int 7 & -\int 8 \\
 & & & & & +\int 1 & +\int 2 & +\int 3 & +\int 4 & +\int 5 \\
= x^1 & = 2x^2 & = 0 & = 0 & = -5x^5 & = 0 & = -7x^7 & = 0 & = 0 & = 0
\end{array}$$

§ 24

Comme les coefficients des puissances de x doivent se correspondre dans chaque membre, il s'ensuit les égalités :

$$\int 1 = 1$$
$$\int 2 = \int 1 + 2$$
$$\int 3 = \int 2 + \int 1$$
$$\int 4 = \int 3 + \int 2$$
$$\int 5 = \int 4 + \int 3 - 5$$
$$\int 6 = \int 5 + \int 4 - \int 1$$
$$\int 7 = \int 6 + \int 5 - \int 2 - 7$$
$$\int 8 = \int 7 + \int 6 - \int 3 - \int 1$$
$$\int 9 = \int 8 + \int 7 - \int 4 - \int 2$$
$$\int 10 = \int 9 + \int 8 - \int 5 - \int 3$$
$$\int 11 = \int 10 + \int 9 - \int 6 - \int 4$$
$$\int 12 = \int 11 + \int 10 - \int 7 - \int 5 + 12$$

qui se ramène à

$$\int 1 = 1$$
$$\int 2 = \int (2-1) + \int 2$$
$$\int 3 = \int (3-1) + \int (3-2)$$
$$\int 4 = \int (4-1) + \int (4-2)$$
$$\int 5 = \int (5-1) + \int (5-2) - 5$$
$$\int 6 = \int (6-1) + \int (6-2) - \int (6-5)$$

$$\int 7 = \int (7-1) + \int (7-2) - \int (7-5) - 7$$
$$\int 8 = \int (8-1) + \int (8-2) - \int (8-5) - \int (8-7)$$
$$\int 9 = \int (9-1) + \int (9-2) - \int (9-5) - \int (9-7)$$
$$\int 10 = \int (10-1) + \int (10-2) - \int (10-5) - \int (10-7)$$
$$\int 11 = \int (11-1) + \int (11-2) - \int (11-5) - \int (11-7)$$
$$\int 12 = \int (12-1) + \int (12-2) - \int (12-5) - \int (12-7) + 12$$

§ 25

Il est clair que les nombres qui apparaissent, soustraits du nombre donné, afin de trouver la somme des diviseurs sont les nombres 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, etc. pour autant qu'ils n'excèdent pas le nombre donné, de telle sorte qu'une preuve de la règle décrite précédemment est donnée ici.
Il est ainsi manifeste que pour tout entier n :

$$\int n = \int (n-1) + \int (n-2) - \int (n-5) - \int (n-7) + \int (n-12) + \int (n-15) - \&c$$

Les termes se poursuivent aussi longtemps que les nombres précédés du symbole $\int$ ne soient pas négatifs.
De manière analogue, la suite récurrente originale donnée par cette règle ne devant pas non plus aller au delà.

§ 26

Si dans la formule trouvée, le nombre 0 apparaît, c'est-à-dire si n est un terme de la suite 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26 etc., alors la règle concernant les signes n'est pas modifiée. Dans ce cas le terme dans lequel figure le terme nul ($\int 0$) est égal au nombre n lui-même, que l'on devra écrire sous la forme $\int(n-n)$ dans la somme

$$\int n=\int(n-1)+\int(n-2)-\int(n-5)-\int(n-7)+\int(n-12)+\int(n-15)-etc$$

La règle proposée gardera dans ce cas toute sa validité.

Leonhard Euler
1754

Dans *L'Introduction à l'Analyse des Infiniment Petits (1748)*, Euler aborde l'études des partitions des nombres entiers (décomposition d'un entier en somme d'entiers positifs) : il remarque que le coefficient du facteur $x^n z^m$ dans le développement de $(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)....$ représente exactement le nombre de façons dont n peut être écrit comme une somme d'entiers positifs.

