IREM DE DIJON

POT POURRI : ACTIVITÉS HISTORICO-MATHEMATIQUES

Pierre COLLAUDIN
Patrick GUYOT
Frédéric METIN
Marie-Noëlle RACINE
Philippe REGNARD
Jean TERRERAN

Février 2004

Illustrations de **David MAGNIEN**
Collège Les Bruyères - 71800 LA CLAYETTE -

Préface

Les membres du groupe DESCO <<Epistémologie et Histoire des Mathématiques>> de l'IREM de Dijon ont pour projet général l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques, afin de justifier aux yeux des élèves, et de leur permettre de mieux s'approprier, les diverses notions qu'ils doivent découvrir au cours de leur scolarité.

En effet, l'origine fondamentale des difficultés rencontrées dans l'enseignement actuel des mathématiques est l'absence de signification d'un savoir qui ne semble apporter des réponses qu'à des questions artificielles , cela malgré les diverses activités introductives, plus ou moins ad hoc, proposées dans les manuels scolaires. L'histoire des mathématiques montre que les concepts et les théories prennent sens à travers les problèmes qu'ils permettent de résoudre : le savoir mathématique n'est pas donné, il est construit à partir de problèmes naturels qui se sont posés à nos prédécesseurs.

Suivant cette piste pédagogique, six expériences, analysées dans cette brochure, ont été menées par certains des membres du groupe DESCO << Epistémologie et Histoire des Mathématiques>> de Dijon. Les thèmes d'étude proposés à la réflexion des élèves montrent que les concepts mathématiques abordés au lycée ne sont pas nés avec toute la netteté qu'on leur connaît aujourd'hui. Il n'est que de lire le travail de Marie-Noëlle Racine pour voir combien les élèves d'une classe de Seconde du lycée du Castel ont dû travailler pour reconnaître dans le texte de Monsieur de La Lande, les notions de statistique descriptive introduites dans une leçon antérieure, ou les travaux de chacun des cinq autres auteurs pour voir combien il a fallu déployer d'astuce géométrique pour pallier le manque de définition des concepts de nombre et de fonction. Il est certain que l'étude de textes anciens fait sentir que les mathématiques sont une matière vivante en évolution permanente, mais permet-elle aux élèves de mieux s'approprier les notions correspondantes du <<programme officiel>> ?

Ce qui est sûr c'est que la lecture du travail de Frédéric Métin m'a enfin donné l'envie de (re)lire Voltaire qui , depuis mes années lycée, me semblait être le maître du pensum !

Cette approche pédagogique mérite en fait d'être précisée par de nouvelles expériences, que le groupe DESCO, renforcé par deux nouvelles recrues, Jean Terreran et David Magnien, le petit jeune du groupe, se propose de développer au cours de l'année à venir, les thèmes des activités étant choisis parmi ceux que Pierre Collaudin avait travaillés et qui balaient un large pan des mathématiques.

La parution de cette brochure a été retardée par l'organisation du colloque de la commission inter-IREM, Epistémologie et Histoire des Mathématiques, qui se déroulera à Dijon les 13, 14 et 15 mai prochain, et dont le thème attirera, je l'espère, un grand nombre de participants.

Enfin, avec mes collègues et amis du groupe DESCO je dédie cette brochure à Pierre Collaudin qui nous a tragiquement quitté l'année dernière.

Daniel Beau
***Directeur de l'IREM de Dijon*.**

SOMMAIRE

DIRECTEUR DE PUBLICATION :
Daniel Beau, Directeur de l'IREM

MISE EN PAGE :
Alexandra PREVOTAT

DÉPÔT LÉGAL :
n°165 1 semestre 2004

ISSBN 2.9131353.05.06

IREM DIJON
Université de Bourgogne – UFR Sciences et Techniques
9 Avenue Alain Savary – BP 47870 – 21078 Dijon cedex
☎ 03 80 39 52 30 – Fax 03 80 39 58 56
@ : iremsecr@mail.u-bourgogne.fr
http://www.u-bourgogne.fr/IREM/

Introduction historique des nombres complexes

Pierre Collaudin,
Lycée Jeanne d'Arc Paray le Monial

Si le programme de terminale S demande d'introduire dans le chapitre des nombres complexes quelques éléments lui donnant une dimension historique, les raccourcis proposés m'ont toujours laissé penser que la résolution des équations du troisième degré dépassait les capacités de l'élève de Terminale. Ma seule approche étant liée aux groupes de permutations des racines d'un polynôme, je me suis toujours contenté de poser artificiellement les changements de variables classiques permettant d'obtenir la formule dite de Cardan.

Le travail qui suit a donc pour objet de présenter l'apparition des nombres imaginaires en évitant les raccourcis. Il s'appuie principalement sur l'ouvrage de Jérôme Cardan : l'*Ars Magna* de 1545et sur un extrait de l'*Algebra* de Bombelli de 1572.

Description du travail

Celui-ci s'est fait en trois temps :

- Tout d'abord un devoir de semaine sur un texte arabe présentait les résolutions d'équations du second degré à l'aide de figure géométriques planes. Cette activité cherchait à introduire la tradition grecque des grandeurs géométriques et donc de la résolution des équations du type $x^2 + 5x = 20$ comme combinaison d'aires de carré : x^2 , de rectangle : $5x$ qui ajoutées donnent une aire de rectangle : 20 avec une homogénéité des grandeurs manipulées dans l'équation, ici toutes sont des aires.

- Dans un deuxième temps nous avons travaillé ensemble en classe la résolution de l'équation $x^3 + 6x = 20$. Cherchant à obtenir la solution $\sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$ et ainsi de généraliser aux formules de Cardan.

- Dans un troisième temps nous sommes passés au cas $x^3 - 15x = 4$ conduisant par analogie à la solution $\sqrt[3]{\sqrt{-121} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{-121} - 2}$, et à l'aide de la recherche faites par Bombelli sur le calcul des trois racines cubiques, nous sommes alors retombés sur la solution évidente 4 de l'équation initiale. Ainsi nous avons, à la suite de Bombelli, introduit une quantité imaginaire ou impossible comme auxiliaire de calcul afin d'obtenir un résultat final tout à fait réel.

Les lignes qui suivent ont pour but de vous présenter les éléments ayant remplis les deux derniers temps de travail. Pour le travail sur les textes arabes j'ai utilisé des documents des IREM[1]

[1] M.A.T.H. tome 2 de l'IREM de Paris VII résolution d'une équation du second degré par Al-Khwarizmi

Repères historiques

Jérôme Cardan né en 1501 est le fils d'un juriste de Pavie, médecin, astrologue et mathématicien il est l'auteur entre autre de deux livres de mathématique : la *Practica Arithmeticae* (1539) et l'*Ars Magna* (1545).

Dans ce dernier ouvrage, Cardan aborde la résolution de l'équation cubique cas après cas. On attribue généralement la découverte de ce type de résolution à Scipion del Ferro (1465-1526) mais un autre mathématicien : Tartaglia (1500-1557) aurait repris ou redécouvert cette méthode et aurait cédé à la curiosité insistante de Cardan en lui révélant sa méthode à travers un poème. Cardan s'approprié alors cette découverte en la publiant donc dans l'*Ars Magna*.

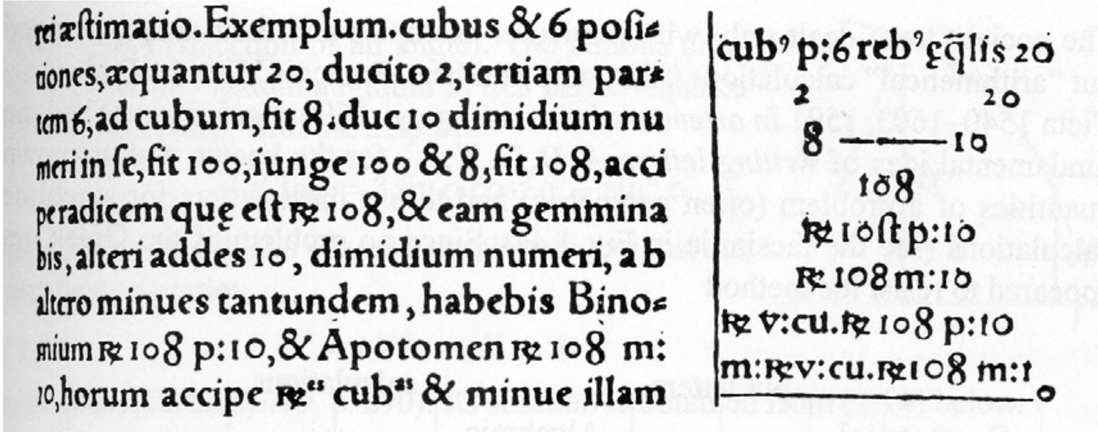
Il reprend la tradition arabe de l'interprétation géométrique des différents membres de l'équation.

Le texte de Cardan

Ainsi en traitant l'exemple $x^3 + 6x = 20$, Cardan recherche dans $x^3 + 6x$ une expression du type $(a+b)^3 - b^3$ ou encore un cube incomplet. Il propose la règle suivante pour résoudre l'équation :

> *Cube le tiers du coefficient de x ; ajoute lui le quarré de la moitié de la constante de l'équation; et prend la racine quarré du tout. Tu dupliques ceci, et à l'une tu ajouteras la moitié du nombre que tu as déjà quarré et de l'autre tu retrancheras la même moitié. Tu auras alors le " binomium[2]" et son " apotomen". Puis retranche la racine cubique de "l'apotomen " de la racine cubique du " binomium", ce qui restera sera la valeur de x.*
>
> *Par exemple :* $x^3 + 6x = 20$.
>
> *Cube* 2*, le tiers de* 6*, cela fait* 8*; quarre* 10*, la moitié de la constante; cela donne* 100*. Ajoute* 100 *et* 8*, cela fait* 108*, dont la racine quarré est* $\sqrt{108}$ *. Alors tu là dupliques : à l'une ajoutez* 10*, la moitié de la constante, et à l'autre retranche la même quantité.*
>
> *Alors tu obtiens le " binomium"* $\sqrt{108} + 10$ *et son " apotomen"* $\sqrt{108} - 10$ *. Prend leurs racines cubiques. Retranche la racine cubique de "l'apotomen" de celle du " binomium" et tu auras la valeur de x :* $\sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$.

[2] les termes binomium et apotomen font référence à l'œuvre d4euclide : livre X . proposition 74 "si une droite rationnelle est retranchée d'une droite rationnelle, cette droite n'étant commensurable qu'en puissance avec la droite entière; la droite restante sera irrationnelle, et sera appelée apotome." Le binôme représente la racine de la somme et l'apotome la racine de la différence.


rei æstimatio. Exemplum. cubus & 6 posi-
tiones, æquantur 20, ducito 2, tertiam par-
tem 6, ad cubum, fit 8, duc 10 dimidium nu
meri in se, fit 100, iunge 100 & 8, fit 108, acci
pe radicem quę est ℞ 108, & eam gemmina
bis, alteri addes 10, dimidium numeri, a b
altero minues tantundem, habebis Bino-
mium ℞ 108 p:10, & Apotomen ℞ 108 m:
10, horum accipe ℞ cu cub & minue illam

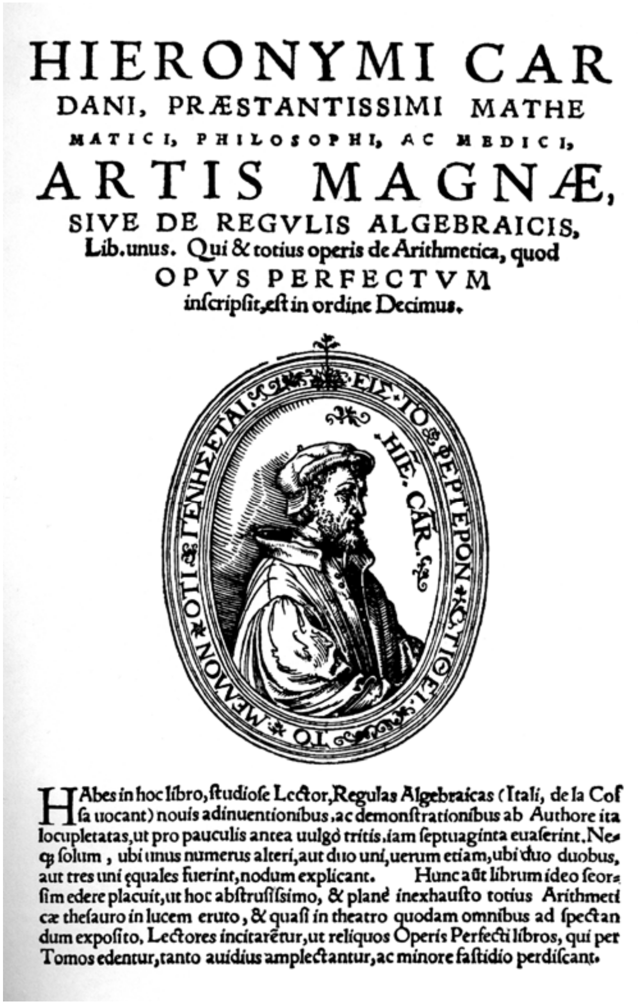
cub⁹ p:6 reb⁹ ęqlis 20
2 20
8 — 10
108
℞ 108 p:10
℞ 108 m:10
℞ v:cu.℞ 108 p:10
m:℞ v:cu.℞ 108 m:10

L'original latin du texte de Cardan

Pour justifier cette méthode, Cardan donne une explication correcte, mais difficile à comprendre :

Scipio Ferro de Bologne, il y a bien 30 ans découvrit cette règle et la confia à Antonio Maria Fior de Venise, qui à travers ses chicanes avec Niccolo Tartaglia de Brescia donna à Niccolo l'occasion de découvrir cette règle. Tartaglia me la confia en m'en cachant la démonstration. Aidé par cette solution, je mis la démonstration en forme. Ce fut très difficile. Ma version est la suivante : "

Suivent alors un texte et une figure plane d'un problème à trois dimensions, pour le rendre accessible j'ai retraduit le texte en langage plus algébrique et utilisé des figures plus compréhensibles.


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

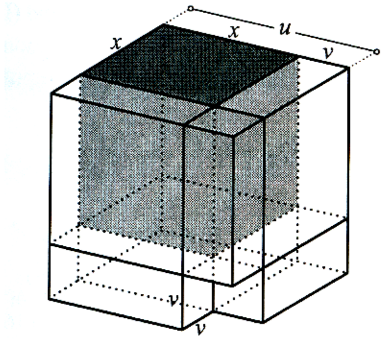
HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cosa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neq; solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni ęquales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarẽtur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

*Page de garde de l'*Ars Magna

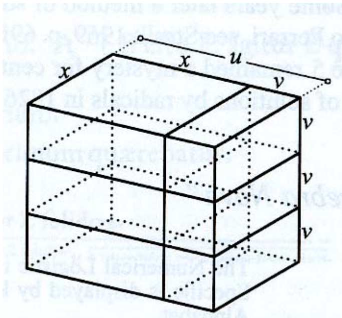
Adaptation du texte.

Découpons un cube d'arête $u = x + v$ en 8 parties parallélépipédiques :

$$\begin{cases}\text{une partie cubique d'arête } x.\\ \text{trois parties de côtés } x \text{ par } x \text{ par } v.\\ \text{trois parties de côtés } x \text{ par } v \text{ par } v.\\ \text{une partie cubique d'arête } v.\end{cases}$$



Retranchons cette dernière partie. Nous obtenons alors le volume V ci-dessus.



Regroupons les six parties autres que le cube en un parallélépipède de côté x par u par $3v$:

Considérons alors que ces six parties correspondent au terme $6x$ de l'équation donc le volume V correspond à la constante 20 de l'équation.

D'où $V = u^3 - v^3 = 20$ et $3uvx = 6x$ soit $uv = 2$.

Il nous faut donc trouver u et v tels que $\begin{cases} u^3 - v^3 = 20 \\ uv = 2 \end{cases}$

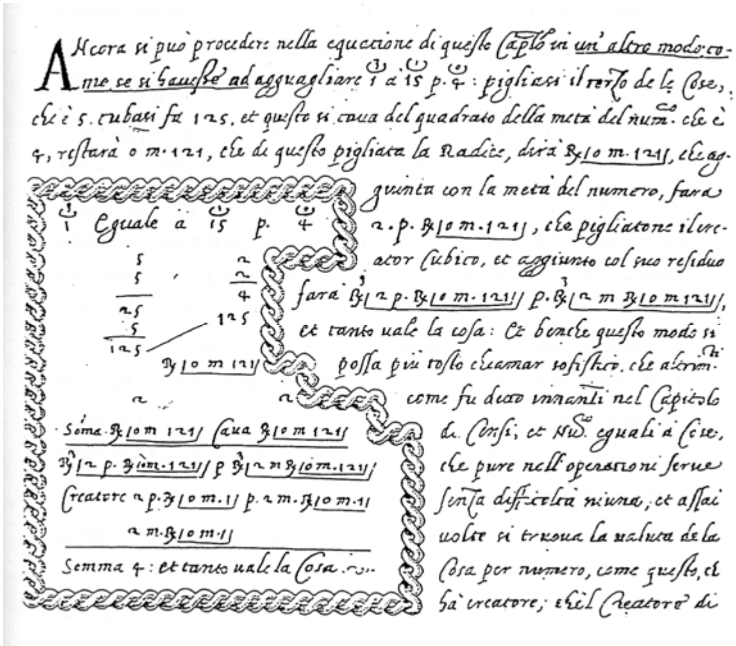
Soit $v = \dfrac{2}{u}$ donc $u^3 - \dfrac{8}{u^3} = 20$, soit encore $u^6 - 20\,u^3 - 8 = 0$ .En posant $U = u^3$ on se ramène donc à une équation du second degré $U^2 - 20\,U - 8 = 0$ dont les deux solutions sont $10 - \sqrt{108}$ et $10 + \sqrt{108}$ l'une étant u^3 et l'autre étant $-v^3$ car u et $-v$ ont un rôle symétrique dans le système. Or $x = u - v$, donc $x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$.

C'est sur cette formule que prend fin le deuxième temps de travail avec les élèves. Nous avons obtenu la formule de Cardan.

Or si l'on applique cette méthode à l'équation $x^3 - 15x = 4$, dont 4 est une solution simple, on obtient l'équation du second degré de variable U : $U^2 - 4\,U + 125 = 0$ de discriminant $\Delta = -484$, et donc de solutions $2 + \sqrt{-121}$ et $2 - \sqrt{-121}$ d'où la solution finale :

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{-121} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{-121} - 2} \text{ soit des racines de nombres réels négatifs.}$$

Bombelli décrit la recherche du nombre dont le cube est $2 + \sqrt{-121}$:
" *on ajoute le carré de la constante (2) au carré de la racine et de cette somme on prend le côté cubique, puis on cherche à tâtons à trouver un nombre et une racine carrée tels que leurs carrés ajoutés ensemble fassent autant que le côté cubique donné précédemment. Ensuite du cube du nombre étant retranché le triple du produit du nombre par le carré de la racine, ce qui restera sera le nombre de la racine que l'on cherche. Ce serait ainsi si l'on voulait avoir le côté de* $2 + \sqrt{-121}$ *. …*"


Ancora si può procedere nella equatione di questo Capitolo in un'altro modo come se si hauesse ad agguagliare 1 a 15 p. 4: pigliasi il terzo de le Cose, che è 5. cubasi fa 125. et questo si caua del quadrato della metà del num. che è 4, restarà 0 m. 121, che di questo pigliata la Radice, dirà R 0 m. 121, che aggiunta con la metà del numero, farà 2. p. R 0 m. 121, che pigliatone il creator Cubico, et aggiunto col suo residuo farà R 2 p. R 0 m. 121 p. R 2 m R 0 m 121, et tanto uale la cosa: Et benche questo modo si possa più tosto chiamar sofistico, che altrimenti come fu detto innanti nel Capitolo di Cubi, et numero eguale à Cose, che pure nell'operationi serue senza difficoltà niuna, et assai uolte si troua la ualuta de la Cosa per numero, come questo, et sa creatore; e il Creatore di

1 Eguale a 15 p. 4
Somma R 0 m 121 Caua R 0 m 121
R 2 p. R 0 m. 121 p R 2 m R 0 m. 121
Creatore 2 p. R 0 m. 1 p. 2 m. R 0 m. 1
2 m. R 0 m. 1
Somma 4: et tanto uale la Cosa.

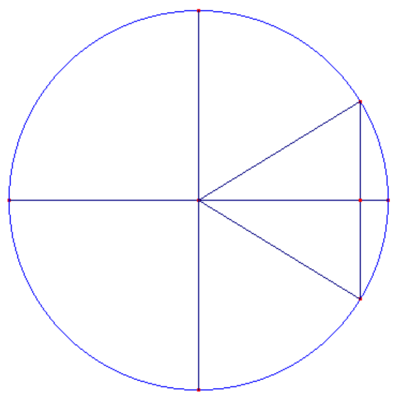
En fait il faut comprendre que Bombelli recherche une racine cubique du type $a + ib$, donc il faut que $(a + ib)^3 = 2 + i\sqrt{121}$. Donc $a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i = 2 + i\sqrt{121}$.

En recherchant une interprétation de cet algorithme on tombe algébriquement sur des notions semblant bien complexe pour l'époque de Bombelli car plus liée à l'interprétation géométrique du début du XIX^{e} siècle.

Suivons les instructions de Bombelli, prenons le carré de la constante 2 soit 4, ajoutons le carré de la racine de 121 pour obtenir 125, cube dont le côté est 5, or $5 = 1 + 2^2$ (un nombre et une racine carrée tels que leurs carrés ajoutés ensemble fassent autant que le côté cubique donné précédemment), le nombre est donc 2 et la racine carrée est $\sqrt{1}$. Ensuite du cube du nombre 2 soit 8 étant retranché le triple du produit du nombre par le carré de la racine soit $3\times2\times1= 6$, il reste alors 2 qui est la constante initiale. Donc $2 + \sqrt{-1}$ est égal à $\sqrt[3]{\sqrt{-121} + 2}$ de même $\sqrt{-1} - 2$ est égal à $\sqrt[3]{\sqrt{-121} - 2}$, donc la solution de l'équation $x^3 - 15x = 4$ est $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1}$ soit 4.

Si nous voulons interpréter maintenant ce calcul, la première étape qui conduit à 125 n'est autre que le calcul de $|2 + i\sqrt{121}|^2 = 125 = |a + ib|^6 = (a^2 + b^2)^3$ où a est appelé le nombre et b la racine. D'où $a^2 + b^2 = 5$, il s'ensuit une recherche à tâtons des valeurs possibles de a et de b. Puis l'algorithme propose une vérification, on calcule $a^3 - 3ab^2$ c'est-à-dire : du cube du nombre a étant retranché le triple du produit du nombre a par le carré de la racine b, le résultat obtenu n'est autre que la partie réelle de $a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i$ et elle doit être égale au nombre de la racine que l'on recherche c'est-à-dire à la partie réelle de $2 + i\sqrt{121}$.