«§ **277**. Mais pour rendre toutes ces choses plus claires, prenons le produit suivant composé d'un nombre infini de facteurs.

$$(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)\ \&\ c.$$

lequel étant développé se change en cette fonction

$$\begin{aligned}
&1+z(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+\&c.)\\
&+z^2(x^3+x^4+2x^5+2x^6+3x^7+3x^8+4x^9+4x^{10}+5x^{11}+\&c.)\\
&+z^3(x^6+x^7+2x^8+3x^9+4x^{10}+5x^{11}+7x^{12}+8x^{13}+10x^{14}+\&c.)\\
&+z^4(x^{10}+x^{11}+2x^{12}+3x^{13}+5x^{14}+6x^{15}+9x^{16}+11x^{17}+15x^{18}+\&c.)\\
&+z^5(x^{15}+x^{16}+2x^{17}+3x^{18}+5x^{19}+7x^{20}+10x^{21}+13x^{22}+18x^{23}+\&c.)\\
&+z^6(x^{21}+x^{22}+2x^{23}+3x^{24}+5x^{25}+7x^{26}+11x^{27}+14x^{28}+20x^{29}+\&c.)\\
&+z^7(x^{28}+x^{29}+2x^{30}+3x^{31}+5x^{32}+7x^{33}+11x^{34}+15x^{35}+21x^{36}+\&c.)\\
&+z^8(x^{36}+x^{37}+2x^{38}+3x^{39}+5x^{40}+7x^{41}+11x^{42}+15x^{43}+22x^{44}+\&c.)
\end{aligned}$$

On peut donc s'assurer sur le champ par le moyen de ces séries de combien de différentes manières, un nombre proposé peut résulter d'un nombre donné de différents termes de la série 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c ainsi si l'on cherche, par exemple, de combien de différentes manières le nombre 35 peut être la somme de 7 termes différents de la série 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c., on cherchera dans la série qui multiplie la puissance z^7 la puissance x^{35}, & son coefficient fera voir que le nombre proposé 35, peut être de 15 manières différentes la somme de termes de la série 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c.

§.278

Si l'on fait $z=1$, & que l'on réduise en une somme toutes les puissances semblables de x, ou, ce qui revient au même, si on développe cette suite infinie

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)\ \&\ c.$$

il viendra $1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+6x^8+\&c.$ série dans laquelle chaque coefficient exprime le nombre des différentes manières dont 1'exposant de la puissance de x peut résulter par voie d'addition, des différents termes de la suite 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. L'on peut voir par là que le nombre 8 peut résulter de 6 manières par l'addition de différents nombres qui sont

$$\begin{array}{ll} 8=8 & 8=5+3 \\ 8=7+1 & 8=5+2+1 \\ 8=6+2 & 8=4+3+1 \end{array}$$

Mais l'on doit remarquer qu'il faut aussi tenir compte du même nombre proposé ; puisque le nombre des termes n'est point prescrit, et qu'ainsi l'on n'en exclut point l'unité.»

Dans cette étude, Euler introduit la notion de fonction génératrice associée à une suite (a_n) d'entiers positifs, comme étant la fonction $G(x)=\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et montre tout l'intérêt que peuvent représenter de telles fonctions dans l'étude des partitions :

« **§ 281**. Appliquons cette doctrine à un cas digne de notre attention, soit proposée l'expression $\dfrac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)\,\&\,c.}$ laquelle étant développée, donnera

$$\begin{aligned} &1+z(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+\&c.) \\ &+z^2(x^3+x^4+2x^5+2x^6+3x^7+3x^8+4x^9+4x^{10}+5x^{11}+\&c.) \\ &+z^3(x^6+x^7+2x^8+3x^9+4x^{10}+5x^{11}+7x^{12}+8x^{13}+10x^{14}+\&c.) \\ &+z^4(x^4+x^5+2x^6+3x^7+5x^8+6x^9+9x^{10}+11x^{11}+15x^{12}+\&c.) \\ &+z^5(x^5+x^6+2x^7+3x^8+5x^9+7x^{10}+10x^{11}+13x^{12}+18x^{13}+\&c.) \\ &+z^6(x^6+x^7+2x^8+3x^9+5x^{10}+7x^{11}+11x^{12}+14x^{13}+20x^{14}+\&c.) \\ &+z^7(x^7+x^8+2x^9+3x^{10}+5x^{11}+7x^{12}+11x^{13}+15x^{14}+21x^{15}+\&c.) \\ &+z^8(x^8+x^9+2x^{10}+3x^{11}+5x^{12}+7x^{13}+11x^{14}+15x^{15}+22x^{16}+\&c.)\ \ldots \end{aligned}$$

Nous pouvons donc nous assurer par le moyen de ces séries de combien de différentes manières un nombre proposé peut résulter par l'addition d'un nombre donné des termes de la série 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 &c. Si l'on demandait par exemple de combien de différentes manières le nombre 13 peut être formé par l'addition des nombres entiers; il faudra chercher le terme $x^{13}z^5$, dont le coefficient 18 fera voir que le nombre proposé 13 peut résulter par l'addition de cinq nombres entiers combinés entre eux de 18 manières.