Bombelli remplace donc, en notation moderne, l'égalité de deux complexes $z = z'$ par $\begin{cases} |z|^2 = |z'|^2 \\ \mathcal{R}e(z) = \mathcal{R}e(z') \end{cases}$ ce qui n'est pas tout à fait équivalent la première équation donnant des points images situés sur un même cercle de centre O, l'origine du repère et la deuxième donnant l'égalité des abscisses des deux points images. On voit donc que l'on obtient $z' = z$ ou $z' = \overline{z'}$



Il est plus que probable que la traduction qui précède n'a pas été la justification conduisant Bombelli à proposer son algorithme. On remarque que la méthode est analogue à celle utilisée dans la résolution des équations du second degré à coefficients complexes : on transforme le discriminant $\Delta= a + ib$ sous la forme $\delta^2 =(\alpha + i\beta)^2$ où α et β sont solutions de $\alpha^2 + \beta^2 = |\Delta|$ et $\mathcal{R}e(\delta^2) = \mathcal{R}e(\Delta)$ soit $\alpha^2 - \beta^2 = a$. D'autre part la recherche à tâtons semble bien hasardeuse et elle est du même type que la recherche des racines évidentes d'un polynôme, on se limite en fait aux valeurs entières. Bombelli d'ailleurs, dans l'exemple étudié, propose une autre solution $5 = 1^2 + 4$ mais la vérification qui suit mène à 1 auquel on doit retrancher 3.4 soit 12 ce que refuse de faire Bombelli puisqu'il devrait arriver à 2. D'autre part Bombelli signale que le choix de a se limite aux entiers dont le carré ne dépasse pas 5 puisque $a^2 + b^2 = 5$ donc il se limite aux deux seules possibilités pour a : 1 ou 2 ayant éliminé 1 il ne lui reste que 2 qui convient parfaitement.

Mon travail s'achève donc sur ce dernier paragraphe imparfaitement traité car la méthode de Bombelli m'est restée mystérieuse, mon interprétation anachronique ne pouvant pas être suivie par les élèves dans une introduction aux complexes. Par contre ils peuvent vérifier $2 + \sqrt{-1}$ est égal à $\sqrt[3]{\sqrt{-121} + 2}$ en comparant les deux cubes de ces quantités. C'est ce que j'ai dû me résoudre à faire.

Bibliographie :

- Ars magna or the rules of algebra : girolamo cardano translated by T.R Witmer, Dover
- Analysis by its history : E.Hairer , G.Wanner Springer
- Bombelli l'algebra fragments présentés et traduits par G.Hammon , IREM de Rennes
- Mathématiques au fil des âges : groupe Epistémologie et Histoire des IREM , Gauthier-Villars
- Images, imaginaires, imaginations, une perspective historique pour l'introduction des nombres complexes : IREM , ellipses

Le triangle d'Ahmès revisité par Fourrey
ou
Fourrey déforma-t-il le triangle d'Ahmès ?

Patrick Guyot,
L.P. Alexandre Dumaine, Mâcon.

L'activité présentée ci-dessous concerne la mesure en géométrie, elle traite de l'aire du triangle dans le cadre d'un problème concret. L'histoire y a sa place, on parcourt plus de trente siècles depuis Ahmès, scribe égyptien vivant vers 1650 av. J.-C., jusqu'à nos jours, en passant par le début du XX^{e} siècle avec Fourrey en 1907.

Un des intérêts de ce travail est de présenter le problème, au-delà de la traduction, de l'interprétation des textes anciens, ce qui peut très bien se concevoir avec des élèves, comme on le verra plus loin. Signalons au sujet de l'Égypte qu'en 1998, nous avons fêté le bicentenaire de l'expédition d'Égypte organisée par Napoléon Bonaparte, et que plusieurs Bourguignons célèbres y ont participé : Vivant Denon, originaire de Chalon-sur-Saône, créateur du musée du Louvre, Gaspard Monge né à Beaune, et Joseph Fourier natif d'Auxerre furent membres de cette fameuse expédition.

Nous présentons des travaux effectués avec nos élèves, la classe concernée ici est une seconde BEP Métiers de la Mode, 24 filles, mais on peut les présenter à des élèves de seconde de lycée général, ou à des collégiens.

L'activité en classe

La durée a été d'une heure, les objectifs visés étaient :

-en contenu : calculs d'aires d'un triangle, utilisation du théorème de Pythagore, calcul littéral.
-utilisation d'un raisonnement pour valider une affirmation.
-permettre une discussion, les élèves devant émettre un avis.

Nous avons utilisé un texte extrait d'un livre d'Émile Fourrey, qui a écrit plusieurs ouvrages concernant les mathématiques : *Curiosités arithmétiques*, *Curiosités géométriques*, (tous deux réédités récemment chez Vuibert), *Procédés originaux de constructions* (Vuibert, 1923.)

Le texte de Fourrey, extrait des *Curiosités géométriques* (1907) et reproduit sur la page suivante, est d'abord donné à lire sans plus d'explication. Après cette lecture, un premier questionnaire est distribué et les élèves sont invitées à répondre individuellement aux 6 questions qui sont présentées sur la page suivant le texte de Fourrey.

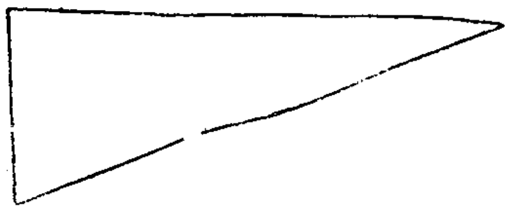
Extrait de ***Curiosités géométriques*** d'Émile Fourrey (1907) :

MESURE DES POLYGONES

§ 1. — Triangles.

Triangle isocèle. — Manuel égyptien d'Ahmès (2000 ans av. J.-C.). — « S'il t'est donné un triangle [isocèle] de 10 perches à son côté, 4 perches à sa base, quelle est sa superficie ? »

L'auteur *multiplie la demi-base par le côté,* ce qui donne 20 perches carrées. La superficie exacte serait 19,6 perches carrées, soit une différence de 2 % environ.



Fac-similé du Manuel égyptien d'Ahmès.

D'une manière générale, si b est la base et c le côté, ce procédé revient à remplacer la formule exacte

$$\frac{b}{2}\sqrt{c^2-\frac{b^2}{4}}=\frac{b}{2}c\sqrt{1-\left(\frac{b}{2c}\right)^2}$$

par la formule approximative

$$\frac{b}{2}\times c,$$

d'autant plus près de la vérité que b est plus petit par rapport à c.

Le triangle d'Ahmès vu par Émile Fourrey.
Questionnaire 1.

(1) Combien d'années séparent Émile Fourrey d'Ahmès ?

(2) Combien d'années séparent l'époque d'Ahmès de la nôtre ?

(3) Combien d'années nous séparent d'Émile Fourrey ?

(4) Quelle est l'unité de longueur utilisée par les Égyptiens ?

(5) Quelle est l'unité d'aire utilisée par les Égyptiens ?

(6) La figure du manuel égyptien correspond-elle exactement au texte ?

Une curiosité s'est immédiatement manifestée chez les élèves au sujet du "manuel d'Ahmès" : Y avait-il des livres 2000 ans avant Jésus-Christ ? Ahmès était-il un professeur ? Comment M. Fourrey a-t-il pu connaître ce qu'Ahmès avait écrit ? Une explication a donc été nécessaire et il est peut-être utile de résumer ici quelques informations.

Les documents d'époque susceptibles de nous éclairer sur les connaissances mathématiques en Égypte Ancienne sont peu nombreux et se résument à quelques papyrus. On nomme ainsi des feuilles obtenues par collage de tiges de papyrus découpées, sur lesquelles on écrivait. Le papyrus le plus important est le papyrus Rhind. Trouvé à Thèbes, il a tiré son nom de celui de l'écossais Alexandre Rhind qui l'acheta en 1858. Il fut revendu après sa mort au British Museum de Londres.

Il est constitué d'un rouleau d'environ cinq mètres sur trente centimètres, séparé en deux fragments, et écrit recto verso en hiératique, le hiératique étant une version simplifiée des hiéroglyphes. L'auteur se présente dans le texte, il s'agit du scribe *Ahmès* (signifie *né de la lune*). Il écrit ce papyrus en l'an 33 de Aouserré Apophis, pharaon de la XVI^{e} dynastie, ce qui le situe vers 1650 av. J.-C. Ahmès déclare qu'il effectue une copie d'un papyrus plus ancien (peut-être de 1850 av. J.-C.)

Ce papyrus est un ensemble d'un peu plus de 80 problèmes concrets résolus, mais non expliqués. On donne souvent simplement la solution, et on dit que les résultats répondent bien aux données de l'énoncé.

Le problème du "triangle" que nous étudions ici est le cinquante et unième problème du papyrus Rhind.

Après ces quelques explications, accompagnées d'un commentaire sur l'écriture égyptiennes et son décryptage par Champollion, nous avons repris le questionnaire, et les élèves ont comparé leurs réponses. Les trois premières questions ont apporté leur lot d'erreurs habituelles, puisque quelques unes ont oublié de compter négativement les années avant J.-C., mais nous sommes passés rapidement à la quatrième question, ou le mot *perche* a suscité quelques interrogations. Ayant consulté quelques ouvrages de spécialistes de cette époque, j'ai pu informer les élèves que le nom égyptien pour cette unité de longueur est *khet*, qu'on traduit plutôt par *verge* que par *perche*, et qu'une verge se divise en 100 *coudées*. La surface se mesure donc en verges carrées (plutôt que perches carrées), que les Égyptiens appellent *setat*. Nous avons néanmoins décidé que la classe garderait les mots *perche* pour les unités de longueur et *perche carrée* pour les unités d'aire dans nos réponses. Ajoutons pour compléter ces informations que le *khet* mesurait environ 52,5 mètres ce qui donne une coudée de 52,5 cm.

La dernière question a entraîné une réponse unanime. Le triangle fourni par Émile Fourrey ne correspond pas à un triangle isocèle, certaines penchent pour un triangle rectangle, une élève signale même que ce n'est pas un triangle parce que "les lignes ne sont pas droites".

J'ai alors demandé de répondre aux questions 7, 8 et 9 (présentées page suivante), en faisant remarquer que pour le tracé on utilisera des centimètres au lieu de perches. Il s'agit cette fois de se pencher sur le premier paragraphe du commentaire de M. Fourrey (depuis *L'auteur*… jusqu'à …*2% environ*).

Le triangle d'Ahmès vu par Émile Fourrey.
Questionnaire 2.

(7) Tracer un triangle isocèle ABC de base AC = 4 cm, de côtés AB = BC = 10 cm.

(8) Tracer la hauteur relative à la base du triangle ABC. Soit H le pied de cette hauteur. Calculer cette hauteur puis l'aire du triangle ABC.

(9) D'où viennent les 2 % de l'énoncé d'Émile Fourrey ?

Si le tracé de la question 7 n'a pas présenté de difficulté, le calcul de la hauteur a nécessité un rappel des propriétés des triangles isocèles. Le fait que H soit le milieu de la base n'a pas été perçu immédiatement, mais une fois cette propriété énoncée par une élève, ses camarades ont rapidement utilisé la relation de Pythagore pour déterminer la hauteur. Le calcul de $\sqrt{10^2 - 2^2} = \sqrt{96}$ fournit un résultat approché de 9,8 cm.

Pour calculer l'aire du triangle, la formule n'est pas toujours connue, mais après quelques échanges, on a écrit : Aire (ABC) = $\dfrac{AC \times AH}{2}$ = 19,6 cm^2.

Nos élèves n'ayant pas la connaissance de la détermination d'une incertitude relative, il a été nécessaire de leur expliquer le calcul de $\dfrac{20 - 19{,}6}{20}$ conduisant aux 2 %.

Le questionnaire 3 a ensuite été distribué pour que les élèves puissent travailler sur le dernier paragraphe de l'exercice de M. Fourrey.

Le triangle d'Ahmès vu par Émile Fourrey.
Questionnaire 3.

(10) Comment retrouver la première formule de l'aire indiquée par Émile Fourrey.
Comment peut-on obtenir la formule approximative $\frac{b}{2}\times c$?

(11) On peut penser aujourd'hui qu'Émile Fourrey a mal compris le manuel égyptien et que dans le triangle isocèle, c'est la hauteur qui mesure 10 perches et non le côté. Peut-on alors dire que la formule $\dfrac{b}{2}\times c$ est exacte ?

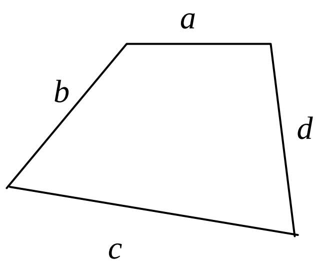
Il a été nécessaire d'aider plus de la moitié de la classe qui éprouve des difficultés avec le calcul littéral.

Notre propos s'est terminé par une discussion sur l'interprétation d'Émile Fourrey. Les élèves trouvent anormal qu'on fasse des suppositions sur ce que les Égyptiens pouvaient penser, et ont manifesté leur satisfaction en apprenant que l'on s'accorde aujourd'hui sur le fait que le calcul égyptien présenté ici est correct.

Cette réaction affective a certainement joué positivement sur l'implication des élèves, et a permis de conduire jusqu'au bout l'étude de ce problème, même si l'aide du professeur a été nécessaire à plusieurs reprises.

Après cette description d'une séquence en classe, nous pouvons revenir sur le problème de ce qu'on comprend des textes anciens qui nous sont parvenus. Un des risques concerne l'anachronisme, mais un autre, et c'est celui qui nous intéresse ici, provient de la traduction des mots de l'époque concernée. Émile Fourrey présente dans son ouvrage une grande quantité de problèmes variés, et ne se pose pas en égyptologue. Il ne s'agit donc pas ici d'intenter un procès à l'auteur des *Curiosités géométriques*, mais de voir ce qu'ont pu en dire après lui de réels spécialistes.

Nous pouvons néanmoins proposer une explication à l'interprétation de Fourrey. Pour le calcul de l'aire d'un quadrilatère quelconque, on faisait autrefois souvent appel à la formule approchée dite des "agrimenseurs" (ou arpenteurs) :



Aire $A = \dfrac{a+c}{2} \times \dfrac{b+d}{2}$

Le passage au triangle se fait en prenant par exemple $d = 0$; l'aire devient : $A = \dfrac{a+c}{2} \times \dfrac{b}{2}$

De plus si le triangle est isocèle ($a = c$), on arrive à la formule indiquée en dernier par Fourrey dans son texte. Il a donc pu être influencé par cette formule des agrimenseurs avant de proposer son interprétation du texte d'Ahmès.

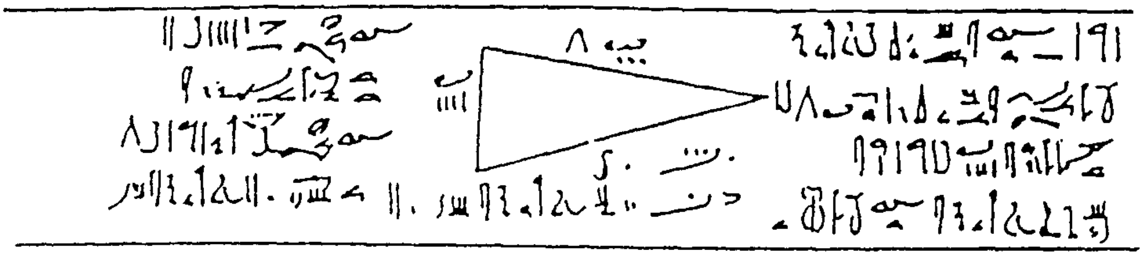
Pour confirmer ce que nous avançons, nous pouvons consulter successivement trois auteurs. Le premier d'entre eux est André Pichot qui commente ce problème dans son ouvrage *La naissance de la science* (tome premier).

Nous consulterons pour cela sa transcription personnelle du problème :

84. SURFACE DU TRIANGLE

(Réf. : Eisenlohr, Chace & coll.)

Transcription et traduction du problème n° 51 du papyrus de Rhind (1650 av. J.-C.)



Exemple de calcul d'un triangle de terre. Si on te dit un triangle de «meret» [*côté ou hauteur ?*] 10 khet et de base 4 khet. Quelle est sa surface ?

Pose 1 400 [*expression en coudées de la base et de la*
1/2 200 [*demi-base. 1 khet (verge) = 100 coudées*]
1 1 000 [*côté en coudées*]
2 2 000

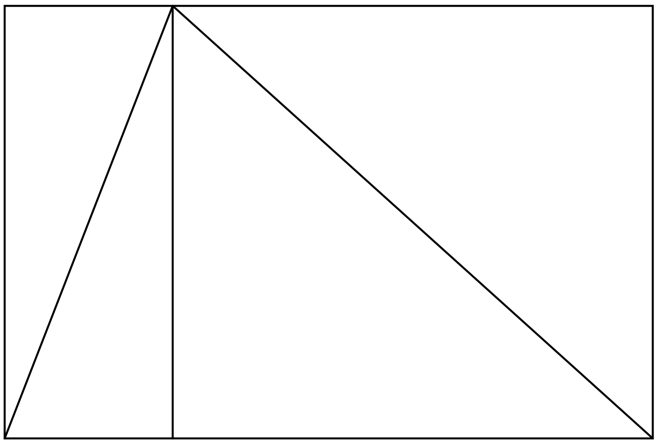
La surface est 20 setat. [*1 setat = 1 khet*^{2}]

Prends 1/2 de 4, soit 2 pour faire son rectangle [*C'est-à-dire : pour construire le rectangle de surface égale à celle du triangle, rectangle qui est de forme h.b/2, où h et b sont la hauteur et la base du triangle*]. Fais la multiplication 10 fois 2, c'est sa surface.

La première constatation est que nous sommes très éloignés de l'énoncé de Fourrey, la deuxième que le doute sur le *meret* apparaît ici clairement.

Dans son ouvrage *Mathematics in the time of the Pharaohs*, Richard Gillings a lui aussi émis l'opinion que la difficulté provient de la signification de *meret*. Il écrit : "Si le meret signifiait le côté plutôt que la hauteur, l'aire serait fausse à moins que le triangle fut rectangle." Mais cet auteur rejoint d'autres égyptologues modernes qui pensent que le meret correspond bien à la hauteur du triangle, et que la formule choisie par Ahmès est bien exacte.

C'est le cas de J. Vercoutter, qui, dans le célèbre ouvrage publié en 1966 sous la direction de René Taton, *Histoire générale des sciences* (tome premier, la science antique et médiévale), traduit meret (ou meryt) par hauteur : pour lui la méthode est donc exacte. Il le justifie en rappelant un extrait de l'énoncé qu'il traduit par la phrase suivante : "Tu prendras la moitié de 4, afin de faire son rectangle", qui laisse entendre qu'Ahmès emploie une méthode géométrique pour résoudre le problème. J. Vercoutter écrit : "étant donné un triangle quelconque, il semble avoir construit à partir de la base qui lui était donnée, un rectangle dont deux côtés sont égaux à la hauteur du triangle."



La demi-surface de ce rectangle lui donnait la solution cherchée."

Bibliographie

Fourrey, Émile, *Curiosités géométriques*, Vuibert, 1907.

Pichot, André, *La naissance de la science,* I Mésopotamie, Égypte, Folio Essais n° 154, 1991.

Taton, René (sous la direction de), *Histoire générale des sciences*, Tome I la science antique et médiévale, PUF, 1966.

Gillings, Richard J., *Mathematics in the Time of the Pharaohs*, Dover Publications, Inc. New York, 1971.

Une histoire d'eaux landaises
ou
Dans quel milieu sommes-nous ?

Marie-Noëlle Racine,
Lycée "Le Castel", Dijon.

Samedi 23 décembre 2000, dans une classe de Seconde d'un niveau assez faible (25 élèves sur 32 ont dû redoubler ou ont été réorientés en fin d'année), veille de vacances de Noël, et même dernière heure avant de partir en vacances (de 11h à 12h.)

Neuf élèves absents ! (Faut-il vraiment faire cours dans ces conditions ?)

On venait de passer quelques cours sur le chapitre des statistiques et je pensais terminer par ce petit texte assez sympathique qui permet, à mon sens, de faire le point sur les connaissances des élèves à propos de la signification des mots du vocabulaire "de base". Ce texte permet aussi de donner un éclairage sur les balbutiements et la mise en place des calculs statistiques pour une utilisation en termes de prévisions.

J'avais l'intention de faire étudier le texte (voir ce texte en annexe 1) jusqu'à la ligne 38, je voulais faire repérer par les élèves, dans ce texte, les mots actuels qui se cachent derrière les mots de milieu, moyenne, … en 1788, leur faire manipuler des données et rechercher de quelle façon, avec quels calculs, on a rendu compte de ces données pour informer la population.

Première séance

Je distribue le document complet. Même si je ne fais étudier que les deux tiers du texte, j'ai décidé de ne pas tronquer ce mémoire, somme toute assez court, pour permettre aux élèves curieux de lire le texte en entier. Je précise oralement que lors de la parution de ce document (je ne donne alors aucune date), les notions et le vocabulaire statistiques n'étaient pas encore bien définis.

Avant de laisser les élèves lire le texte, je leur demande d'étudier la page de couverture pour répondre à deux questions :

1°) De quoi s'agit-il ? Les élèves relèvent les mots *Académie*, *Sciences*, *Mémoires*. Je fais alors un point information sur l'historique de l'Académie Royale des Sciences, créée en 1666 par Colbert en vue de servir le roi et l'état en favorisant les inventions pratiques (brevets, expertises de machines,…) et en développant les connaissances scientifiques auxquelles le roi accordait une grande importance. Elle était constituée de six classes : Anatomie, Chimie et Botanique pour la partie physique, Astronomie, Mécanique et Géométrie pour la partie mathématiques. Les savants y faisaient des communications, relatées dans les *Comptes-rendus*, ou rédigeaient des "mémoires", compilés par années complètes, dans un ouvrage intitulé *L'histoire de l'Académie Royale des Sciences*.
Le texte qui suit est tiré de l'un de ces livres. On pourra trouver en annexe une histoire plus détaillée de l'Académie et d'autres sociétés savantes de la même période.

2°) En quelle année le mémoire a-t-il été confié à l'Académie des Sciences ? Les élèves ont toujours du mal à lire les nombres écrits avec des chiffres romains. Je les laisse discuter et donner les dates qu'ils croient lire. Au cours de leurs discussions, il apparaît qu'ils sont sûrs du fait que "I" signifie "1" et que "M" signifie "1000", que "X" et "V" signifient respectivement "10" et "5". Pour le reste, "D", "C", "L", il y a doute : C pourrait signifier cent et, par déduction, D serait cinq cents et L cinquante. Finalement, ils sont tous d'accord sur le fait que M.DCC.LXXXVIII. est l'année 1788.

L'affaire se corse lorsque je demande la date de parution du livre ! M.DCC., c'est bien 1700, I c'est bien 1 mais XC qu'est-ce que c'est ? Dix avant cent, là, ils sont gênés quelques instants puis la réponse fuse : c'est 90 ! L'année de parution est donc 1791.

Je fais alors un bref point d'information pour leur dire que l'hésitation qu'ils ont eue est bien légitime : dans les textes latins de la période antique, on écrivait IIII pour 4 et VIIII pour 9. Assez rapidement, c'est devenu IV pour 4 et IX pour 9 mais, ce n'est que beaucoup plus tard que l'on s'est mis à écrire XL pour 40 ou XC pour 90 ou encore CM pour 900.

Je leur demande maintenant de chercher l'auteur et le sujet du mémoire. Tout le monde passe ainsi à la page 2, au début du texte. Pour les élèves, tout est clair "état moyen" signifie que l'on cherche des hauteurs d'eau. Quant à l'auteur, M. de la Lande, c'est pour eux, un illustre inconnu. Le dictionnaire (Larousse) indique : "LALANDE (Joseph Jérôme Lefrançois de) : astronome français né à Bourg-en-Bresse (1735-1807.)" En fait, il a commencé par être avocat, puis il se passionne pour l'astronomie, il part à Berlin, à l'Académie des Sciences. Il fut aussi un révolutionnaire enthousiaste et un athée convaincu. Avec son neveu Michel Jean Jérôme de LALANDE (1766-1836), il s'est intéressé à l'histoire des mathématiques. Compte tenu des dates, nous pensons que c'est l'oncle qui a écrit le mémoire que nous allons lire, mais nous n'avons pas les éléments nécessaires pour en être certains.

Je laisse alors un long temps aux élèves pour lire les deux premières pages du document.

Comme toujours lorsque nous lisons des textes anciens, je demande aux élèves ce qu'ils ne comprennent pas bien à la lecture du texte, les questions qu'ils ont envie de poser à propos de certains mots.

Même si on l'a déjà vu dans un autre texte, ils éprouvent le besoin de me parler des *s* imprimés avec une lettre qui ressemble à un *f*. Veulent-ils par-là, me signifier qu'il y a des difficultés et que je dois en être consciente par la suite ? Ils parlent ensuite de *tenoît*, *falloît*, *connoître*. Pour mieux retrouver ces mots dans le texte, je demande aux élèves de numéroter les lignes du texte. J'aurais dû penser à cela et numéroter moi-même les lignes avant de photocopier le texte pour les élèves.

Le seul mot de vocabulaire que les élèves me demandent d'expliquer est le mot *nivellement* (ligne 2.) Les élèves, habitués à discuter, se répondent entre eux : "C'est quand on remet tout au même niveau", "alors, pourquoi il parle de mesures (*on a rapporté à ce point des nivellements et des mesures*) ?", "ça veut plutôt dire qu'il s'agit de mesurer des différences de niveau".

Les élèves demandent des explications sur les pieds et les pouces. Certains pensent qu'il s'agit des mesures anglo-saxonnes actuelles. De plus, ils s'étonnent des dixièmes de pouces. Je demande si les élèves savent quand a été adopté le système métrique en France. Aucun élève ne connaît la réponse. Ils pensent tous que c'est au XX^{e} siècle !

Je fais alors une 3ème parenthèse information pour raconter que le système métrique a été adopté en France pendant la Révolution, d'abord avec un mètre provisoire puis en 1799, le mètre devint la dix-millionième partie du quart de méridien terrestre (Condorcet, dont une rue de Dijon porte le nom, voulait "une unité pour tous les Hommes".) Il avait donc fallu mesurer un méridien terrestre ; pour cela, l'assemblée législative a donné l'ordre à deux astronomes, Delambre et Méchain, de mesurer le méridien, passant par Paris, de Dunkerque à Barcelone. Ils sont partis en juin 1792, en pleine Révolution, avec des ordres signés par le Roi, ce qui les rendra suspects quand, quelques mois plus tard, le roi a été arrêté puis guillotiné. Leur travail consistait à mesurer des angles pour en déduire, après avoir mesuré un côté, les longueurs d'autres côtés de triangles et ainsi calculer la longueur du méridien, de Dunkerque à Barcelone, puis en extrapolant, celle du méridien tout entier.

Les élèves ont été étonnés et intrigués par ces mesures d'angles, je leur promets de reparler avec eux de cette méthode, dite "par triangulation", quand on étudiera le chapitre sur les triangles. J'espère peut-être, en laissant cette part de mystère et en faisant cette promesse alléchante, avoir des élèves plus attentifs et réceptifs quand on abordera ce chapitre de géométrie. Le périple de Delambre et Méchain a duré 7 ans au cours desquels ils ont été pris pour des royalistes ou pour des espions (la France a été en guerre), durant ce laps de temps, Condorcet est mort sous la Terreur.

En 1782 et 1787, les mesures de longueurs encore employées à Paris sont la lieue, la perche, le pas mais surtout la toise, le pied, le pouce, la ligne et le point :

$$\begin{cases} \text{1 toise = 6 pieds (= 1,949 m)} \\ \text{1 pied = 12 pouces (= 0,325 m)} \\ \text{1 pouce = 12 lignes (= 2,707 cm) (ce qui est différent de la valeur de 1 inch anglais qui vaut 2,54 cm)} \\ \text{1 ligne = 12 points} \\ \text{1 point =0,188 mm.} \end{cases}$$

On peut remarquer que les sous-multiples du pouce existaient mais que l'auteur leur a préféré les dixièmes de pouce. Cette pratique avait déjà eu cours auparavant depuis Stevin. On peut penser que cela facilitait les calculs. Ainsi, l'écriture 9.10,6 signifie 9 pieds 10 pouces et 6 dixièmes de pouce.

J'explique alors au tableau, à titre culturel, comment on peut faire une addition avec ces mesures :

$$\boxed{\begin{array}{r} 6\,.\,5\,,\,4 \\ +\;6\,.\,2\,,\,9 \\ \hline 12\,.\,8\,,\,3 \end{array}} \quad \text{puis} \quad \boxed{\begin{array}{r} 12\,.\,8\,,\,3 \\ +\;\;6\,.\,7\,,\,0 \\ \hline 16\,.\,15\,,\,3 \end{array}}$$

et là, on prend 12 pouces des 15,3 que l'on transforme en 1 pied à ajouter aux 16 pieds du résultat. Puis 12.8,3 +4.7,0 = 16.15,3 = 17.3,3. Enfin, ce 17.3,3, je montre comment on le divise par 3.

En regardant le tableau [p. 245 du document], les élèves pensent que les nombres en bas des colonnes 1782 et 1787 sont les moyennes arithmétiques des 12 hauteurs moyennes des 12 mois de l'année. Je leur demande de le vérifier. C'est le travail qu'ils ont à faire sur la colonne 1782 pour une prochaine séance, le samedi 13 janvier 2001. Nous n'avons pas eu le temps d'aborder les questions concernant le vocabulaire statistique, ce sera pour le 13 janvier.

Deuxième séance :

Lors de la 2ème séance, je regarde rapidement le travail fait par les élèves :

1°) Certains élèves ont additionné tous les nombres à la calculatrice, en utilisant la virgule pour séparer les pieds et les pouces, par exemple, pour janvier 1782, ils écrivent 6,54 ou pour avril de la même année 7,106. Pour l'année 1782, leur somme 52,186 divisée par 12 leur donne une moyenne de 4,3488… qui n'est pas si loin du "4,4" indiqué en bas de la colonne, et qui leur donne satisfaction !…

2°) Les autres, ont calculé la somme des 12 valeurs, en cherchant la somme de tous les pieds d'une part, la somme de tous les pouces (et dixièmes de pouces) d'autre part. Le résultat, pour 1782, est 47 pieds et 61,4 pouces. Seuls 3 élèves ont su transformer les 61,4 pouces en 5 pieds et 1,4 pouces, ce qui leur a donné une somme totale de 52 pieds et 1,4 pouces.

Lorsqu'il a fallu faire la division par 12 pour trouver la moyenne demandée, pour la majorité des élèves, il fallait diviser 47 pieds par 12 et 61,4 pouces par 12, ce qui donne une moyenne de 3,9 pieds et 5,1 pouces. Ce résultat ne correspond pas aux 4.4,0 annoncés, mais ils ne voient pas du tout comment ils auraient pu procéder. En fait, je l'ai compris plus tard, lors de la 3$^{\text{ème}}$ séance, ils n'ont pas compris pourquoi il y a deux unités, c'est un peu comme s'ils avaient à faire avec deux mesures différentes pour une même grandeur, ils disposent de 24 nombres pour mesurer 12 grandeurs. A ce stade, on explique au tableau la méthode employée pour transformer les unités, puis comment effectuer la division. Je sens confusément qu'il y a des notions qui ne sont pas bien assimilées, mais j'attribue cela aux difficultés techniques des opérations qui ne sont pas familières à ces élèves de Seconde. 52 pieds et 1,4 pouces divisés par 12 donnent une moyenne de 4 pieds et 4,1 pouces.

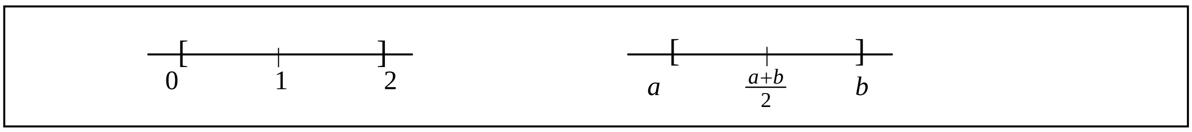
Pour compléter mon propos, je précise que les 3,9 pieds et 5,1 pouces trouvés par la majorité des élèves donnent 51,9 pouces soit 4 pieds et 3,9 pouces, cette valeur diffère un peu de celle que l'on trouve par l'autre méthode. La différence est due aux approximations dans la division des 47 pieds par 12. Je n'ai pas du tout parlé de cela avec les élèves, c'est seulement par curiosité que j'ai fait ce calcul.

La discussion se poursuit avec les élèves. La moyenne que l'on vient de calculer est de 4 pieds et 4,1 pouces. M. de la Lande annonce 4 pieds et 4,0 pouces. Il y a une très légère différence, d'où peut-elle provenir ? A la lecture du texte, la dernière fois, il est apparu plusieurs façons de calculer des "hauteurs moyennes", on va donc reprendre le texte et repérer toutes ces façons. Cela permettra aussi de le relire car ils ont un peu oublié.

Mais auparavant, les élèves listent les mots de vocabulaire du XXI^{e} siècle. Je les écris au tableau sous leur dictée : étendue, centre (d'un intervalle), mode, médiane, moyenne (arithmétique), moyenne élaguée, minimum, maximum, moyenne coefficientée (c'est le mot employé par les élèves, j'ai préféré le conserver plutôt que de leur faire écrire moyenne pondérée qui a encore moins de signification pour eux.)

Les élèves relisent le texte pour repérer tous les mots de vocabulaire statistique de ce mémoire et dire par quel mot du XXI^{e} siècle on pourrait les traduire. Dès le début de la lecture des élèves, il y a besoin d'une discussion collective à propos du mot "milieu" (ligne 4). A quel mot de notre liste de vocabulaire peut-on le rapprocher ? Il y a 3 avis dans la classe : centre – moyenne – médiane :

- L'élève J veut l'associer au mot "médiane" car la médiane partage la série en deux parties de même effectif,
- L'élève G l'associe plutôt au mot "moyenne" car moyenne et centre et milieu c'est pareil dans un intervalle, pour trouver le centre, on fait la moyenne des extrémités et ça donne le milieu. Dans [0 ; 2], le centre de l'intervalle c'est 1, c'est la moyenne entre 0 et 2, et, sur le dessin, 1 est au milieu entre 0 et 2. Dans un intervalle [a ; b], c'est pareil, le centre est (a+b) / 2

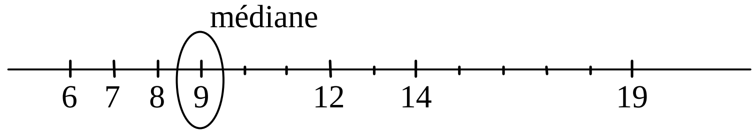


- Les autres élèves (la classe en chœur ou presque) : alors, c'est pas "moyenne", c'est "centre". D'ailleurs, "moyenne" est employé avec plus de 2 valeurs en général.

- L'élève A : comment peut-on associer milieu avec centre ? Dans centre, il y a l'idée de centre d'une boule, c'est différent d'un milieu.

- L'élève B : mais non, ici, c'est centre d'un intervalle.

- L'élève P : avec médiane, ça va mal aussi.



moyenne : 10,7.
(min+max)/2 = 12,5.

par exemple : 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 12 ; 14 ; 19. La médiane n'est pas du tout le milieu.

On précise alors que, pour nous au XXI^{e} siècle, le mot milieu désigne le milieu d'un segment. Comme pour nous ici, le mot centre est celui d'un intervalle, on ne parlera de milieu que dans le même sens que celui de centre (d'un intervalle). M. de la Lande n'emploie pas toujours le mot milieu avec le même sens. Qu'appelle-t-il milieu en bas des colonnes 1782 et 1787 du tableau ?

Retour au texte du mémoire, pour chercher toutes les expressions qui sont des morceaux de phrase mis à la place de certains mots employés aujourd'hui. Par petits groupes, les élèves relisent attentivement le texte et notent les expressions repérées.

<u>Mise en commun</u> :

Lignes 4 et 5 : *La hauteur moyenne tenoit un milieu entre la plus grande et la plus petite élévation*.

plus grande élévation = hauteur maximum
plus petite élévation = hauteur minimum
milieu = centre de l'intervalle
hauteur moyenne = centre de l'intervalle [min ; max] (ce nombre est parfois dénommé par l'anglicisme "midrange")

Lignes 7 et 8 : *l'état moyen des eaux doit être l'état où elles sont le plus souvent*.

L'état où elles sont le plus souvent = le mode

Lignes 8 et 9 : *L'état naturel, indépendant des grandes inondations & des grandes sécheresses*, et lignes 12 et 13 : *Pour connoitre cette hauteur moyenne, il falloit exclure les grandes hauteurs et les grands abaissements*.

Ces deux citations font penser à une moyenne élaguée : on enlèverait le min et le max puis on ferait la moyenne des autres valeurs.

Lignes 16, 17 et 18 : *Avoir un grand nombre d'observations faites dans toutes les saisons, & prendre le milieu.* Lignes 27 et 28 : *Le résultat des hauteurs de tous les jours entre lesquelles j'ai pris un milieu*.

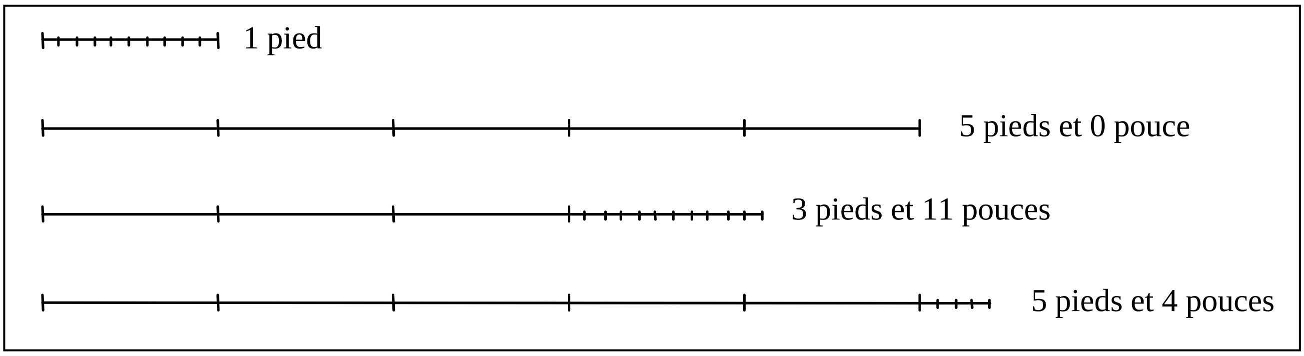
On ne sait toujours pas ce qu'est exactement le milieu pour M. de la Lande.

Le travail pour une prochaine fois consiste à rechercher, pour la colonne 1782, le minimum et le maximum, le centre de l'intervalle [min ; max], le mode, la moyenne élaguée (en enlevant le minimum et le maximum). Les élèves, malgré la dernière citation, ne pensent pas à une moyenne des mesures journalières, c'est-à-dire qu'il faudrait pondérer les moyennes mensuelles par le nombre de jours du mois correspondant.

Troisième séance

Lors de la correction, séance n°3, des calculs demandés pour aujourd'hui, les élèves, très rapidement, s'expriment en disant qu'il nous est impossible de déterminer le mode avec une série de 10 moyennes toutes différentes. Les quelques élèves interrogés n'ont pas fait le travail demandé à la maison, disent ne pas avoir compris comment on somme des mesures en pieds et pouces et encore moins comment on divise la somme par 10 pour trouver la moyenne élaguée.

Un volontaire va montrer au tableau comment faire. La moyenne élaguée est 4 . 2,0. A ce stade, il est surprenant de constater qu'aucun élève n'a pensé à tout écrire en pouces, ce qui aurait largement facilité les calculs. Je laisse quelques instants aux élèves qui n'ont pas fait le travail (et je le rappelle, ils sont nombreux) pour rechercher le minimum, le maximum et le centre de l'intervalle [min ; max]. Pendant ce temps, les autres (quelques) élèves, sérieux, qui avaient compris la technique de calcul, rangent les 12 hauteurs par ordre croissant pour déterminer la médiane. Lors de la correction, la moyenne mensuelle minimum en 1782 est bien 1.0,0 qui est celle du mois de septembre. Mais la moyenne maximum est, d'après les élèves, 9.10,6. Certains élèves ont même écrit 2 maximums, l'un de 9 pieds, l'autre de 10,6 pouces ! Surprise ! J'avoue que j'étais assez loin d'imaginer que les élèves, en grande majorité, n'ont pas compris que les moyennes mensuelles indiquées dans une colonne constituent une seule et même hauteur. J'ai eu envie de faire découper 12 bandes de papier de longueurs 6 pieds et 5,4 pouces, 6 pieds et 2,9 pouces, … mais je ne dispose ni de bandes de papier ni de ficelle assez longue, alors, on dessine un segment qui représente un pied, on le partage en 12 "pouces" et on dessine 3 autres segments de longueurs respectives 5 pieds et 0 pouce, 3 pieds et 11 pouces, 5 pieds et 4 pouces (voir la figure ci-dessous.) On peut ainsi facilement les classer du plus petit au plus grand.



Il est ensuite aisé d'énoncer une règle de comparaison de mesures proposées en pieds et pouces puis de trouver que la moyenne maximum de 1782 est celle du mois de mai, soit 9 pieds et 5,1 pouces. Le centre de l'intervalle [min ; max] est 5.2,5.

Ces valeurs 4.2,0 et 5.2,5 ne correspondent pas au "milieu" 4.4,0 annoncé par M. de la Lande. Les valeurs rangées par ordre croissant sont : 1.0,0 ; 1.5,1 ; 1.8,8 ; 2.0,0 ; 2.9,7 ; 3.2,2 ; 4.7,0 ; 5.4,6 ; 6.2,9 ; 6.5,4 ; 7.10,6 ; 9.5,1. La médiane est (3.2,2 + 4.7,0) / 2 soit 3.10,6. Ce n'est pas non plus une valeur très proche du 4.4,0 du bas de la colonne. Toutefois, un résultat s'en approche, c'est la moyenne des 12 moyennes mensuelles. Certains élèves disent qu'il faudrait le vérifier sur les colonnes 1787 et sur la dernière colonne mais, pour celle-ci, le résultat n'apparaît pas dans le tableau. D'autres élèves commencent à s'inquiéter devant la tâche immense qu'ils voient se profiler. Il faut vérifier que les nombres de la dernière colonne sont les moyennes des résultats des mois correspondants des 2 années 1782 et 1787, rechercher le minimum et le maximum pour 1787 ainsi que pour la dernière colonne, puis calculer le centre de l'intervalle [min ; max], la moyenne des 12 valeurs, la moyenne élaguée, et ceci, pour chacune des 2 colonnes. C'est à ce moment, que les élèves ont pensé à transformer tous les résultats en pouces (et dixièmes de pouces) (ne dit-on pas que "nécessité fait loi" ?). Une élève explique à tous les autres comment on doit effectuer la transformation, puis on répartit le travail. On fera le point lors d'une prochaine séance, après les épreuves longues qui doivent avoir lieu fin janvier.

Quatrième et cinquième séances

Je relève les résultats des groupes lors de la 4ème séance et j'en ferai une synthèse qui permettra une discussion ou l'émergence de nouvelles idées. J'ai aussi l'intention de laisser passer un peu de temps car je sens une certaine lassitude chez les élèves.

Dans l'intervalle, lors d'une heure de module où les élèves travaillaient sur les moyennes de la classe, ils ont remarqué, qu'en LV I, si on faisait la moyenne de toutes les notes des élèves, on n'obtenait pas la même chose qu'en faisant la moyenne des groupes de langues. Ils ont alors compris qu'il fallait pondérer les moyennes de groupes par le nombre d'élèves de ces dits groupes. Nous avons aussi fait une série d'exercices sur la proportionnalité et, en particulier, sur des partages proportionnellement à des effectifs. Ces modules ont-t-ils donné des idées aux élèves à propos de la signification du mot milieu chez M. de la Lande ?

Après les vacances de Février, pour une dernière séance, n°5, je distribue le polycopié sur lequel j'ai récapitulé les résultats antérieurs (voir annexe 3.) Je demande aux élèves de relire le texte.

Ils parlent du résultat de la dernière colonne qui se trouve lignes 33 et 34 : *La hauteur moyenne entre ces deux années, est donc de 4 pieds 10 pouces.* Aucun résultat ne correspond vraiment à ceux annoncés par M. de la Lande, il faut avoir d'autres idées pour donner une signification au mot milieu.

Je laisse les élèves chercher un petit moment. Un groupe d'élèves commence à calculer une moyenne pondérée, d'autres remarquent que le mois de février a moins de jours que les autres, et pourtant, on lui a donné la même importance. En 1782, si on donne moins d'importance à la hauteur 6.2,9, on trouve un peu moins de 4.4,1, ce qui nous rapprocherait du 4.4,0 annoncé. En 1787, si on donne moins d'importance à 3.10,6, on trouvera une moyenne un peu plus grande que 5.3,4, ce qui nous rapprocherait des 5.4,6 annoncés. Les élèves décident donc de tous calculer la moyenne des 12 valeurs, pondérées par le nombre de jours du mois correspondant.