§ 282. Si l'on fait $z=1$, & qu'on réunisse en une seule expression les puissances semblables de x, la fonction $\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\,\&\,c.}$ se transformera en cette série

$$1+x+2x^2+3x^3+5x^4+7x^5+11x^6+15x^7+22x^8+\&c.$$

dans laquelle chaque coefficient fait connaître le nombre de manières différentes dont l'exposant de la puissance contiguë peut résulter de l'addition de nombres entiers égaux ou inégaux entre eux, c'est-à-dire par exemple qu'on connaîtra par le terme $11x^6$ que l'exposant 6 peut être formé par l'addition de nombres entiers des onze manières suivantes

$6 = 6$	$6 = 3+1+1+1$
$6 = 5+1$	$6 = 2+2+2$
$6 = 4+2$	$6 = 2+2+1+1$
$6 = 4+1+1$	$6 = 2+1+1+1+1$
$6 = 3+3$	$6 = 1+1+1+1+1+1$
$6 = 3+2+1$	

On doit aussi remarquer que le même nombre proposé y entre une fois, puisqu'il se trouve contenu dan la série 1, 2, 3, 4, 5, 6 &c.
Ces recherches le menèrent au théorème d'Euler relatif aux nombres pentagonaux.

<u>**Théorème :**</u> $\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{\frac{n(3n+1)}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{\frac{n(3n-1)}{2}}$ qui est précisément l'expression introduite dans le § 17.

Euler avait par ailleurs établi que la fonction génératrice associée à la suite des sommes des diviseurs des entiers, $\sigma(n)$ était donnée par

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{1-x^n}$$

C'est encore précisément ce qu'il fait au § 19 en écrivant :

$$\big(G(x) =\big) \quad -\frac{xds}{sdx} = \frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^x}{1-x^n}$$

et en montrant au § 20 et § 21 que par ailleurs $-\frac{xds}{sdx} = \sum_{n=1}^{\infty}\sigma(n)x^n$ de sorte que

finalement : $G(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sigma(n)x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{1-x^n}$

On pourra alors retrouver sans grande difficulté le résultat dont l'origine semblait particulièrement mystérieuse :

En divisant par x chaque membre, il vient : $\frac{G(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{1-x^n}$ et alors pour $|x|<1$,

$$\int\frac{G(x)}{x}dx = -\int\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-nx^{n-1}}{1-x^n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\int\frac{-nx^{n-1}}{1-x^n}dx \quad (\,!\,)$$

et donc $\int\frac{G(x)}{x}dx = -\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1-x^n)$

et $\int\frac{G(x)}{x}dx = -\ln\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)\right)$

d'où l'apparition « naturelle » des nombres pentagonaux (! !).

Ainsi $\int \frac{G(x)}{x} dx = -\ln(1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} ....)$

En dérivant membre à membre il viendra

$$\frac{G(x)}{x} = \frac{-1 - 2x + 5x^4 + 7x^6 - 12x^{11} - \&c.}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - \&c.}$$

et $$G(x) = \frac{-x - 2x^2 + 5x^5 + 7x^7 - 12x^{12} - \&c.}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - \&c.}$$

et comme $G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) x^n$ en effectuant le produit en croix et en identifiant les coefficients de x^n, nous obtiendrons le théorème d'Euler :

Théorème : Soit n un entier naturel, alors

$$\sigma(n) = \sigma(n-1) + \sigma(n-2) - \sigma(n-5) - \sigma(n-7) + ... + (-1)^{k+1} \left[\sigma(n - \frac{3k^2 - k}{2}) + \sigma(n - \frac{3k^2 + k}{2}) \right]$$

avec $\sigma(k) = 0$ si $k < 0$ et $\sigma(0) = k$

A ceux qui auront trouvé quelque délectation à la lecture de ces résultats, indiquons ici encore qu'Euler obtint un résultat assez semblable dans l'étude des partitions des entiers.

Utilisant la fonction génératrice des partitions donnée au § 282 de *l'Analyse* :

$$G(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^n} = \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)}$$

et le théorème des nombres pentagonaux, il parviendra à établir le théorème d'Euler des partitions d'entiers :

Théorème : Soit n un entier naturel, et $p(n)$, le nombre de partitions de n, alors

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + ... + (-1)^{k+1} \left[p(n - \frac{3k^2 - k}{2}) + p(n - \frac{3k^2 + k}{2}) \right]$$