On trouve 4.3,93 pour 1782, ce qui est proche de 4.4,0. Pour 1787, on trouve 5.3,55, proche de 5.3,6. Il y a donc le nombre entier de pouces qui diffère d'une unité, puisque le résultat annoncé par M. de La Lande est 5.4,6. Pour la dernière colonne, on trouve 4.9,74, que l'on peut approcher par 4.10.

Les élèves ont l'air soulagé, ils ont vraiment l'impression d'avoir trouvé la solution, malgré la différence remarquée sur la moyenne de 1787.

L'activité s'est terminée là.

Conclusion

Lorsque je fais le bilan de cette activité, à chaud, je ne suis pas satisfaite : certes les discussions que j'ai pu mener avec les élèves m'ont permis de constater que les buts étaient atteints. Lors du déroulement de l'activité, des difficultés sont apparues, j'ai passé du temps pour les aplanir mais avec un piètre résultat à mon goût : rechercher une moyenne pondérée par des effectifs n'est pas toujours une évidence pour les élèves, manipuler des unités non décimales est une tâche ardue pour eux qui sont formés dans le moule calculatrice et poser une division est au-dessus de leurs capacités. Fallait-il aller au fond des choses ? Fallait-il les guider davantage et leur suggérer le changement d'unité (les pieds transformés en pouces), leur suggérer aussi la recherche des moyennes pondérées ? Les élèves connaissaient les mots moyenne pondérée, médiane, milieu, centre, mais ils ne donnaient pas toujours de signification à ces mots et, à la fin de l'activité, ils ont vraiment eu l'impression de voir une lumière, d'avoir trouvé la solution d'un problème, d'avoir compris quelque chose. C'est une petite satisfaction malgré tout pour le professeur.

Un an plus tard, quand j'ai abordé le chapitre statistiques avec une classe de Seconde dans laquelle se trouvaient 4 redoublants, ces 4 élèves sont venus me trouver à la fin de l'heure pour me demander de recommencer cette activité avec la classe, ils étaient enthousiastes et m'ont seulement dit que "c'était bien". J'avoue que leur réaction m'a fait plaisir, mais j'ai préféré leur proposer d'autres activités. Si je voulais faire étudier de nouveau ce texte, je demanderais un histogramme des hauteurs d'eau, les élèves penseraient plus rapidement à transformer les pieds en pouces, pour utiliser des nombres décimaux, de plus, il n'y aurait plus le problème de la recherche des extremums et on pourrait raccourcir l'activité et se concentrer sur le vocabulaire sans avoir à faire face à des difficultés annexes. Rendez-vous l'année prochaine !

Annexe 1 : Texte original de La lande (B.U. Sciences Dijon, cote PA 8)

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE
ROYALE
DES SCIENCES.

ANNÉE M. DCC. LXXXVIII.

Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique, pour la même Année,

Tirés des Registres de cette Académie.

A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCC. XCI.

MÉMOIRE

Sur l'état moyen des Eaux de la Seine, à Paris.

Par M. DE LA LANDE.

ON a ſouvent parlé dans les Mémoires de l'Académie, de la hauteur moyenne des eaux de la rivière; on a rapporté à ce point des nivellemens & des meſures; mais on a toujours ſuppoſé que la hauteur moyenne tenoit un milieu entre la plus grande & la plus petite élévation, & c'eſt cette notion défectueuſe que je me propoſe de rectifier.

L'état moyen des eaux doit être l'état où elles ſont le plus ſouvent; l'etat naturel, indépendant des grandes inondations & des grandes ſécherеſſes, l'état ſur lequel on a droit de compter pour la navigation, ſauf les accidens paſſagers, & les événemens extraordinaires.

Pour connoître cette hauteur moyenne, il falloit exclure les grandes hauteurs & les grands abaiſſemens, tandis que ce ſont, au contraire, les ſeuls dont on ait fait mention, & dont on ait tenu compte juſqu'à préſent dans ces ſortes de calculs. Enfin, il faut avoir un grand nombre d'obſervations faites dans toutes les ſaiſons, & prendre le milieu.

Les hauteurs que l'on marque tous les jours à l'échelle du pont de la Tournelle pour le ſervice de la navigation de la rivière, & qui ſe publient dans le Journal de Paris, offrent un moyen facile de connoître l'état moyen de la rivière. Voici les hauteurs moyennes de chaque mois en 1782 & en 1787, qui ſuffiront pour donner une idée de celle qui fait l'objet de ce Mémoire. Ces hauteurs ſont en pieds, pouces & dixièmes de pouces; elles ſont le résultat des hauteurs de tous les jours, entre lesquelles j'ai pris un milieu. Dans la dernière colonne j'ai mis les hauteurs des différens mois, dans l'ordre des hauteurs de l'eau, pour que l'on voie, par exemple, que le mois de septembre a été dans ces deux années le plus sec, & le mois de mai le plus sujet à la pluie.

MOIS.	1782.		1787.		Mois par ordre des 4 hauteurs.	Hauteurs par un milieu.	
	Pieds.	Pouc.	Pieds.	Pouc.		Pieds.	Pouc.
Janvier. . .	6.	5,4	5.	0,0	Septembre.	1.	2,5
Février. . .	6.	2,9	3.	10,6	Août. . . .	1.	6,4
Mars. . . .	4.	7,0	5.	3,8	Juillet. . .	3.	1,7
Avril. . . .	7.	10,6	5.	10,4	Octobre. .	3.	4,3
Mai.	9.	5,1	9.	3,6	Mars. . . .	4.	11,4
Juin.	5.	4,6	5.	5,7	Février. . .	5.	0,7
Juillet. . .	2.	0,0	4.	3,5	Décembre.	5.	2,0
Août. . . .	1.	5,1	1.	7,6	Juin.	5.	5,2
Septembre.	1.	0,0	1.	5,1	Janvier. . .	5.	8,7
Octobre. .	1.	8,8	4.	11,8	Novembre.	5.	11,5
Novembre.	3.	2,2	8.	8,7	Avril. . . .	6.	10,5
Décembre.	2.	9,7	7.	6,3	Mai.	9.	4,4
Milieu . . .	4.	4,0	5.	4,6			

La hauteur moyenne entre ces deux années, est donc de 4 pieds 10 pouces; c'est à peu-près l'état moyen de la rivière sur l'échelle du pont de la Tournelle, & c'est pour cela que j'ai fait ajouter dans le Journal de Paris, à la hauteur de l'eau pour chaque jour, ces mots, *Hauteur moyenne, 5 pieds.*

L'échelle du pont Royal marque les hauteurs au-dessus du fond de la rivière, au banc de l'Aiguillette, qui est l'endroit où il y a le moins d'eau; elle marque 2 pieds 8 pouces de plus, du moins dans les moyennes eaux;

car la différence n'eſt que de 1 pied 4 pouces dans les baſſes eaux ; elle va juſqu'à 3 pieds quand les crues ſont fortes & ſubites : ainſi c'eſt à 7 pieds 5 pouces de l'échelle du pont Royal, que l'on peut fixer l'état moyen de la rivière.

L'échelle du pont au Change, faite en 1769, marque 17 pouces de plus que celle du pont de la Tournelle; ainſi l'état moyen des eaux ſur l'échelle du pont au Change, eſt de 6 pieds 3 pouces.

Mais les hauteurs extrêmes qui ont été obſervées ſur l'échelle du pont Royal, ſont 1 pied 10 pouces, & 25 pieds 3 pouces, dont le milieu eſt de 13 pieds 6 pouces $\frac{1}{2}$; & ce milieu que l'on a quelquefois appelé *hauteur moyenne*, ſurpaſſe de 6 pieds la hauteur qui doit réellement s'appeler *hauteur moyenne*. Cette différence fait voir la néceſſité des conſidérations que je viens de rapporter.

En prenant ainſi un plus grand nombre d'années, & en choiſiſſant celles où la quantité de pluie eſt d'environ 17 pouces, quantité moyenne ſuivant M. Cotte *(Traité de météorologie, page 231, 312)*, on aura plus exactement l'état moyen de la rivière. Il eſt tombé en 1782, 22 pouces d'eau *(Journal des Savans, juin 1783)*, & la même quantité en 1787 *(Connoiſſance des Temps, 1791, p. 360)*; ainſi la hauteur que j'ai trouvée eſt probablement un peu trop forte. Mais je me contente d'avoir montré l'erreur de la méthode employée juſqu'ici pour avoir la hauteur moyenne de la rivière. Il en eſt de même des hauteurs de la mer ; le niveau naturel n'eſt qu'à un tiers de l'intervalle qu'il y a des baſſes eaux à leur plus grande hauteur, comme je l'ai démontré dans mon *Traité du flux & reflux de la mer (art. 117)*; il eſt donc plus bas que le point qui tient le milieu entre les deux hauteurs.

Au ſujet des grandes hauteurs de l'eau en 1651, 1658, 1700, 1740, 1749, 1751, 1764, on peut voir M. Bonamy *(Mémoires de l'Acad. des Inſcript. tome XVII, page 675)*; M. Buache *(Mémoires de l'Academie des*

Sciences, 1741, 1742 & 1767, page 508), & M. Deparcieux *(Mém. 1764, p. 457)*

Si la méridienne de l'obſervatoire royal eſt de 149 pieds au-deſſus du zéro de l'échelle du pont Royal, elle ſera de 141 ½ pieds au-deſſus des moyennes eaux de la Seine; & ſi l'on ſuppoſe avec M. Maraldi *(Mém. 1703, p. 231)*, que la méridienne eſt 276 pieds au-deſſus de l'Océan, la pente de la Seine ſera de 134 ½ pieds. Cependant M. Shuckburgh, qui a fait le trajet de Paris juſqu'à la mer avec un excellent baromètre, ne jugeoit la pente que de 28 pieds *(Philoſ. tranſ. 1777)*; mais M. le Monnier eſt perſuadé qu'il l'a trop diminuée, & cela eſt très-vraiſemblable.

La différence de niveau entre les deux échelles du pont Royal & du pont de la Tournelle, ſur le mur de quai, a été déterminée en 1789 & en 1790 par M. de Prony, avec un excellent niveau. Il a trouvé que les ſept pieds de l'échelle du pont de la Tournelle étoient de niveau avec 12 pieds 5 pouces de celle du pont Royal, en ſorte que la différence réelle des deux échelles, eſt 5 pieds 5 pouces. M. Buache ne la croyoit que de 3 pieds 9 pouces. Le 31 janvier 1789, la rivière étoit a 9 pieds 11 pouces au pont Royal, ainſi elle auroit dû être à 4 pieds 6 pouces à la Tournelle; elle y étoit à 7 pieds 1 pouce : donc l'eau étoit plus haute au-deſſus du pont de la Tournelle qu'au-deſſous du pont Royal, de 2 pieds 7 pouces. Mais la pente ordinaire & générale de la Seine, ſur une diſtance de 1300 toiſes, eſt de 1 pied 4 pouces, ſuivant les anciens nivellemens de Picard; il y avoit donc dans Paris 15 pouces de plus pour la retenue des ponts, ou pour la cataracte effective de l'eau, ſoutenue par ces obſtacles; mais cette quantité varie de deux pieds par les différentes hauteurs & peut-être par les embarras de la rivière, plus ou moins conſidérables dans un temps que dans l'autre. Dans les moyennes eaux on trouve la pente totale depuis 2 pieds 3 pouces juſqu'à 3 pieds 3 pouces;

le milieu eſt 2 pieds 9 pouces, ce qui donne 1 pied 5 pouces pour la retenue des ponts, & 2 pieds 8 pouces pour la différence des hauteurs que marquent les deux échelles dans les moyennes eaux.

Il y a ſur la ſeconde pile du pont de la Tournelle; en partant du nord, & en aval, une autre échelle à laquelle M. de Prony avoit attaché ſon nivellement; mais j'ai reconnu qu'elle marque 9 pouces de moins, & j'ai réduit l'opération à celle qui eſt en amont, ſur la culée ou ſur le mur de quai, au pied de l'eſcalier qui eſt au nord & à l'eſt, parce que c'eſt celle-ci où l'on marque tous les matins la hauteur de l'eau pour le bureau de la Ville, telle qu'on l'imprime dans le Journal de Paris. On avoit ceſſé le 7 novembre 1789, de marquer cette hauteur dans le Journal, mais l'interruption n'a duré que juſqu'au 3 décembre.

Annexe 2

L'Académie Royale des Sciences (ARS) fut créée en 1666. Quelle était donc la situation au début du XVII^e siècle ?

Dans les universités, c'est surtout la philosophie et la science d'Aristote qui sont enseignées. Mais quelques scientifiques commencent à s'élever contre cet enseignement et à le critiquer.

Dans le même temps, l'astrologie est beaucoup diffusée, grâce à la publication d'almanachs, dans les campagnes et à la cour (cette propagation n'a d'ailleurs pas cessé, j'en veux pour preuve les horoscopes qui fleurissent toujours dans nos périodiques ! …)

Les scientifiques, partisans d'une science nouvelle, cherchent à se regrouper et à travailler ensemble. Ils veulent diffuser largement leur science et la faire connaître du public. Ils ne veulent plus se contenter seulement des réseaux de savants qui échangent leurs idées et débattent par correspondance. Ces scientifiques veulent aussi être reconnus, avoir une certaine notoriété pour attirer l'attention des mécènes.

Les académies vont alors jouer un rôle de centralisation des divers travaux, de diffusion de ces mêmes travaux et de protection des droits d'auteur. Il arrivera à ces institutions de devoir trancher dans des querelles d'antériorité.

Les premières académies furent créées en Italie. Citons notamment l'*Accademia del Cimento* (Académie de l'expérience) à Florence en 1657. Cette Académie a surtout regroupé des disciples de Galilée mais, compte tenu de l'étau religieux qui l'enserrait, elle a adopté une attitude prudente et se bornait à expérimenter sans expliquer.

Puis la *Royal Society*, qui vit le jour en 1662 à Londres, mais qui existait déjà sous une forme privée depuis 1645. Le roi Charles II ne voulait pas la subventionner. Les chercheurs étaient donc plutôt des gens suffisamment riches et ayant du temps libre.

En France, il y a une vie scientifique au Collège Royal. Parallèlement, des académies privées voient le jour, et ce caractère privé donne une liberté d'esprit. Par ailleurs, citons le père Mersenne qui consacre sa vie à mettre en relation les savants de toute l'Europe. Il publie une traduction des *Mécaniques* de Galilée, alors même que Rome l'a interdit. Le père Mersenne réunit autour de lui des savants qui n'hésitent pas, par exemple, à examiner l'hypothèse du vide. Ce groupe de savants est souvent appelé Académie de mathématiques, mais disparaît à la mort de Marin Mersenne. Puis Colbert, qui avait déjà fondé l'*Académie des Inscriptions et Belles-lettres* en 1663, avec son conseiller Charles Perrault, fit naître l'ARS en décembre 1666.[1]

Conçue selon un idéal "tous pour un et un pour tous", l'activité y est collective et les publications sont anonymes. Mais suite à de nombreuses disputes et controverses, en 1699, les contributions sont publiées sous le nom de leurs auteurs.

Les académiciens français reçoivent une pension du roi et sont assidus aux séances. En fait, ils ont même l'obligation d'y assister. Ils se penchent notamment sur le développement des techniques de guerre et de navigation, et par-là même, sur le problème de la détermination de la longitude : la France veut dominer les autres pays. L'Académie, haut lieu du savoir laïc, regroupant l'élite intellectuelle, devient vite le ferment de l'opposition au pouvoir politique en place.

[1] Pour mémoire, rappelons que Richelieu avait aussi créé l'*Académie Française* en 1634.

L'ARS fut supprimée en août 1793. Mais les savants se réunirent toujours par le biais de la société philomathique de Paris qui existait depuis 1788, et qui existe toujours, au 112, rue de Vaugirard, dans le 6e arrondissement de Paris. Lorsque la Convention a dissous les académies et sociétés savantes, il a tout de même fallu faire appel aux scientifiques et aux techniciens. Monge, ministre de la marine, fonde l'École Polytechnique pour former des ingénieurs civils et militaires. Puis l'Institut national est créé le 25 octobre 1795. Il prend le nom d'*Institut National des Arts et des Sciences*" et se divise en classes : Académie Française, Académie des Inscriptions et Belles-lettres, Sciences, Beaux arts, Sciences morales et politiques.

Quelques années plus tard, Bonaparte crée une Commission des Sciences et des Arts en Égypte, avec à sa tête, Monge, Berthollet et Fourier. Puis l'*Institut d'Égypte* voit le jour en août 1798. Cet Institut est en liaison permanente avec l'Institut national, mais les liaisons sont peu sûres et les publications se font alors dans une revue scientifique : la *Décade égyptienne*, qui, comme son nom l'indique, aurait dû paraître tous les dix jours.

Annexe 3

MOIS.	1782.		1787.		Mois par ordre des 4 hauteurs.	Hauteurs par un milieu.	
	Pieds.	Pouc.	Pieds.	Pouc.		Pieds.	Pouc.
Janvier. . .	6.	5,4	5.	0,0	Septembre.	1.	2,5
Février. . .	6.	2,9	3.	10,6	Août. . . .	1.	6,4
Mars. . . .	4.	7,0	5.	3,8	Juillet. . .	3.	1,7
Avril. . . .	7.	10,6	5.	10,4	Octobre. .	3.	4,3
Mai.	9.	5,1	9.	3,6	Mars. . . .	4.	11,4
Juin.	5.	4,6	5.	5,7	Février. . .	5.	0,7
Juillet. . .	2.	0,0	4.	3,5	Décembre.	5.	2,0
Août. . . .	1.	5,1	1.	7,6	Juin.	5.	5,2
Septembre.	1.	0,0	1.	5,1	Janvier. . .	5.	8,7
Octobre. .	1.	8,8	4.	11,8	Novembre.	5.	11,5
Novembre.	3.	2,2	8.	8,7	Avril. . . .	6.	10,5
Décembre.	2.	9,7	7.	6,3	Mai.	9.	4,4
Milieu . . .	4.	4,0	5.	4,6			

min.	1. 0,0	1. 5,1		1. 2,5
max.	9. 5,1	9. 3,6		9. 4,4
centre de [min ; max]	5 .2,5	5. 4,3		5. 3,4
médiane	4. 11,8	5. 1,9		5. 1,3
moyenne arithmétique des 12 valeurs.	4. 4,1	5. 3,4		4. 9,8
moyenne élaguée	4. 2,0	5. 3,3		4. 8,6

"Inscrire un carré dans un triangle."

Jean Terreran
Lycée C & R Janot, Sens.

Ce problème, posé aux élèves de seconde en 1947 par Lebossé et Hémery[1] est un classique, voire un "incontournable". Ainsi, en 1484, Nicolas Chuquet dans sa *Géométrie*[2] demandait, parmi de nombreux autres problèmes d'inscription de figures, de *calculer le côté du carré inscrit dans un triangle équilatéral*. H. L'Huillier signale que c'est un problème classique chez les géomètres italiens (Fibonacci, Pacioli,...) où l'on trouve aussi un triangle isocèle (Piero de la Francesca) et même le triangle 13.14.15.

Au XVIII^e siècle, Etienne Bézout proposait d'*appliquer l'algèbre à la géométrie* pour construire ce carré.[3] En revanche, on ne trouve de traces de ce problème ni dans Les *Éléments* d'Euclide, ni dans les *Éléments de Géométrie* de Clairaut.

Au cours du temps les modes de résolution changent au gré des changements de programme : conformément au programme de 1931, P. Chenevier[4] propose aux élèves de seconde de procéder comme Bézout, sans le citer. En 1947, Lebossé et Hémery utilisent l'outil "homothétie". Aujourd'hui le programme de seconde 2000 fournit l'outil "triangles semblables". Attaché (pourquoi ?) à cet exercice, je l'ai alors proposé aux élèves en problème ouvert, sans grand succès.

Et les élèves ? Comment font-ils ?

Il y a ceux qui construisent un rectangle et qui cherchent en vain à le transformer en carré et ceux qui, par des constructions "miraculeuses", pensent avoir trouvé la solution Il faut alors beaucoup de temps et de persuasion pour les convaincre (le sont-ils vraiment ?) de leurs erreurs. Avant que tout le monde ne se décourage, il faut renoncer à examiner ces solutions et proposer d'autres pistes. On comprend bien pourquoi l'Académie Royale des Sciences a fini, sous l'impulsion de d'Alembert, par ne plus examiner les solutions au problème de la quadrature du cercle.

Certains ont ainsi construit un carré dans le triangle et ont modifié le troisième côté de ce triangle ; Thalès ou les triangles semblables permettant de trouver la solution. Les autres ont inscrit des carrés de différentes tailles (voir la fig. 1) et ont... observé ; ils conjecturent alors assez vite un alignement qui leur permet de conclure. Au risque de choquer les puristes, cette méthode s'apparente fort à la méthode de fausse position utilisée en algèbre : une "fausse position" du sommet M sur un des côtés permet d'en déduire la bonne solution. Ce n'est pas surprenant dans la mesure où, dans les deux cas, il s'agit d'un problème de proportionnalité ; dans le cas géométrique, le mot position retrouve son sens traditionnel.

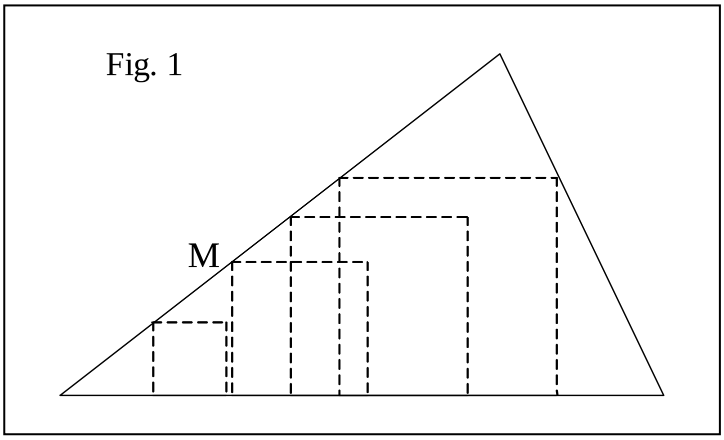
---

[1] C. Lebossé & C. Hémery, *Géométrie Plane*, Classe de Seconde des collèges et lycées, Fernand Nathan, 1947. 6^e édition, 1951.

[2] Manuscrit de 1484, transcrit et commenté par Hervé L'Huillier, *La Géométrie de Nicolas Chuquet, première géométrie en langue française*, Paris, Vrin, 1979.

[3] E. Bézout, *Cours de Mathématiques à l'usage du Corps Royal de l'Artillerie,* (4 tomes), Paris, Ph. D. Pierres, 1788. L'édition originale parut en 1770 à l'Imprimerie Royale. Le *Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine* avait été publié à Paris en 6 volumes à partir de 1764.

[4] Pierre Chenevier, *Cours d'algèbre*. [...] *Classe de seconde.* Paris, Hachette1931.



Mis à part cette remarque qui avait plu aux élèves, cette activité reste relativement pauvre. Heureusement Bézout allait arriver.

Malgré le handicap de n'être pas bourguignon[5], la proximité de sa ville natale - Nemours n'est qu'à dix lieues de Sens - est peut-être une des raisons pour lesquelles la bibliothèque municipale de cette ville possède plusieurs de ses ouvrages.[6] Le théorème d'arithmétique qu'on lui attribue restait un bon souvenir de Terminale C et constituait une invitation à en savoir plus sur ce mathématicien du XVIII^e^.

Si le tome 1 (Arithmétique et géométrie) de son *Cours de Mathématiques* est assez classique, le tome 2 ("contenant l'algèbre & l'application de l'algèbre à la géométrie") comporte en revanche plusieurs idées originales. La suite de cet article présente une activité construite à partir de sa méthode d'inscription du carré dans le triangle (on la trouvera *in extenso* en annexe.)

On a utilisé les heures en demi-classe et réparti les élèves en groupes de trois ou quatre.

Déroulement de la 1ère séance : (55 min)[7]

ex 1 :

Voici le texte, sans la figure, d'un problème posé par Etienne Bézout (1) dans son Cours de Mathématiques à l'usage du Corps Royal de l'Artillerie (Édition de 1788) :

> Proposons- nous donc pour première
> question, de *décrire un quarré* ABCD (fig.9)
> *dans un triangle donné EHI.*

(1) Etienne Bézout est un mathématicien né en 1730 près de Sens, à Nemours où le lycée porte son nom, et est mort aux Basses-Loges, près de Fontainebleau, en 1783.

1° Lire cet énoncé et reformuler la consigne pour qu'elle soit plus facilement comprise par un élève du XXI^e^ siècle.

---

[5] Non bourguignon, certes, mais que serait-il advenu si le duc Sans Peur n'avait été assassiné au pont de Montereau, à moins de quatre lieues de Nemours, en 1419 ?

[6] L'exemplaire de la Bibliothèque de Sens appartenait au citoyen français Bourbon Berset, lui a-t-il été confisqué en 1793 ?

[7] Le texte intégral en est donné en annexe.

Les élèves ont déjà travaillé sur un texte du XVIII^e (Le calcul approché de $\sqrt{20}$ par la méthode d'Euler). Ils traduisent tous, ou presque, "décrire" par "inscrire" sans difficulté.

2° On donne, en annexe, la solution de Bézout. Les questions posées ci-dessous doivent permettre de comprendre chaque étape de la construction et de la démonstration. La reproduction de la figure 9 étant de mauvaise qualité, on a ébauché une nouvelle figure que l'on complétera au fur et à mesure de la lecture.

Par ces mots, *un triangle donné*, nous entendons un triangle dans lequel tout est connu, les côtés, les angles, la hauteur, &c.

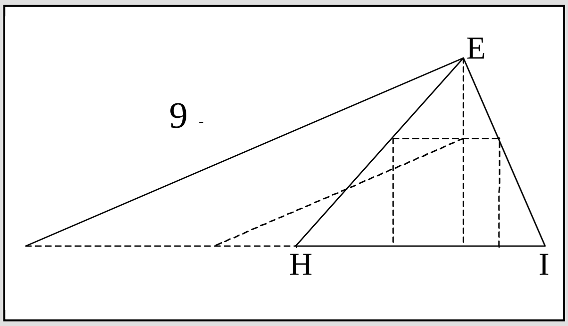
Avec un peu d'attention, on voit que cette question se réduit à trouver sur la hauteur EF un point G par lequel menant AB parallèle à HI, cette ligne AB soit égale à GF ; ainsi l'équation se présente tout naturellement, il n'y a qu'à déterminer l'expression algébrique de AB, & celle de FG, & ensuite les égaler.

Nommons donc a la hauteur connue EF ; b, la base connue HI, & x la ligne inconnue GF ; alors EG vaudra $a — x$.

Or puisque AB est parallèle à HI, on doit (*Géom.* 109) avoir $EF : EG :: FI : GB :: HI : AB$; c'est-à-dire, $EF : GE :: HI : AB$, ou $a : a — x :: b : AB$, donc (*Arith.* 169) $AB == \frac{ab - bx}{a}$; puis donc que AB doit être égal à GF, on aura $\frac{ab - bx}{a} == x$; d'où, par les règles de la première Section, on tire $x == \frac{ab}{a+b}$.

Pour construire cette quantité, il faut, conformément à ce que nous avons dit (184), trouver une quatrième proportionnelle à $a + b$, b, & a, ce que l'on exécutera en cette manière. On portera de F en O une ligne FO égale à $a + b$, c'est-à-dire égale à $EF + HI$, & l'on tirera EO ; puis ayant pris FM égale à $HI == b$, on mènera, parallèlement à EO, la ligne MG, qui par sa rencontre avec EF, déterminera GF pour la valeur de x; car les triangles semblables EFO, GFM, donnent $FO : FM :: FE : FG$, ou $a + b : b :: a : FG$; FG vaudra donc $\frac{ab}{a+b}$.

109. *Deux triangles qui ont les angles égaux chacun à chacun, ont les côtés homologues proportionnels, & sont, par conséquent, semblables.*



a. Lire les lignes 1 à 3 et observer la figure : la consigne a-t-elle été bien traduite ?

b. Lire les lignes 4 à 10 et expliquer ce que veut faire l'auteur.

c. Lire les lignes 11 à 13 : Comment les données et les inconnues sont-elles nommées ?

d. Lire les lignes 14 & 15: Quel théorème du cours de seconde reconnaît-on dans le paragraphe donné en bas de page sous la référence *Géom.109* ?

e. Écrire les rapports que l'on peut déduire de la similitude des triangles, puis observer comment ces proportions étaient écrites au XVIII^e siècle (lignes 15 à 17.)

On lit : *EF est à EG comme FI est à GB, comme* ....

Par exemple : "6 est à 2 comme 21 est à 7" ou "40 est à 5 comme 96 est à..."

f. Dans la section *Arithmétique* de l'ouvrage, au paragraphe 169, Bézout rappelle simple ment les règles de calcul qui permettent de transformer des rapports.

Lire alors les lignes 18 à 20 et refaire les calculs.

Vérifier que l'on obtient bien : $x = \frac{ab}{a+b}$.

g. Lire les lignes 21 à 23. Quelle est la quatrième proportionnelle à $a + b$, b et a ?

Dans le paragraphe 184, Bézout rappelle que l'on sait construire cette quatrième proportionnelle à la règle et au compas.

h. Lire et comprendre la méthode de Bézout (lignes 24 à 29), en notant, au fur et à mesure sur la figure, les lettres correspondantes.

i. A quoi les lignes 30 à 33 servent-elles ?

Commentaires :

a. Les élèves ont beaucoup de difficultés à admettre l'expression *triangle donné* : "On n'a pas le droit de mesurer, donc on ne connaît rien !" Toute la difficulté de la détermination d'une donnée par une lettre resurgit.

b. Même les élèves qui "voient" ce que Bézout veut faire ("s'il trouve G, il aura le carré") rechignent à l'exprimer. La plupart d'entre eux préfère se lancer directement dans la résolution sans annoncer d'abord la stratégie choisie, ce n'est pas nouveau.

c. Pas de difficulté.

d. On reconnaît sans hésiter les triangles semblables, et l'expression *égaux chacun à chacun* est jugée plus précise que l'énoncé proposé dans le cours.

e. & f. Le guidage proposé pour comprendre cette partie a éliminé toute difficulté. Il serait peut-être plus riche de les aider moins et de les laisser chercher davantage.

g. Peu d'élèves comprennent le terme *quatrième proportionnelle*, ils maîtrisent pourtant assez bien les tableaux de proportionnalité vus en collège, mais ils les considèrent peut-être comme une boîte noire.

h. C'est une partie délicate. S'ils savent établir des proportions dans des circonstances données, ils n'imaginaient pas que l'on puisse provoquer des situations pour en créer. Je leur ai signalé que Descartes, mais aussi d'autres avant lui, remplaçait le côté de longueur $a + b$ par un côté de longueur 1 et obtenait ainsi le produit $a \times b$ de deux nombres donnés. Quelques élèves ont tenu à vérifier.

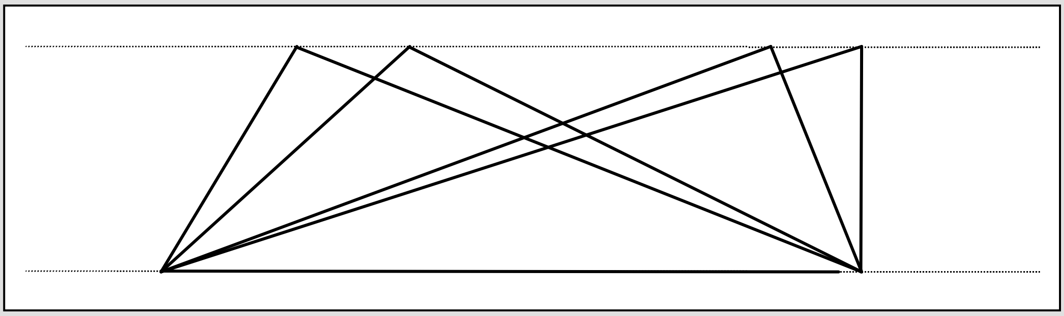
i. Pas de difficulté.

Séance n° 2 : (55 min)

ex 2 :

On a vu que la méthode de Bézout consistait à construire la grandeur $x = \frac{ab}{a+b}$.

1° Expliquer pourquoi les carrés inscrits dans chacun des quatre triangles ci-dessous sont égaux.



2° En déduire un troisième mode de construction du carré inscrit, en utilisant le triangle le plus approprié parmi les quatre proposés.

Commentaires :

1°. Pas de difficulté.

2° Chacun se doute que c'est le triangle rectangle le plus pratique (mais c'est le seul triangle particulier, il faudrait proposer aussi un triangle isocèle pour voir) moins nombreux sont ceux qui réussissent. Ceux-là tracent la bissectrice, non parce que tout point de la bissectrice est équidistant des côtés de l'angle droit, mais parce que la diagonale du carré est à 45°.

Toutes ces solutions sont astucieuses et peuvent susciter l'admiration de quelques-uns, mais les autres se demandent pourquoi s'ingénier à inscrire des figures dans d'autres figures : "Déjà qu'on a du mal à construire le cercle inscrit dans un triangle !" Hélas ! Aucun des auteurs cités plus haut ne répond à cette question. On trouve bien aujourd'hui, dans les manuels d'analyse de 1ère, une échelle de 6 m que l'on ne peut approcher du pied du mur autant qu'on le voudrait à cause d'un bloc de béton cubique de 1 m^3 ; la question étant de savoir quelle hauteur on va pouvoir atteindre. Mais on peut difficilement croire que ce problème seul a motivé Bézout et tous les autres;

Alors imaginons ......

ex 3 :

Reprenons la formule de Bézout $x = \frac{ab}{a+b}$.

Cette relation peut s'écrire aussi : (rayer la relation fausse**)**

$\frac{x}{a} = \frac{b}{a+b}$ ou $x(a+b) = ab$ ou $x = \frac{b}{1+b}$ ou $\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Entourer celle qui a été utilisée lors de la construction de Bézout et faire vérifier.

Dans les exercices qui suivent, on va utiliser les autres formes.

Commentaires

Il est plus prudent de vérifier soigneusement tous ces résultats, les simplifications sont parfois fantaisistes (on l'a bien cherché !) La dernière forme est souvent rejetée et la réduction au même dénominateur n'est réussie qu'au terme de beaucoup de souffrances.

ex 4 :

Définition : *a* et *b* étant deux nombres positifs donnés, le nombre *y* défini par la relation $\frac{1}{Y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ s'appelle la *moyenne harmonique* de *a* et *b*.
(Elle a peut-être été inventée par les Pythagoriciens pour la musique).

1° Exemples : **a.** Vérifier que 7 est la moyenne harmonique de 4 et 28.
b. Résoudre l'exercice (travail personnel) pour la prochaine séance.

2° Trouver une relation entre y et le côté x du carré construit précédemment.

3° Ainsi, inscrire un carré dans un triangle permet de construire "à la règle et au compas" la moyenne harmonique de deux nombres *a* et *b* donnés, il suffit pour cela de :

Construire le double de *x*	☐	Doubler d'abord *a* dans le triangle	☐
Doubler d'abord *b* dans le triangle	☐	Doubler d'abord *a* et *b* dans le triangle	☐

(Cocher les bonnes réponses et faire vérifier)

Commentaires :

2° Ce calcul est encore insurmontable pour trop d'élèves.

1° et 3° Bien réussi en général.

S'il s'agissait réellement d'un mode de construction de la moyenne harmonique, il serait étonnant qu'Euclide n'ait pas proposé sa propre solution dans les *Éléments*, alors qu'il connaissait ces moyennes et qu'il donne une construction de la moyenne géométrique de *a* et *b*.

Or, si l'on écrit la relation de Bézout sous la forme $ab = (a + b)x$, le problème revient à égaler deux aires de parallélogrammes (ou de rectangles), l'un donné par sa base *a* et sa hauteur *b*, l'autre par sa base $a + b$, et sa hauteur cherchée. La construction découle alors directement de la proposition VI.24 des *Éléments*.[8]

ex 5 : *(à commencer en classe si vous êtes en avance, à terminer à la maison.)*

1° Construire un rectangle MNPQ et un rectangle MRSQ qui contient MNPQ et dont la longueur MR vaut MN + NP.

2° La diagonale [MS] coupe [NP] en T. La parallèle à (MN) passant par T coupe [MQ] en U et [RS] en V.
a. Montrer que les rectangles TPQU et NRVT ont même aire.
b. En déduire que les rectangles MRVU et MNPQ ont même aire.

3° On appelle *a* et *b* les longueurs respectives NP et MN.
A l'aide d'une des relations de l'exercice 3 non encore utilisée, donner la valeur de la longueur NT.
(Cette dernière méthode de construction est due à Euclide au III^e siècle av. J.C)

[8] Clairaut traite aussi cette question dans la seconde partie, paragraphes V et VI, pp. 77 et suivantes de ses *Élémens de Géometrie*, Paris, David, 1753 (réimpression par Siloë, Laval, 1987.)

Commentaires :

1° & 2° Bien réussi : tout le monde utilise, sans aide, l'égalité des triangles situés de part et d'autre de la diagonale.

3° Peu réussissent, il faudrait peut-être demander d'exprimer les aires de ces deux rectangles.

Cette activité 2 est assez longue, et plusieurs groupes ont dû terminer seuls à la maison, ce qui a ajouté à la difficulté. Cet exercice a été corrigé la semaine suivante. Les deux méthodes de construction (Bézout et Euclide) ont été présentées sur des transparents. Les analogies observées renforcent l'idée qu'on inscrit un carré dans un triangle pour obtenir une moyenne harmonique. Les élèves sont perplexes, ils se demandent si leur professeur de mathématiques a le droit de faire de telles hypothèses. Promesse leur est faite de les informer de toute "protestation" émanant de lecteurs de cet article.

exercice de travail personnel :

1° En musique, une corde de longueur L produit un son lorsqu'elle vibre.
Une corde de longueur L/2 donnera le même son, mais une octave plus haut (plus aigu). Pour obtenir un son moyen entre les deux précédents, on utilise une corde dont la longueur L' est la moyenne harmonique des deux longueurs précédentes.
Montrer que L' = 2L/3.
(Cette méthode a été utilisée par Pythagore pour construire une gamme qui porte son nom et qui a été peu modifiée depuis.)

2° Un cycliste grimpe un col à la vitesse moyenne de 18 $km.h^{-1}$ puis le redescend à la vitesse moyenne de 42 $km.h^{-1}$.
Calculer la vitesse moyenne de ce cycliste sur l'ensemble du trajet aller-retour.
Que représente cette moyenne pour les deux vitesses de montée et de descente ?

Commentaires :

La question 1° (corde) ne soulève pas de difficulté particulière, malgré une certaine incrédulité face à ce Pythagore-là. La seconde (vitesse), en revanche, est moins bien réussie : une partie des élèves calcule évidemment la moyenne arithmétique, l'autre, "flairant" le piège, utilise la bonne moyenne, mais peu justifient ce résultat correctement.

Pour finir, on a remarqué qu'une même formule écrite de différentes manières pouvait conduire à autant de méthodes différentes et on a pris rendez-vous un peu plus tard pour utiliser la dernière formule avec la fonction inverse (même s'il ne s'agit plus d'une construction à la règle et au compas, les manipulations sur la courbe peuvent se révéler intéressantes)

Conclusion :

Cette activité pourra paraître longue à certains collègues (deux séances de module et trente minutes de corrections), les calculs posant bien plus de difficultés que les démonstrations géométriques. Il est quand même intéressant de mêler différents domaines des mathématiques (ici algèbre et géométrie, en dehors du cas habituel du calcul dans un repère) ainsi que différentes époques (antiquité et XVIII^{e} siècle) pour montrer que les mathématiques se construisent et s'enrichissent progressivement, en un mot qu'elles "bougent"... même s'ils trouvent que leur professeur exagère un peu avec ses hypothèses. Beaucoup, enfin, ont bien compris que pour résoudre un problème plusieurs stratégies sont possibles.

Annexe : Texte des activités

2°5 (02-03) | **Mod. 04** | **Un carré dans un triangle**

Objectif :

Inscrire un carré dans un triangle donné.
Justifier la construction proposée.
Traiter quelques applications.

Organisation du travail sur deux séances d'une heure en demi-classe :

Constituer des groupes de trois ou quatre élèves.

Prérequis :

Les triangles semblables.

Séance n° 1 : mardi 10 décembre 2002

Activité 1 : un carré dans un triangle.

ex 1 :

Voici le texte, sans la figure, d'un problème posé par Etienne Bézout (1) dans son Cours de Mathématiques à l'usage du Corps Royal de l'Artillerie (Édition de 1888)[9] :

> 251. Propoſons-nous donc pour premiere queſtion, de *décrire un quarré* ABCD (Fig. 13) *dans un triangle donné* EHI.

(1) Etienne Bézout est un mathématicien né en 1730 près de Sens, à Nemours où le lycée porte son nom, et est mort aux Basses-Loges, près de Fontainebleau, en 1783.)

1° Lire cet énoncé et reformuler cette consigne pour qu'elle soit plus facilement comprise d'un élève du XXI^e siècle.

Bilan collectif.

2°5 (02-03) - 1/4 - Module 04

[9] Pour des raisons techniques (qualité de l'image), nous avons substitué aux illustrations originales des photographies prises à la Bibliothèque Municipale de Beaune, à partir du *Cours de Mathématiques à l'usage des gardes du Pavillon et de la Marine*, vol. III, 1766. Le texte et l'illustration sont identiques, à la numérotation près (F. M.)

2° On donne, en annexe, la solution de Bézout. Les questions posées ci-dessous doivent permettre de comprendre chaque étape de la construction et de la démonstration.

La reproduction de la figure 9 étant de mauvaise qualité, on a ébauché une nouvelle figure que l'on complétera au fur et à mesure de la lecture.

a. Lire les lignes 1 à 3 et observer la figure : la consigne a-t-elle été bien traduite ?

b. Lire les lignes 4 à 10 et expliquer ce que veut faire l'auteur.

c. Lire les lignes 11 à 13 : Comment les données et les inconnues sont-elles nommées ?

d. Lire les lignes 14 & 15: Quel théorème du cours de seconde reconnaît-on dans le paragraphe donné en bas de page sous la référence *Géom.109* ?

e. Écrire les rapports que l'on peut déduire de la similitude des triangles, puis observer comment ces proportions étaient écrites au XVIIIème siècle (lignes 15 à 17).

On lit : « EF est à EG comme FI est à GB, comme .... »

Par exemple : « 6 est à 2 comme 21 est à 7 » ou « 40 est à 5 comme 96 est à .... »

f. Dans la section Arithmétique de l'ouvrage, au paragraphe 169, Bézout rappelle simplement les règles de calcul qui permettent de transformer des rapports.

Lire alors les lignes 18 à 20 et refaire les calculs.

Vérifier que l'on obtient bien : $x = \frac{ab}{a+b}$

g. Lire les lignes 21 à 23. Quelle est la quatrième proportionnelle à $a + b$, b et a ?

Dans le paragraphe 184, Bézout rappelle que l'on sait construire cette quatrième proportionnelle à la règle et au compas.

h. Lire et comprendre la méthode de Bézout (lignes 24 à 29), en notant, au fur et à mesure sur la figure, les lettres correspondantes.

i. A quoi les lignes 30 à 33 servent-elles ?

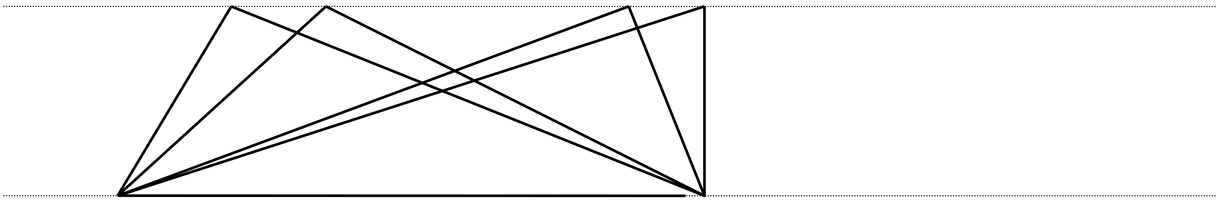
3° Préparer une présentation succincte de la méthode utilisée, qui sera proposée aux autres groupes lors de la prochaine séance.

Séance n° 2 : mardi 17 décembre 2002

ex 2 :

On a vu que la méthode de Bézout consistait à construire la grandeur $x = \frac{ab}{a+b}$

1° Expliquer pourquoi les carrés inscrits dans chacun des quatre triangles ci-dessous sont égaux.



2° En déduire un troisième mode de construction du carré inscrit, en utilisant le triangle le plus approprié parmi les quatre proposés.

Activité 2 : Applications

ex 3 :

Reprenons la formule de Bézout : $x = \frac{ab}{a+b}$.

Cette relation peut s'écrire aussi : Rayer la relation fausse.

$\frac{x}{a} = \frac{b}{a+b}$ ou $x(a+b) = ab$ ou $x = \frac{b}{1+b}$ ou $\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Entourer celle qui a été utilisée lors de la construction de Bézout et faire vérifier.
Dans les exercices qui suivent, on va utiliser les autres formes.

ex 4 :

Définition : a et b étant deux nombres positifs donnés, le nombre y défini par la relation $\frac{1}{Y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ s'appelle la *moyenne harmonique* de a et b.

(elle a peut-être été inventée par les Pythagoriciens pour la musique).

1° Exemples : **a.** Vérifier que 7 est la moyenne harmonique de 4 et 28.
b. Résoudre l'exercice (travail personnel) pour la prochaine séance.

2° Trouver une relation entre y et le côté x du carré construit précédemment.

3° Ainsi, inscrire un carré dans un triangle permet de construire « à la règle et au compas » la moyenne harmonique de deux nombres a et b donnés, il suffit pour cela de :

Construire le double de x	☐	Doubler d'abord a dans le triangle	☐
Doubler d'abord b dans le triangle	☐	Doubler d'abord a et b dans le triangle	☐

(Cocher les bonnes réponses et faire vérifier)

exercice 5 : *(à commencer en classe si vous êtes en avance, à terminer à la maison.)*

1° Construire un rectangle MNPQ et un rectangle MRSQ qui contient MNPQ et dont la longueur MR vaut MN + NP.

2° La diagonale [MS] coupe [NP] en T.
La parallèle à (MN) passant par T coupe [MQ] en U et [RS] en V.

a. Montrer que les rectangles TPQU et NRVT ont même aire.
b. En déduire que les rectangles MRVU et MNPQ ont même aire.

3° On appelle a et b les longueurs respectives NP et MN.

A l'aide d'une des relations de l'exercice 3 qui n'a pas encore été utilisée, donner la valeur de la longueur NT.
(Cette dernière méthode de construction est due à Euclide au IIIème siècle av. J.C.)

exercice : (travail personnel)

1° En musique, une corde de longueur L produit un son lorsqu'elle vibre..
Une corde de longueur L/2 donnera le même son, mais une octave plus haut (plus aigu)
Pour obtenir un son moyen entre les deux précédents, on utilise une corde dont la longueur L' est la moyenne harmonique des deux longueurs précédentes.
Montrer que L' = 2L/3.
(Cette méthode a été utilisée par Pythagore pour construire une gamme qui porte son nom et qui a été peu modifiée depuis.

2° Un cycliste grimpe un col à la vitesse moyenne de 18 $km.h^{-1}$ puis le redescend à la vitesse moyenne de 42 $km.h^{-1}$.
Calculer la vitesse moyenne de ce cycliste sur l'ensemble du trajet aller-retour.
Que représente cette moyenne pour les deux vitesses de montée et de descente ?

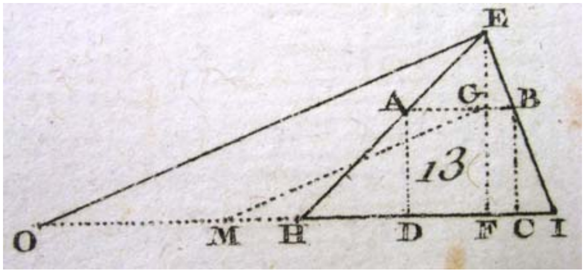
2°5 (02-03) **Un carré dans un triangle** **Feuille annexe**

E. Bézout : Extrait du *Cours de Mathématiques à l'usage des gardes du Pavillon et de la Marine,* vol. III, 1766, pages 305 et 306.

Par ces mots, *un triangle donné*, nous entendons un triangle dans lequel tout eſt connu, les côtés, les angles, la hauteur &c.

Avec un peu d'attention, on voit que cette queſtion ſe réduit à trouver ſur la hauteur EF un point G par lequel menant AB

ALGEBRE. V



306 COURS

parallele à HI, cette ligne AB ſoit égale à GF; ainſi l'équation ſe préſente tout naturellement; il n'y a qu'à déterminer l'expreſſion algébrique de AB, & celle de GF, & enſuite les égaler.

Nommons donc a la hauteur connue EF; b, la baſe connue HI, & x la ligne inconnue GF; alors EG vaudra $a-x$.

Or puiſque AB eſt parallele à HI, on doit (*Géom.* 115) avoir $EF:EG::FI:GB::HI:AB$; c'eſt-à-dire, $EF:EG::HI:AB$, ou $a:a-x::b:AB$; donc (*Arith.* 179) $AB=\frac{ab-bx}{a}$; puis donc que AB doit être égal à GF, on aura $\frac{ab-bx}{a}=x$; d'où, par les regles de la premiere Section, on tire $x=\frac{ab}{a+b}$.

Pour conſtruire cette quantité, il faut, conformément à ce que nous avons dit (246), trouver une quatrieme proportionnelle à $a+b$, b, & a, ce que l'on exécutera en cette maniere. On portera de F en O une ligne FO égale à $a+b$, c'eſt-à-dire, égale à $EF+HI$, & l'on tirera EO; puis ayant pris FM égale à $HI=b$, on menera, parallélement à EO, la ligne MG, qui par ſa rencontre avec EF, déterminera GF pour la valeur de x; car les triangles ſemblables EFO, GFM donnent $FO:FM::FE:FG$, ou $a+b:b::a:FG$; FG vaudra donc $\frac{ab}{a+b}$.

Proposition référencée avec le n° 115 dans le texte ci-dessus :

109. *Deux triangles qui ont les angles égaux chacun à chacun, ont les côtés homologues proportionnels, & ſont, par conſéquent, ſemblables.*

Candide face à l'infiniment petit : une introduction de la dérivation avec des textes anciens.

Frédéric Métin,
Lycée "Le Castel", Dijon.

Les Mathématiques et les Lettres

Les programmes des diverses disciplines des lycées ne sont pas contradictoires : on pense bien sûr que les mathématiques et les sciences physiques se rencontrent naturellement, à ceci près que la notion de "discipline de service" imposée il y a quelques années par les penseurs de l'Éducation Nationale induit un rapport de dépendance déplaisant. Et si la physique était plutôt une partie des mathématiques ? À moins que ce ne soit le contraire… L'introduction d'une perspective historique dans le cours de mathématiques rapproche étonnamment ces dernières de la philosophie et des Lettres, car certains auteurs majeurs des XVII^e^ et XVIII^e^ siècles furent des phares de toutes ces disciplines : qu'on pense à Descartes, à Pascal, à Leibniz, etc. D'un point de vue scolaire, les liens sont encore plus évidents.

Les élèves sont les mêmes du cours de Français au cours de maths, les deux se suivant même parfois ; nous trouvons donc nos élèves devant la leçon sur le second degré l'esprit occupé par des vers de Musset (que l'on peut prendre aussi au second degré...), ou au contraire, écoutant les récits de Voltaire en craignant de se faire interroger l'heure suivante sur des exercices qu'ils n'ont pas faits ! Est-ce que j'exagère vraiment ?

Les thèmes des cours de mathématiques et de Français du lycée ont plus d'un point commun : l'époque, le passage de l'âge baroque au siècle des Lumières, la vision du monde qui se dégage de la tutelle divine, la place de plus en plus grande accordée à la raison, la modernité. L'introduction au calcul différentiel se prête particulièrement bien au travail interdisciplinaire ; la naissance du calcul différentiel est en effet l'un de ces thèmes fascinants auxquels les historiens s'intéressent en tant que révolutions scientifiques, d'autant plus que cette révolution se fit dans la durée mais sans douceur, donnant lieu à l'une des plus célèbres querelles de paternité de l'histoire des sciences[1], entre partisans de Newton (dont Voltaire ne fut pas le moins virulent) et partisans de Leibniz (en particulier quelques Bernoulli et le Marquis de L'Hospital).

Il semble que les deux grands savants ont inventé presque en même temps le concept de dérivée (ou quelque chose d'approchant) au tournant du XVIII^e^ siècle ; mais Newton en a tiré plus de crédit pour de multiples raisons, dont en particulier le côté visionnaire et révolutionnaire de sa théorie de l'attraction universelle. En effet, la compréhension du fondement mathématique de cette nouvelle vision du monde passait par celle de sa *théorie des fluxions* (ce qui n'est pas une mince affaire...), alors que la compréhension du travail de Leibniz ne devait sûrement être indispensable qu'aux seuls spécialistes. En outre, les questions métaphysiques n'interfèrent pas sur les questions scientifiques chez Newton (elles se posent ensuite, et permettent d'intéressantes digressions, même pour ceux qui n'ont rien compris !), alors que chez Leibniz elles en sont le fondement même, et sa théorie des différentielles vaut pour elle-même, ce qui ne favorise pas sa diffusion auprès du grand

[1] Une querelle de ce type peut parfaitement se retrouver entre deux enseignants, puisque les littéraires auront forcément tendance à penser comme Voltaire et que les scientifiques défendront plutôt Leibniz...

public. En France au siècle des Lumières, il fallait être newtonien (ou le devenir), c'était la modernité, la route vers cet aboutissement de la science triomphante. Il fallait donc défendre la priorité newtonienne, face aux prétentions continentales si marquées par la philosophie scolastique nettement moins "excitante", il fallait défendre l'Angleterre des empiristes, modèle de liberté et de vie démocratique. Pourtant, la notation que nous employons encore est bien celle de Leibniz et de L'Hospital, et nos réflexions sur le *dx* sont nées de leurs travaux. Notre connaissance semble bien ténue, ne commettrions nous pas une injustice *à la Voltaire* ?

Voltaire (et Émilie…)

Au vu de ces problèmes, le professeur de mathématiques ne peut que réagir à la présentation "voltairienne" qui est faite de Leibniz, à travers l'étude de Candide et du personnage de Pangloss. La mention qui en est faite n'est qu'une allusion souvent superficielle au ridicule des théories métaphysiques du savant allemand ou de son disciple Wolff, vues à travers la plume acide de notre si brillant écrivain (c'est le fameux "Tout va pour le mieux dans le meilleur des mondes"). Il ne devait pas faire bon être l'objet des attaques de Monsieur Arouet ! Ce dernier est certes un des plus grands génies de notre littérature (il suffit de compulser le catalogue de la Bibliothèque Nationale pour comprendre à quel point il fut prolixe[2]), mais on pourrait lui reprocher de manier le verbe plus vite que son ombre, d'avoir une fâcheuse tendance à se prendre pour un inquisiteur[3] ! Ses attaques contre Leibniz ne sont pas totalement infondées, si l'on considère qu'il est peut-être question de la façon dont Dieu est présent au monde, si le combat oppose en fait deux conceptions du divin : le "monarque de la plus parfaite des républiques"[4] contre le "Grand Architecte" (Voltaire était-il libre-penseur ?)

Mais mettez-vous à la place du pauvre professeur de mathématiques : puisque de nos jours tout se sait, il se trouve forcément un des élèves pour avoir déjà entendu parler de Leibniz comme fondateur avec (ou contre) Newton du calcul différentiel, c'est en effet une idée devenue assez commune et très peu nombreux sont ceux qui attribuent un rôle à Pascal ou à la théorie des indivisibles, mais c'est une autre histoire... Une question de légitimité se pose donc assez vite : comment défendre un cours si important du programme de première, alors que son inventeur est ridiculisé ? Le professeur de Français mettant le cours de mathématiques en danger, il faut protéger ce dernier ! Avant d'adopter un point de vue tranché sans connaître le fond du problème (à la manière d'un spectateur des "Guignols de l'info" qui voterait pour un candidat en pensant à sa marionnette), il faut écouter les opinions des défenseurs (ou des accusateurs selon les cas).

Voici quel était mon état d'esprit en m'essayant à un exercice tout nouveau : la lecture de textes "littéraires" en classe. Il s'agissait avant tout 1) de réhabiliter Leibniz dans l'esprit de mes élèves, 2) de leur apporter des arguments en vue de leur bac de Français, 3) d'introduire le calcul différentiel sur le terrain des infiniment petits en abordant directement leur statut, le fond du problème étant souvent de savoir de quoi on parle, et 4) de créer des liens entre les cours de Français et de Mathématiques.

---

[2] Un volume entier est consacré à ses œuvres, si vous comprenez encore ce terme qui fait référence au catalogue papier et non pas "en ligne".

[3] Dur, dur d'écraser l'infâme dans ces conditions !

[4] *Discours de Métaphysique*, § XXXVI,

Les courts textes qui suivent sont extraits de la préface à la deuxième édition française de l'ouvrage d'Isaac Newton *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (les principes mathématiques de la philosophie naturelle, c'est-à-dire de la physique). Fait remarquable pour cette époque, la traduction a été effectuée par Émilie du Châtelet, qui fut l'une des femmes les plus importantes dans la vie de Voltaire : elle était en effet sa maîtresse "officielle" (et lui son "officiel" amant), puisqu'ils ont vécu ensemble cinq ans au château de Cirey, près de Chaumont (le mari consentant habitait pendant ce temps à Semur-en-Auxois, où il rencontra sans doute Buffon, autre grand traducteur de Newton, le monde est petit !) Cette édition parut après la mort d'Émilie, que Voltaire avait délaissée, mais peut-on mettre en doute les accents de sincère tristesse qui se dégagent de ces écrits ? C'est en tout cas l'occasion d'arrimer les dérivées à un contenu imaginaire et affectif.

La préface commence par un hommage appuyé aux talents d'Émilie, qui, <u>en plus</u> est UNE FEMME !

> *Cette traduction que les plus savans Hommes de France devoient faire, & que les autres doivent étudier, une femme l'a entreprise & achevée à l'étonnement & à la gloire de son pays. Gabrielle-Emilie de Breteuil, Marquise du Châtelet, est l'Auteur de cette Traduction, devenue nécessaire à tous ceux qui voudront acquérir ces profondes connoissances, dont le monde est redevable au grand Newton.*

N'oublions pas que Voltaire est profondément newtonien, qu'il voit en ce savant anglais le génie parachevant la physique, frappant un grand coup contre la métaphysique cartésienne et la délirante théorie des tourbillons (qui, soit dit en passant, n'est peut-être pas si délirante que ça : qui sait comment a été reçue la théorie atomique au temps d'Epicure et de Démocrite ?) Il écrit par exemple dans une *Lettre sur la Physique de Newton*, également reproduite dans les *Principia* :

Déja ces tourbillons, l'un par l'autre pressés,
Se mouvant sans espace, & sans régles entassés,
Ces fantômes sçavans à mes yeux disparoissent […]
Vers un centre commun tout gravite à la fois.
Ce ressort si puissant, l'âme de la nature,
Etoit enseveli dans une nuit obscure
Le compas de Newton, *mesurant l'Univers,*
Leve enfin ce grand voile, & les Cieux sont ouverts.

Mais revenons à la préface des *Principes*. Pour célébrer le grand génie, Newton, il faut donc attaquer Leibniz ; le coup arrive quelques lignes après , avec cependant une précaution : la Marquise a déjà traduit un livre de ce dernier...

> *[...] On a vu deux prodiges : l'un que Newton ait fait cet Ouvrage ; l'autre qu'une Dame l'ait traduit & l'ait éclairci.*
>
> *Ce n'était pas son coup d'essai, elle avoit auparavant donné au Public une explication de la Phylosophie de Léibnitz sous le titre d'Institutions de Physique, adressées à son fils, auquel elle avoit enseigné elle-même la Géométrie.*
>
> *Le discours préliminaire qui est à la tête de ses Institutions est un chef d'œuvre de raison & d'éloquence : elle a répandu dans le reste du Livre une méthode & une clarté que Léibnitz n'eut jamais, & dont ses idées ont besoin, soit qu'on veuille seulement les entendre, soit qu'on veuille les réfuter.*

Après avoir rendu les imaginations de Léibnitz intelligibles, son esprit qui avoit acquis encore de la force & de la maturité par ce travail même, comprit que cette Métaphysique si hardie, mais si peu fondée, ne méritoit pas ses recherches. Son âme étoit faite pour le sublime, mais pour le vrai. Elle sentit que les monades et l'harmonie préétablie devoient être mises avec les trois élémens de Descartes, & que des systêmes qui n'étoient qu'ingénieux, n'étoient pas dignes de l'occuper. Ainsi, après avoir eu le courage d'embellir Léibnitz, elle eut celui de l'abandonner : courage bien rare dans quiconque a embrassé une opinion, mais qui ne coûta guères d'efforts à une âme qui étoit passionnée pour la vérité.

Voilà certainement la quintessence du talent allié à la plus profonde perfidie : quel style, quels renversements ! Et ce n'est pas fini, les grands penseurs en prennent tous pour leur grade, la bonne foi s'effaçant devant l'efficacité du trait.

S'il y avoit encore quelqu'un d'assez absurde pour soutenir la matière subtile & la matière cannellée, pour dire que la terre est un soleil encrouté, que la lune a été entraînée dans le tourbillon de la terre, que la matière subtile fait la pesanteur, & toutes ces autres opinions romanesques substituées à l'ignorance des Anciens, on diroit : Cet homme est Cartésien. S'il croyoit aux monades, on diroit : Il est Léibnitzien ; mais on ne dira pas de celui qui sçait les élémens d'Euclide, Qu'il est Euclidien : ni de celui qui sçait d'après Galilée en quelle proportion les corps tombent, Qu'il est Galiléiste. Aussi en Angleterre ceux qui ont appris le calcul infinitésimal, qui ont fait les expériences de la lumiére, qui ont appris le loix de la gravitation, ne sont point appellés Newtoniens : c'est le privilège de l'erreur de donner son nom à une Secte.

Si Platon avoit trouvé des vérités, il n'y eût point eu de Platonicien, & tous les hommes auraient appris peu à peu ce que Platon avoit enseigné ; mais parce que dans l'ignorance qui couvre la terre, les uns s'attachoient à une erreur, les autres à une autre, on combattoit sous différents étendards : il y avoit des Péripatéticiens, des Platoniciens, des Epicuriens, des Zénonistes, en attendant qu'il y eût des sages.

On ne peut tout de même pas reprocher à Voltaire cette dernière idée, surtout au siècle des Lumières, alors qu'a déjà commencé l'édition de l'*Encyclopédie* et que l'on croit au triomphe prochain de la Raison sur l'obscurantisme, au bonheur issu du contrat social. Néanmoins, Voltaire, au milieu de cette raison triomphante, ajoute la touche de l'écrivain :

C'étoit un avantage qu'elle eut sur Newton, d'unir à la profondeur de la Philosophie, le goût le plus vif & le plus délicat pour les Belles Lettres.

On ne peut que plaindre un Philosophe réduit à la sécheresse des vérités, & pour qui les beautés de l'imagination & du sentiment sont perdues

Pour qui est ce dernier trait ? Pas si simple, comme on va le voir, puisque Leibniz, même s'il n'est pas très amusant, sait écrire, aime la beauté et chérit l'imagination.

D'autres textes sont intéressants pour cerner un peu l'état d'esprit de Voltaire, on pourrait même en proposer l'étude aux élèves, mais je ne les connaissais pas encore pour les aborder en classe. Par exemple, dans *Micromegas*,[5] on assiste à une discussion de philosophes :

[5] *Recueil des romans de Monsieur de Voltaire, contenant : Babouc, Memnon, Micromégas, le Songe de Platon, les Voyages de Scarmentado, Zadig et Candide...* Paris, 1764.

Enfin Micromégas leur dit : "Puisque vous savez si bien ce qui est hors de vous, sans doute vous savez encore mieux ce qui est en dedans. Dites-moi ce que c'est que votre âme, et comment vous formez vos idées." Les philosophes parlèrent tous à la fois comme auparavant ; mais ils furent tous de différents avis. Le plus vieux citait Aristote, l'autre prononçait le nom de Descartes ; celui-ci, de Malebranche ; cet autre, de Leibnitz ; cet autre, de Locke. Un vieux péripatéticien dit tout haut avec confiance : "L'âme est une entéléchie et une raison par qui elle a la puissance d'être ce qu'elle est. C'est ce que déclare expressément Aristote, page 633 de l'édition du Louvre." Il cita le passage. "je n'entends pas trop bien le grec, dit le géant. - Ni moi non plus, dit la mite philosophique. - Pourquoi donc, reprit le Sirien, citez-vous un certain Aristote en grec ? - C'est, répliqua le savant, qu'il faut bien citer ce qu'on ne comprend point du tout dans la langue qu'on entend le moins.

Le cartésien prit la parole et dit : "L'âme est un esprit pur qui a reçu dans le ventre de sa mère toutes les idées métaphysiques, et qui, en sortant de là, est obligée d'aller à l'école, et d'apprendre tout de nouveau ce qu'elle a si bien su et qu'elle ne saura plus. - Ce n'était donc pas la peine, répondit l'animal de huit lieues, que ton âme fût si savante dans le ventre de ta mère, pour être si ignorante quand tu aurais de la barbe au menton. Mais qu'entends-tu par esprit ? - Que me demandez-vous là ? dit le raisonneur ; je n'en ai point d'idée ; on dit que ce n'est pas la matière. - Mais sais-tu au moins ce que c'est que la matière ? - Très bien, lui répondit l'homme. Par exemple cette pierre est grise, est d'une telle forme, a ses trois dimensions ; elle est pesante et divisible. - Eh bien ! dit le Sirien, cette chose qui te paraît divisible, pesante et grise, me diras-tu bien ce que c'est ? Tu vois quelques attributs ; mais le fond de la chose, le connais-tu ? - Non, dit l'autre. –Tu ne sais donc point ce que c'est que la matière.

Alors M. Micromégas, adressant la parole à un autre sage qu'il tenait sur son pouce, lui demanda ce que c'était que son âme, et ce qu'elle faisait. "Rien du tout, dit le philosophe malebranchiste ; c'est Dieu qui fait tout pour moi ; je vois tout en lui, je fais tout en lui ; c'est lui qui fait tout sans que je m'en mêle. - Autant vaudrait ne pas être, reprit le sage de Sirius. - Et toi, mon ami, dit-il à un leibnitzien qui était là, qu'est-ce que ton âme ? - C'est, répondit le leibnitzien, une aiguille qui montre les heures pendant que mon corps carillonne ; ou bien si vous voulez, c'est elle qui carillonne pendant que mon corps montre l'heure ; ou bien mon âme est le miroir de l'univers, et mon corps est la bordure du miroir : tout cela est clair.

Et bien fait pour tous ceux qui accordent crédit à Malebranche, Descartes ou Leibniz ! Nous trouvons Voltaire moins persifleur dans ses *Élémens de la philosophie de Monsieur de Newton*,[6] par lesquels il a cherché à vulgariser la nouvelle science de l'attraction en Europe. La première partie est consacrée à la metapysique, le premier chapitre est intitulé "De Dieu", ce qui montre bien certains fondements philosophiques de la physique du XVIII[e] siècle, et la discussion porte encore sur une comparaison entre la pensée de Newton et celle de Descartes :

Toute la philosophie de Newton conduit nécessairement à la connaissance d'un Être suprême, qui a tout créé, tout arrangé librement. Car, si le monde est fini, s'il y a du vide, la matière n'existe donc pas nécessairement ; elle a donc reçu l'existence d'une cause libre. Si la nature gravite, comme cela est démontré, elle ne paraît pas graviter

[6] Parmi les nombreuses éditions, nous prenons nos extraits dans les *Œuvres complètes*, Physique, Philosophie de Newton, tome vingt-troisième, Paris, chez P. Plancher, éditeur, rue Poupée, n° 7, 1818.

de sa nature, ainsi qu'elle est étendue de sa nature ; elle a donc reçu de Dieu la gravitation. Si les planètes tournent en un sens plutôt qu'en un autre, dans un espace non résistant, la main de leur créateur a donc dirigé leurs cours en ce sens avec une liberté absolue.

Il s'en faut bien que les prétendus principes physiques de Descartes conduisent ainsi l'esprit à la connaissance de son créateur. A Dieu ne plaise que, par une calomnie horrible, j'accuse ce grand homme d'avoir méconnu la suprême Intelligence à laquelle il devait tant, et qui l'avait élevé de presque tous les hommes de ce siècle ! Je dis seulement que l'abus qu'il a fait quelquefois de son esprit, a conduit ses disciples à des précipices dont le maître était fort éloigné : je dis que le système cartésien a produit celui de Spinosa ; je dis que j'ai connu beaucoup de personnes que le cartésianisme a conduites à n'admettre d'autre Dieu que l'immensité des choses, et que je n'ai vu au contraire aucun newtonien qui ne fût théiste dans le sens le plus rigoureux.

Puis au chapitre VII, c'est le tour de Leibniz ; cette-fois, il est question de l'âme ;on pourra comparer avec l'extrait de *Micromegas* ci-dessus:

Newton ne s'était point fait de système sur la manière dont l'âme est unie au corps, et sur la formation des idées. Ennemi des systèmes, il ne jugeait de rien que par analyse ; et lorsque ce flambeau lui manquait, il savait s'arrêter.

Il y a eu jusqu'ici dans le monde quatre opinions sur la formation des idées : la première est celle de presque toutes les anciennes nations qui, n'imaginant rien au-delà de la matière, ont regardé nos idées dans notre entendement comme l'impression du cachet sur la cire. Cette opinion confuse était plutôt un instinct grossier qu'un raisonnement. Les philosophes qui ont voulu ensuite prouver que la matière pense par elle-même, ont erré bien davantage […]

Le second sentiment et le plus généralement reçu est celui qui, établissant l'âme et le corps comme deux êtres qui n'ont rien de commun, affirme cependant que Dieu les a créés pour agir l'un sur l'autre. La seule preuve qu'on ait de cette action est l'expérience que chacun croit en avoir […]

Le troisième système est celui des causes occasionnelles de Descartes, poussé encore plus loin par Malebranche. Il commence par supposer que l'âme ne peut avoir aucune influence sur le corps, et dès-là il s'avance trop ; car de ce que l'influence de l'âme sur le corps ne peut être conçue, il ne s'ensuit point du tout qu'elle soit impossible […]

Le quatrième sentiment est celui de l'harmonie préétablie de Leibnitz. Dans son hypothèse, l'âme n'a aucun commerce avec son corps ; ce sont deux horloges que Dieu a faites, qui ont chacune un ressort, et qui vont un certain temps dans une correspondance parfaite ; l'une montre les heures, l'autre sonne. L'horloge qui montre les heures ne la montre pas parce que l'autre sonne ; mais Dieu a établi leur mouvement de façon que l'aiguille et la sonnerie se rapportent continuellement. […] *L'union de l'âme et du corps est ici une chose très-superflue. Mais le reste du système de Leibnitz est bien plus extraordinaire ; on en peut voir les fondemens dans le Supplément aux actes de Leipsick, tome VII ; et on peut consulter les commentaires que plusieurs Allemands en ont faits amplement avec une méthode toute géométrique.*

Selon Leibnitz, il y a quatre sortes d'êtres simples, que l'on nomme monades, comme on le verra au chapitre IX. On ne parle ici que de l'espèce de monade, qu'on appelle notre âme. L'âme, dit-il, est une concentration, un miroir vivant de tout l'univers, qui a en soi toutes les idées confuses de toutes les modifications de ce monde, présentes, passées et futures. Newton, Locke et Clarke, quand ils entendirent parler d'une telle opinion, marquèrent pour elle un aussi grand mépris que si Leibnitz n'en avait pas été *l'auteur. Mais puisque de très-grands philosophes allemands se sont fait gloire d'expliquer ce qu'aucun Anglais n'a jamais voulu entendre, je suis obligé d'exposer avec clarté cette hypothèse du fameux Leibnitz, devenue pour moi plus respectable depuis que vous en avez fait l'objet de vos recherches.* […] *Tout être dans cet univers tient à l'univers, sans doute ; mais toute action de tout être n'est pas cause des événemens du monde. La mère de Brutus, en accouchant de lui, fut une des causes de la mort de César ; mais qu'elle ait craché à droite ou à gauche, cela n'a rien fait à Rome. Il y a des événemens qui sont effet et cause à la fois. Il y a mille actions qui ne sont que des effets sans suite.* […]

On comprend bien que le différend qui oppose les deux philosophes est bien plus complexe que ce que l'on en retient en général à la lecture de *Candide*. Et que tout n'est pas à jeter dans a philosophie de Leibniz.

Comme avoué plus haut, je n'ai pas abordé ces derniers textes avec les élèves. Et c'est tant mieux ! Vous imaginez, vous, une discussion pareille comme prologue à l'étude des dérivées ? Je m'attirerais forcément une remarque sarcastique "Eh ! Faudrait pas vous prendre pour un prof de philo !" Pourtant, même avec les seuls textes de Voltaire issus de l'édition des *Principia*, je n'avais donné la parole qu'à l'un des protagonistes, au risque de voir mon édifice futur de la dérivation sapé par le ridicule avant même son érection. Il me fallait donc pousser un peu plus loin l'équivoque entretenue par Voltaire lui-même.

Leibniz

Le premier problème, pour le défenseur de l'auteur de l'*Essai de Théodicée*, c'est d'entraîner les élèves au-delà du sens commun, qui depuis toujours met en doute l'existence de Dieu par le fait qu'il existe des guerres (version simple) ou plus généralement par l'existence du Mal (version approfondie). Faire dépasser, chez 24 adolescents, l'adhésion spontanée au bon sens de Candide n'est peut-être pas un but en soi, mais au moins montrer que le problème mérite d'être discuté, voilà déjà une avancée ; expliquer que pour Leibniz il s'agit tout bonnement de défendre la possibilité de Dieu face à l'existence du Mal, même si les élèves peuvent ensuite trouver que c'est beaucoup de discussion pour pas grand chose. Comprenons-nous bien, la question en soi n'est pas d'une importance capitale, en outre elle dépasse de loin les prérogatives d'un enseignant de Mathématiques et le contenu de son programme ! Mais cela permet aussi de considérer les autres écrits (sur la multiplicité, l'infini) d'une autre façon, et de rentrer de plain-pied dans les problèmes posés par les limites, le zéro et l'infini, la question des tangentes avec des longueurs infiniment petites mais non nulles, etc.

Pour ce qui est du "meilleur des mondes possibles", Leibniz s'appuie sur un principe fondamental :

[le principe de] raison suffisante, en vertu duquel nous considérons qu'aucun fait ne saurait se trouver vrai ou existant, aucune énonciation véritable, sans qu'il y ait une raison suffisante pourquoi il en soit ainsi et non pas autrement, quoique ces raisons le plus souvent ne puissent point nous être connues. (Monadologie §32)

On en retrouve la trace dans *Candide*, lors de la guerre, où, bien sûr, Voltaire ne pourra s'empêcher d'évoquer la "raison suffisante" de la mort des soldats. Mais le principe exposé par Leibniz débouche tout naturellement sur les questions sur ce monde-ci, au-delà du fameux "pourquoi y-a-t' il quelque chose plutôt que rien ?", qui revient à "pourquoi le Créateur a t'il eu besoin de créer?" et qui n'est pas notre objet. Le monde étant ce qu'il est, maintenu en mouvement par la volonté divine, il faut qu'il soit le meilleur, car Leibniz envisage déjà une pluralité des possibles, et même une infinité des possibles. Ce que l'on retrouve dans la *Monadologie* :

> *53. Or, comme il y a une infinité d'univers possibles dans les idées de Dieu, et qu'il n'en peut exister qu'un seul, il faut qu'il y ait une raison suffisante du choix de Dieu qui le détermine à l'un plutôt qu'à l'autre.*
>
> *54. Et cette raison ne peut se trouver que dans la convenance, dans les degrés de perfection que ces mondes contiennent, chaque possible ayant droit de prétendre à l'existence à mesure de la perfection qu'il enveloppe.*
>
> *55. Et c'est ce qui est la cause de l'existence du meilleur que la sagesse fait connaître à Dieu, que sa bonté le fait choisir, et que sa puissance le fait produire.*

Le paragraphe 54 serait à commenter d'un point de vue mathématique, mais j'ai peur d'effrayer le lecteur (surtout s'il est parent d'élève) ; que chacun se rassure, les élèves n'ont pas été si loin (voir au paragraphe suivant leurs réactions). Des arguments du même type se trouvent dans le *Discours de Métaphysique* :

> *D'où il s'ensuit que Dieu possédant la sagesse supreme et infinie agit de la manière la plus parfaite, non seulement au sens métaphysique, mais encor moralement parlant, et qu'on peut exprimer ainsi à nostre égard, que plus on sera éclairé et informé des ouvrages de Dieu, plus on sera disposé à les trouver excellens et entierement satisfaisans à tout ce qu'on aurait pu souhaiter (I.- De la perfection divine et que Dieu fait tout de la manière la plus souhaitable)*
>
> *Il suffit donc d'avoir cette confiance en Dieu, qu'il fait tout pour le mieux, et que rien ne sçauroit nuire à ceux qui l'aiment ; mais de connoistre en particulier les raisons qui l'ont pu mouvoir à choisir cet ordre de l'univers, à souffrir les pechés, à dispenser ses grâces salutaires d'une certaine maniere, cela passe les forces d'un esprit fini, sur tout quand il n'est pas encor parvenu à la jouissance de la veue de Dieu. (V.- En quoy consistent les regles de perfection de la divine conduite et que la simplicité des voyes est en balance avec la richesse des effects)*
>
> *Car Dieu voit de tout temps qu'il y aura un certain Judas, dont la notion ou idée que Dieu en a, contient cette action future libre. Il ne reste donc que cette question, pourquoy un tel Judas, le traistre, qui n'est que possible dans l'idée de Dieu, existe actuellement. Mais à cette question il n'y a point de reponse à attendre icy bas, si ce n'est qu'en general on doit dire, que puisque Dieu a trouvé bon qu'il existât, non obstant le peché qu'il prevoyoit, il faut que ce mal se recompense avec usure dans l'univers, que Dieu en tirera un plus grand bien, et qu'il se trouvera en somme que cette suite des choses dans laquelle l'existence de ce pecheur est comprise, est la plus parfaite parmy toutes les autres façons possibles (XXX - ... De l'imperfection originale avant le peché et des degrés de la grâce).*

Pour en finir avec l'excellence divine, remarquons qu'il est nécessaire que la pluralité des mondes possibles soit illimitée, et cela rejoint une autre préoccupation de Leibniz, celle de l'infinité contenue dans le fini, du mouvement continu que cela implique ; on trouve ces idées en particulier dans la *Monadologie,* et tout d'abord

> *[...]quand il y a une grande multitude de petites perceptions où il n'y a rien de distingué [...] (§21)*

ce qui veut dire, comme les milliers de minuscules bruits indistinguables de gouttelettes d'eau forment celui des vagues, que nos perceptions ne sont pas souvent "claires et distinctes" mais résultent d'une superposition d'une multitude de causes (ceci n'est pas très en vogue à son époque et nous appartiendrait plus volontiers, nous sommes ses héritiers directs). Quant à l'idée de la continuité d'états instantanés, elle est légitimée dans le même texte :

> *Et comme tout présent état d'une substance simple est naturellement une suite de son état précedent, tellement, que le présent y est gros de l'avenir (§22)*

> *Et les composés symbolisent en cela avec les simples. Car comme tout est plein, ce qui rend toute la matière liée, et comme dans le plein tout mouvement fait quelque effet sur les corps distants à mesure de la distance, de sorte que chaque corps est affecté non seulement par ceux qui le touchent, et se ressent en quelque façon de tout ce qui leur arrive, mais aussi par leur moyen se ressent de ceux qui touchent les premiers dont il est touché immédiatement : il s'ensuit que cette communication va à quelque distance que ce soit[...] (§61)*

Leibniz va même beaucoup plus loin dans la métaphore, il "zoome" comme dans des objets fractals ; on tient là vraiment un fondement métaphysique à l'idée de limite, à celle de quantités infiniment petites, bien qu'il n'indique en rien qu'il faille s'arrêter à une borne inférieure.

> *67. Chaque portion de la matière peut être conçue comme un jardin plein de plantes et comme un étang plein de poissons. Mais chaque rameau de la plante, chaque membre de l'animal, chaque goutte de ses humeurs est encore un tel jardin ou un tel étang.*

Au contraire, il semblerait même que dans la succession poisson/étang/poisson, il n'y ait aucune raison de s'arrêter quelque part, cela se situant au-delà du perceptible ; on est peut-être entré dans le domaine des "ordres" infiniment petits, comme dans l'analyse non standard (qui d'ailleurs se réclame plus ou moins de Leibniz):

> *68. Et quoique la terre et l'air interceptés entre les plantes du jardin, ou l'eau interceptée entre les poissons de l'étang, ne soit point plante ni poisson, ils en contiennent pourtant encore, mais le plus souvent d'une subtilité à nous imperceptible.*

> *69. Ainsi il n'y a rien d'inculte, de stérile, de mort dans l'univers, point de chaos, point de confusion qu'en apparence; à peu près comme il en paraîtrait dans un étang à une distance dans laquelle on verrait un mouvement confus et un grouillement pour ainsi dire de poissons de l'étang sans discerner les poissons mêmes.*

Ces poissons de l'étang peuvent-ils être comparés à des *dx* de longueur nulle ou presque et qui pourtant reconstituent n'importe quelle ligne ? Ce grouillement-là rappelle forcément les théories actuelles du chaos, avec la modestie en plus, mais le même surgissement de l'ordre, les monades étant naturellement hiérarchisées. Et enfin, puisqu'il est question de "grouillement", on peut se rappeler, que la *différence* est décrite comme la quantité dont augmente continûment x ou comme ce qui sépare deux quantités x et $x + dx$ infiniment proches. N'oublions pas non plus que Newton parlera de *quantités fluentes* et de leurs *fluxions,* ce qui rejoint d'une certaine façon son grand rival.

[...] Car tous les corps sont dans un flux perpétuel comme des rivières, et des parties y entrent et en sortent continuellement (Monadologie, §71)

Les élèves...

... font les gros yeux dès le début, on s'en doute ! Bien sûr, ils protestent tout de suite que ce ne sont pas des maths, qu'ils en ont assez de Voltaire, qu'ils aimeraient bien pouvoir penser à autre chose de plus sérieux en cours de maths, etc. Il n'empêche qu'ils m'écoutent jusqu'au bout, même si je n'ai pas lu tout ce qui est retranscrit ici. Ils finissent même par accorder que leur opinion de Pangloss ne remet pas en cause le sérieux des jugements de Leibniz (j'imagine qu'ils avaient saisi que c'était mon champion et que s'ils n'acquiesçaient pas, la salle des profs allait se transformer en champ de bataille !)

Il est difficile de mesurer le réel impact sur les élèves (de sections hôtelière, tertiaire, puis économique et sociale) de la discussion née de ces lectures ; en revanche, les problèmes de compréhension liés au statut des objets du calcul différentiel apparaissent de temps en temps : des élèves bloqués par ces rectangles de largeur presque nulle, mais pas tout à fait, car en les "ajoutant", on obtient une surface non nulle. De quoi s'agit-il vraiment ? Nous ne leur répondons jamais, mais savons-nous nous-mêmes vraiment de quoi nous parlons lorsque nous leur enseignons le calcul des dérivées ? Il n'est pas étonnant que Berkeley se soit élevé au début du XVIII^{e} siècle contre cette utilisation sans conscience de concepts dont personne ne comprenait exactement le sens.

Cette expérience n'est pas reproductible d'une année à l'autre, puisque le livre de Voltaire n'est au programme que de temps en temps et qu'il faut varier les plaisirs en Français. D'ailleurs je ne suis pas certain de vouloir reprendre une quatrième fois l'introduction sous cette forme : il s'agit probablement d'un travail décalé par rapport à ce qu'attendent les élèves de mon cours de mathématiques. En effet, si les références historiques passent très bien en général lorsque je "raconte des histoires", l'étude de textes est moins bien acceptée, car cela demande des efforts de traduction et d'appropriation que mes élèves ne font plus guère spontanément. Le premier contact avec les textes originaux engendre souvent perplexité et demande persévérance, le plaisir ne vient qu'après : c'est le "plaisir du sens", selon la belle expression de Rudolph Bkouche et Nicolas Rouche. Imaginez donc la surprise lorsque l'étude de textes n'implique aucune traduction géométrique ou algébrique, aucune activité mathématique, mais seulement de la réflexion !

Actuellement, je passerais beaucoup plus vite sur cette introduction pour me lancer directement dans l'étude des textes mentionnés ci-après.

L'Hospital

La suite la plus naturelle est de lire les premières propositions du livre du Marquis de L'Hospital, *L'Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*,[7] car les articles originaux de Leibniz[8] sont beaucoup trop difficiles. Chez L'Hospital comme chez Leibniz, le triangle caractéristique sous-tend la pensée, il est question de la tangente qui se confond avec la courbe à condition de ne point trop s'éloigner du point de tangence, mais d'une façon plus didactique, avec de nombreux exemples. Ce qui est formidable avec l'*Analyse des infiniment petits*, c'est qu'une fois admise l'existence d'infiniment petits de différents ordres, le fait que certains sont négligeables selon le contexte, les théorèmes s'expliquent avec une clarté "que Leibniz n'eut jamais" (pour paraphraser Voltaire, vous aviez suivi ?). Entrons dans le détail, avec le tout premier paragraphe et les définitions, comme il se doit :

SECTION I.
Où l'on donne les Regles de ce Calcul

DEFINITION I.

On appelle quantités *variables* celles qui augmentent ou diminuent continuellement ; & au contraire quantités *constantes* celles qui demeurent les mêmes pendant que les autres changent. Ainsi dans une parabole les appliquées & les coupées sont des quantités variables, au lieu que le paramétre est une quantité constante.

C'est plutôt agréable de commencer de cette manière peu effrayante pour les élèves, en précisant toutefois que les "appliquées" sont les ordonnées, les "couppées" les abscisses (ce qui n'a rien de choquant pour l'étymologie), et que la parabole de la Figure 1 (si c'en est une, voyez la figure plus loin) est tracée dans un sens inhabituel. Par la suite, ça se corse :

DEFINITION II.

La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, en est appelée la *Différence*. Soit, par exemple, une ligne courbe quelconque AMB; (*Fig.* I. *Pl.* I.) qui ait pour axe ou diamétre la ligne AC, & pour une de ses appliquées la droite PM ; & soit une autre appliquée *pm* infiniment proche de la premiere. Cela posé, si l'on méne MR parallele à AC ; les cordes AM, A*m* ; & qu'on décrive du centre A, de l'intervalle AM le petit arc de cercle MS : P*p* sera la différence de AP ; R*m* celle de PM ; S*m* celle de AM, & M*m* celle de l'arc AM. De même le petit triangle Ma*m* qui a pour base l'arc M*m*, sera la différence du segment[9] AM ; & le petit espace MP*pm*, celle de l'espace compris par les droites AP, PM, & par l'arc AM.

[7] L'édition dont je me suis servi est une réimpression avignonnaise de 1768 de la troisième, parue à Paris en 1758, avec les commentaires d'un auteur anonyme (dont la Bibliothèque nationale indique qu'il s'agit de l'Abbé Aimé-Henri Paulian, père Jésuite) qui met plus bas que terre le commentateur de la seconde édition de 1715, De Crouzas… Une version électronique de l'édition de 1696 est maintenant disponible sur le serveur de la BnF.

[8] Le lecteur intéressé se reportera à l'édition de Marc Parmentier, *Leibniz, naissance du calcul différentiel, 26 articles des* Acta Eruditorum, Paris, Vrin, Coll. Mathesis, 1989.

[9] Il s'agit du segment de cercle, i.e. le domaine défini par la corde [AM] et l'arc de cercle AM.

Il va falloir admettre qu'une quantité variable augmente à tout instant, et que cette augmentation est infiniment petite. En outre, il va falloir admettre que la Figure 1 reproduite ci-après montre bien deux positions infiniment proches ; c'est clair pour un enseignant, qui a été habitué à lire le concept derrière sa représentation imparfaite, mais cela soulève d'autres types de problèmes pour les jeunes gens : comment représenter deux positions infiniment proches, sinon en les superposant ? La question est intéressante, parce qu'elle ramène à celle de l'existence et du statut de l'infiniment petit, et l'on se met à chercher des points de comparaison, par exemple un point sur une ligne : comment les points se touchent-ils ? Bien sûr; lorsque l'on fait de la géométrie entre professionnels, la question ne se pose pas. Mais lorsqu'il s'agit d'enseigner, on doit faire face à des interrogations que nous avons refoulées (moi, en tout cas.) Le débat peut mener loin en classe, comme chaque fois que l'on fait appel à l'imagination des élèves, en particulier lorsqu'il est question d'infini ; ce débat risque fort de ne pas se clore par une réponse nette et collectivement acceptée : c'est une zone de doute.

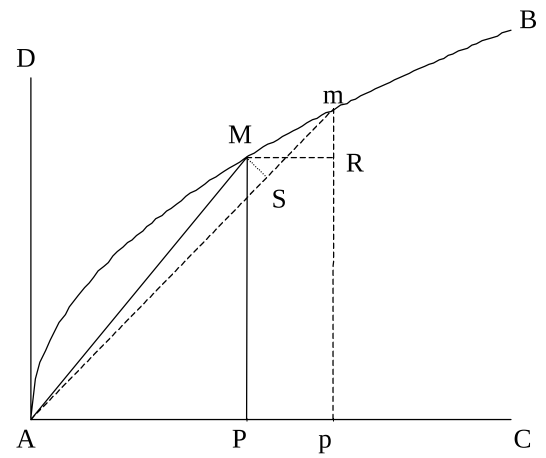


Fig. 1 Planche 1 de l'*Analyse des infiniments petits*.

Examinons la suite du texte de l'*Analyse*. Il vient immédiatement un corollaire, explication très simple du fait que la dérivée d'une constante est nulle, puis un avertissement qui réjouira tous ceux qui se demandent pourquoi ce *d* dans *dx*.

COROLLAIRE.

I. Il est évident que la différence d'une quantité constante est nulle ou zero : ou (ce qui est la même chose) que les quantités constantes n'ont point de différence.

AVERTISSEMENT.

On se servira dans la suite de la note ou caractéristique d *pour marquer la différence d'une quantité variable que l'on exprime par une seule lettre ; & pour éviter la confusion, cette note* d *n'aura point d'autre usage dans la suite de ce calcul. Si l'on nomme par exemple les variables* AP, x ; PM, y ; AM, z ; *l'arc* AM, u ; *l'espace mixtiligne* AMP, s ; *& le segment* AM, t ; dx *exprimera la valeur de* Pp, dy *celle de* Rm, dz *celle de* Sm, du *celle de du petit arc* Mm, ds *celle du petit espace* MPpm, & dt *celle du petit triangle mixtiligne* MAm.

Puis viennent les "axiomes", dont L'Hospital écrit dans sa préface : *D'ailleurs les deux demandes ou suppositions que j'ai faites au commencement de ce Traité, & sur lesquelles seules il est appuyé, me paroissent si évidentes, que je ne crois pas qu'elles puissent laisser aucun doute dans l'esprit des Lecteurs attentifs. Je les aurois même pû démontrer facilement à la maniere des Anciens, si je ne me fusse proposé d'être court sur les choses qui sont déjà connues, & de m'attacher principalement à celles qui sont nouvelles*. Mon œil ! Un peu comme Descartes qui prétendait ne pas tout écrire pour laisser à ses neveux le plaisir de chercher par eux-mêmes, L'Hospital se sert de l'adjectif "évident" à un moment délicat, prévient les critiques en évoquant l'attention du lecteur, sans éviter la rodomontade finale …

I. DEMANDE OU SUPPOSITION.

2. On demande qu'on puisse prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne différent entr'elles que d'une quantité infiniment petite : ou (ce qui est la même chose) qu'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle, puisse être considérée comme demeurant la même. On demande, par exemple, qu'on puisse prendre A*p* pour AP, *pm* pour PM, l'espace A*pm* pour l'espace APM, le petit espace MP*pm* pour le petit rectangle MP*p*R, le petit secteur AM*m* pour le petit triangle AMS, l'angle *p*A*m* pour l'angle PAM, &c.

II. DEMANDE OU SUPPOSITION.

3. On demande qu'une ligne courbe puissse être considérée comme l'assemblage d'une infinité de lignes droites, chacune infiniment petite : ou (ce qui est la même chose) comme un polygône d'un nombre infini de côtés, chacun infiniment petit, lesquels déterminent par les angles qu'ils font entr'eux, la courbure de la ligne. On demande, par exemple, que la portion de courbe M*m*, l'arc de cercle MS, puissent être considérés comme des lignes droites à cause de leur infinie petitesse, en sorte que le petit triangle *m*SM puisse être censé rectiligne.

Voilà ce qui est fondamental, mais sera critiqué pendant des années. Le calcul différentiel roule sur des présupposés qui ne sont pas si certains que le dit l'auteur. En bon cartésien, il a affirmé que l'évidence est suffisante (c'est un gage de vérité), mais il évoque quand même une possible preuve, signe de doute et d'honnêteté.

Les deux demandes sont-elles difficile à accepter ? Les élèves sont partagés ; certains suivent l'auteur dans sa revendication d'évidence, mais se trouvent face à un problème : si x est égal à $x + dx$, alors dx est nul. Je dois faire remarquer que L'Hospital a écrit *que l'on puisse prendre l'une pour l'autre*, ce qui ne signifie pas *les considérer égaux*, mais plutôt valeur approchée l'un de l'autre, avec différence négligeable en première approximation. La seconde demande est plus subtile, même si, au fond, elle ressemble à la première ; elle engendre également de discussions sur la nature des courbes. Mais la plupart des élèves sont dépassés, il faut le dire, il est temps de passer au calcul proprement dit, à l'action !

PROPOSITION I.

PROBLÉME.

4. *Prendre la différence de plusieurs quantités ajoutées ensemble, ou soustraire les unes des autres.*

(suite au verso)

Soit $a+x+y—z$ dont il faut prendre la différence. Si l'on suppose que x soit augmentée d'une portion infiniment petite, c'est-à-dire qu'elle devienne $x+dx$; y deviendra $y+dy$; & z, $z+dz$; pour la constante a, (Art. 1) elle demeurera la même a : de sorte que la quantité proposée $a+x+y—z$ deviendra $a+x+dx+y+dy—z—dz$; & sa différence, que l'on trouvera en retranchant de cette dernière, sera $dx+dy—dz$. Il en est ainsi des autres ; ce qui donne cette regle.

REGLE I.

Pour les quantités ajoutées, ou soustraites.

On prendra la différence de chaque terme de la quantité proposée, & retenant les mêmes signes, on en composera une autre quantité qui sera la différence cherchée.

Voilà une façon simple d'expliquer la règle de dérivation d'une somme ; il est heureux que l'exemple vienne avant l'énoncé formel, car si l'on donnait tout de go la Règle I aux élèves, ils n'y comprendraient rien. Mais le plus formidable à mon sens est tout de même l'éclairage "nouveau" donné à la rengaine $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$.[10]

PROPOSITION II.

PROBLÉME.

4. *Prendre la différence d'un produit fait de plusieurs quantités multipliées les unes par les autres.*

I°. La différence de xy est $xdy+ydx$. Car y devient $y+dy$ lorsque x devient $x+dx$; & partant xy devient alors $xy+ydx+xdy+dxdy$, qui est le produit de $x+dx$ par $y+dy$, & sa différence sera $ydx+xdy+dxdy$, c'est-à-dire (Art. 2) $ydx+xdy$ puisque $dxdy$ est une quantité infiniment petite par rapport aux autres termes ydx, & xdy ; car si l'on divise, par exemple, ydx, & $dxdy$ par dx, on trouve d'une part y, & de l'autre dy qui en est la différence, & par conséquent infiniment moindre qu'elle. D'où il suit que la différence du produit de deux quantités est égale au produit de la différence de la premiere de ces quantités par la seconde, plus au produit de la différence de la seconde par la premiere.

2°. La différence de xyz est $yzdx+xzdy+xydz$. Car en considérant le produit xy comme une seule quantité, il faudra, comme l'on vient de prouver, prendre le produit de sa différence $xdy+ydx$ par la seconde z (ce qui donne $yzdx+xzdy$) plus le produit de la différence dz de la seconde z par la premiere xy (ce qui donne $xydz$) & partant la différence de xyz sera $yzdx+xzdy+xydz$. […]

Je n'ai rien à ajouter, le texte est d'une parfaite clarté et d'une certaine élégance. Les élèves le lisent seuls, même s'ils ont tendance à passer sur l'énoncé rébarbatif de la règle générale. Quelques-uns ne voient pas pourquoi $dxdy$ est une quantité négligeable, mais qui n'a pas dit un jour "M'enfin ! Je viens de te l'expliquer !" ? D'ailleurs, je ne l'explique pas, ce sont d'autres élèves qui le font, la découverte du texte se faisant en effet en groupes, ou de manière informelle en classe entière ; seule la lecture d'un texte ancien de mathématiques

[10] Jean Terreran compare cette approche avec l'illustration géométrique du produit sous forme de rectangle, décomposé ainsi : le "grand" rectangle *xy*, les deux rectangles ultra-minces *xdy* et *ydx*, et le carré *dxdy* dont la ridicule petitesse nous permet de le dédaigner.

permet ce genre de discussion et de découverte collective, puisque l'élaboration se fait sous les yeux des élèves, et qu'ils n'ont pas à chercher la solution d'un problème mais comprendre le sens d'un problème déjà résolu.

La proposition III traite de la différence d'une fraction quelconque, et se démontre simplement : pour différencier $z=\frac{x}{y}$, il suffit de différencier $x = zy$ en tant que produit et d'isoler dz. La proposition IV traite de la différence d'une puissance quelconque d'une quantité variable ; elle est plus compliquée, et je ne l'aborde pas en classe, car l'auteur donne un rappel indigeste sur les suites et les exposants quelconques.

Voilà ! Les élèves ont tout en main pour calculer les différences les plus baroques, mêlant variables et constantes dans un langage purement littéral (avec des chiffres pour les coefficients, ne soyons pas trop extrémistes). Je passe effectivement à une séance de plus en plus virtuose, ce qui est certes contraire à l'esprit du programme, mais constitue un moment étonnant : les élèves se prennent au jeu de ce calcul abstrait, totalement gratuit, ils manient comme jamais les quantités littérales, et je dois avouer qu'il s'agit d'un des mes objectifs quand je propose cette introduction au calcul des dérivées. Oui, ils font de l'ALGÈBRE ! Même les moins familiers des lettres, et avec de plus en plus d'aisance. Ce qui donne à penser que la simplification des programmes n'est pas forcément LA solution au désintérêt, à l'ennui, à l'échec. Au contraire, sans pour autant se complaire dans l'abstraction, ne prenons pas nos élèves pour des attardés[11] ; ils sont capables de beaucoup, mais avec cette condition simple : il faut du temps. Cette partie du programme de première en prend de toute façon beaucoup en général, car il faut souvent revenir en arrière, ralentir, insister ou reprendre au début (je parle des élèves que je connais, de sections tertiaires ou ES.)

Bouquet final : Le lien avec les variations et les tangentes

Le Marquis nous fournit cette dernière étape de notre travail dans la seconde section du livre ; la définition de la tangente à une courbe est claire, dans la logique de la seconde "demande ou supposition". Au fait, comment définit-on la tangente, depuis qu'il n'est plus à la mode de parler de position-limite d'une droite ?

> SECTION II.
>
> *Usage du calcul des différences pour trouver les Tangentes de toutes sortes de lignes courbes.*
>
> DEFINITION.
>
> Si l'on prolonge un des petits côtés M*m* (*Fig.* 2. *Pl.* 1.) du poligone qui compose (*Art.* 3.) une ligne courbe ; ce petit côté ainsi prolongé sera appellé la Tangente de la courbe au point M ou *m*.

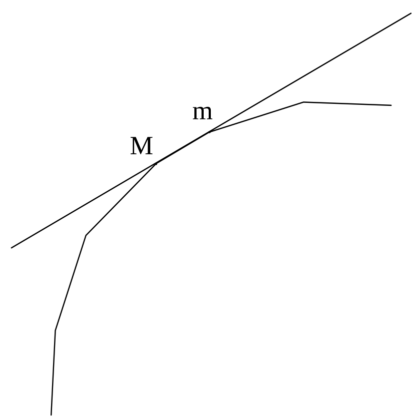


Fig. 2 Planche 1 de l'*Analyse des infiniment petits.*

[11] Bémol : je ne choisis plus cette activité pour des élèves "dégoûtés des maths". Les classes de STT avec lesquelles j'ai travaillé en ce sens ont l'option "Comptabilité-Gestion-Informatique" et ce ne sont pas les plus mauvaises en mathématiques…

Cette définition de la tangente étant donnée, son rapport avec le calcul des différences est immédiat si l'on reprend la figure n°1, ou la figure n°3 ci-après : le petit triangle *m*MR (appelé *triangle caractéristique* par Leibniz) est semblable à celui que forme la tangente avec l'axe des abscisses et le segment-ordonnée MP (ou *mp*). Or les côtés de ce petit triangle sont MR = *dx* et mR = *dy*, ce qui laisse entrevoir l'intérêt de la démarche en termes de coefficient directeur de la tangente ; ce que présente L'Hospital est un peu différent:

PROPOSITION I.

PROBLÉME.

9. *Soit une ligne courbe* AM (*Fig.* 3. *Pl.* 1.) *telle que la relation de la couppée* AP *à l'appliquée* PM *soit exprimée par une équation quelconque, & qu'il faille du point donné* M *sur cette courbe mener la tangente* MT.

Ayant mené l'appliquée MP, & supposé que la droite MT qui rencontre le diamètre au point T, soit la tangente cherchée ; on concevra une autre appliquée *mp* infiniment proche de la premiere, avec une petite droite MR parallèle à AP. Et en nommant les données AP, *x* ; PM, *y* ; (donc P*p* ou MR = *dx*, & R*m* = *dy*.) les triangles semblables *m*RM & MPT donneront *m*R (*dy*) . RM (*dx*) : : MP (*y*) . PT = $\frac{ydx}{dy}$.[12] Or par le moyen de la différence de l'équation donnée, on trouvera une valeur de *dx* en termes qui seront tous affectés par *dy*, laquelle étant multipliée par *y* & divisée par *dy*, donnera une valeur de la soutangente PT en termes entierement connus & délivrés des différences, laquelle servira à mener la tangente cherchée MT.

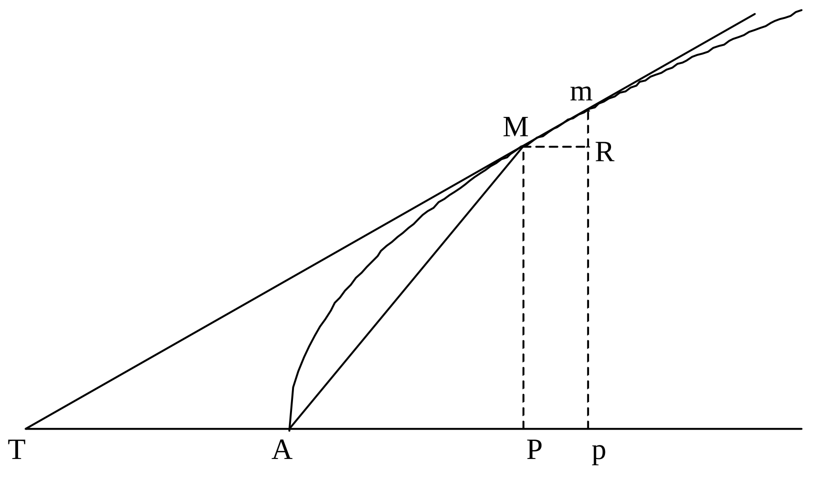


Fig. 3 Planche 1 de l'*Analyse des infiniment petits*.

Après les efforts surhumains déjà faits en classe, je n'insiste pas sur la sous-tangente, mais propose au contraire une lecture rapide de ce dernier texte, afin de recentrer l'étude sur des préoccupations plus actuelles, sur la pente de la tangente (AT). Il vient tout naturellement que cette pente vaut MP/PT, ou encore *m*R/RM, donc s'exprime sous la forme *dy*/*dx*. Il faut alors reprendre la fin du texte et l'illustrer par des exemples fonctionnels, en prenant garde de ne pas entretenir de confusion, car *l'Analyse des infiniment petits* est d'une période antérieure à la notion de fonction et les deux variables y jouent un rôle symétrique. En termes modernes, tels qu'il faut les reformuler, la fin du texte peut donc se traduire (en un sens qui n'est plus le

[12] Écriture ancienne des proportions, qui doit se lire "*m*R est à RM comme MP est à PT, qui est donc égal à…"

sens original) de la manière suivante : puisque y est donné sous la forme $y = f(x)$, alors tous les termes de dy contiennent dx, donc dy/dx s'exprime sans aucune différence, mais seulement en fonction de x.

Finalement, il reste à demander aux élèves de calculer le coefficient directeur de la tangente dans certains cas, puis à tout réécrire *à la moderne*, c'est-à-dire reconstruire le formulaire sacré en termes de dérivées de fonctions.

Retour sur terre : les dérivées

Virage difficile à négocier, le passage des différentielles aux dérivées met en évidence l'effort fourni par les élèves pour comprendre un chapitre plutôt délicat. Ils sont ensuite peu enclins à tout abandonner pour remplacer ce formalisme par un autre, confondant par-là le fond et la forme. Mais comment les blâmer d'attacher de l'importance à la forme dans du calcul formel ? Cette transition est pourtant une question essentielle pour moi, car, jusque-là, j'ai traité d'une matière hors programme (le calcul différentiel) alors que je devais formater les élèves pour des connaissances orthodoxes (le calcul des dérivées). Si donc je ne veux pas me retrouver sur la sellette, il me faut démontrer le bien-fondé de mon approche. Situons-nous par exemple sur le terrain de l'évaluation.

Le jour de l'interro…

… apparaissent les difficultés de fond, évidemment ! Je dois donc modérer mon enthousiasme en ce qui concerne la justesse de mon choix d'utiliser le texte de L'Hospital pour mieux faire comprendre la notion de dérivée. Néanmoins, on verra qu'il ne faut pas être trop pessimiste, que cela a permis à certains (pas forcément les meilleurs) de réellement fonder le statut des dérivées et, surtout, que l'approche n'est pas adaptée à n'importe quel élève : le degré d'abstraction est élevé, le mélange des disciplines (allant plus loin que la simple histoire racontée) et le volte-face final perturbent ceux qui voient dans les mathématiques un ensemble de pièges auquel on ne comprend souvent rien.

1ère époque, en classe de 1ère H (élèves hôteliers)

C'est ma première expérimentation (fin du vingtième siècle), avec des jeunes gens titulaires d'un BEP de Cuisine ou de Restauration qui souhaitent continuer leurs études, et se sont donc inscrits dans cette classe de Première d'adaptation. C'est aussi la première de mes classes dans laquelle la collègue de Français étudiait *Candide*, ce qui a tout bêtement motivé ce travail ; oui, j'ai d'abord voulu, pour le plaisir de travailler ensemble en interdisciplinarité, rebondir sur son cours, mais le bilan est mitigé : je ne peux pas dire qu'il y ait vraiment eu "travail commun", seulement un pont entre deux disciplines, grâce à un sujet qui s'y prêtait. Les élèves ont eu une certaine difficulté à accepter de retrouver le texte de Français dans le cours de maths ("c'est pas des maths !") mais la lecture s'est faite dans de bonnes conditions.

En revanche, le choc face au texte de L'Hospital est rude pour un tiers des élèves, qui "n'aime pas la géométrie parce qu'il y a des démonstrations". Imaginez leur difficulté face aux infiniment petits ! Il m'a fallu minimiser cette partie et insister sur la partie "dérivées". Cette difficulté se retrouve dans les réponses aux premières questions du devoir en classe, questions d'ordre historique ("Qu'appelle-t-on *dx* ?", "Comment est définie cette quantité ?", "Qui en est l'inventeur et durant quel siècle ?")

Leibniz a disparu de la plupart des esprits qui proposent le Marquis de L'Hospital comme inventeur du calcul différentiel, au XVIII^e siècle… La définition de *dx* comme quantité infiniment petite n'est pas mieux assimilée ; un élève écrit même "*dx*, c'est $d \times x$", idée que je retrouverai dans la suite des expérimentations. Les erreurs dans les calculs de la troisième partie sont dues aux traditionnelles lacunes en algèbre que je rencontre dans toutes les classes, quel que soit leur niveau. Mais je remarque que les questions les mieux réussies sont les plus difficiles, celles qui traitent de la différentielle d'un quotient ; en outre, il y a très peu de confusions avec la formulation $vdu - udv$, contrairement à ce qui se passe avec $u'v - u\,v'$, que l'on retrouve souvent écrite à l'opposé $uv' - u'v$.

L'expérience n'est pas très concluante sauf pour les passages les plus difficiles, à ceci près que deux élèves de 1ère H ont conservé les techniques de calcul différentiel bien après le retour sur les dérivées, traduisant ensuite les résultats trouvés et affirmant que "c'est beaucoup plus facile comme ça" ! Je suis bien sûr parfaitement d'accord avec elles…

2nde époque, en classe de 1ère STT

Cette seconde expérimentation (l'année suivante) m'a permis de changer mon fusil d'épaule, laissant plus de temps d'appropriation aux élèves et insistant moins sur l'aspect littéraire ; il faut croire que chacun doit rester chez soi et que l'on ne s'improvise pas professeur de Lettres (surtout si l'on ne veut pas tomber de haut lors de l'interrogation.)

J'ai lu tous les extraits de Voltaire, en lien avec l'histoire locale (celle d'Émilie du Châtelet à Semur-en-Auxois), mais pas du tout ceux de Leibniz ; cela a rendu mon exposé plus compréhensible, il suffisait de laisser les poissons dans l'étang (qui est contenu dans chaque poisson, qui contient donc lui-même les autres poissons; on se rend bien compte que ces questions n'ont aucun intérêt pour des jeunes gens normaux.[13]) Les Premières STT "gestion" ont trois heures de mathématiques, et cela laisse un peu de temps pour expliquer les problèmes de manière individuelle.[14]

Comme pour les élèves de Première H, la réussite la plus spectaculaire concerne les quotients les plus difficiles, auxquels il faut ajouter les fonctions composées, comme les puissances d'une expression du premier degré. Plus de question historique cette fois (la cruelle déception de l'année précédente est encore présente), mais encore le souci de connaître l'idée que se font les élèves de la mystérieuse quantité *dx*. Je demande donc : "Que signifie *dx* ? De quoi s'agit-il ?" et "Pourquoi néglige-t-on *dxdy* dans les calculs ?", cette dernière question étant plus délicate mais plus libre.

La première question est bien traitée, la plupart du temps par citation exacte de la phrase du traité de L'Hospital, mais quelquefois incomplète ("*dx* est un infiniment petit" ou "l'infiniment petit de *x*".) La seconde réserve des surprises, car elle ne correspond pas à une définition, mais à un extrait de la démonstration de la proposition II, section I. Cette partie avait donné lieu à discussion en classe, car les élèves ne comprenaient pas pourquoi l'auteur divisait par *dx*, cela pouvant changer la nature de la comparaison entre les quantités. Je livre ici quelques réponses telles qu'elles ont été fournies, dans l'ordre d'arrivée des copies :

---

13 C'est-à-dire entièrement tendus vers leur soirée du vendredi. Croyez-vous que ces délires piscicoles permettent de briller en boîte ?

14 D'autant que la classe est composée aux deux tiers d'élèves de l'autre option (AAC) qui n'ont que deux heures hebdomadaires de mathématiques, la troisième heure se déroule donc avec peu d'élèves.

Delphine	dxdy est une quantité très petite, on la néglige car elle ne changera pratiquement pas le résultat. C'est une quantité infiniment petite multipliée par une autre quantité infiniment petite donc son résultat est presque nul.
Hafida	On néglige dxdy car on considère que cette quantité est infiniment petite de là trop petite. On décide alors de l'abandonner.
Elhame	On néglige dxdy car c'est infiniment infiniment petit. Ça n'existe presque pas.
Yilmaz	On néglige dxdy dans les calculs la différence d'un infiniment petit multiplié par la différence d'un infiniment petit donne un nombre très infiniment petit, que l'on peut négliger.
Xavier	On néglige dxdy car il s'agit d'un produit et car on ne peut pas multiplier deux quantités infiniment petites.
Alain	On néglige dxdy car quand on multiplie l'infiniment petit par l'infiniment petit cela nous donne quelque chose extrêmement petit ou presque rien.
Sébastien	dx et dy sont négligés car x et y sont des inconnus. On ne peut pas finir les calculs car ils sont infiniment petits.
Hares	Car on ne peut multiplier 2 infiniment petits.
Sandra	On néglige dx et dy car y et x sont constamment augmentées par une quantité infiniment petite.
Nicolas	Dans les calculs, on néglige dxdy car cela donne une différence infiniment petite.

On peut remarquer l'usage des superlatifs, ou de la répétition ("infiniment infiniment) pour indiquer l'aspect extrême du produit *dxdy* ; on trouve également la notion de "presque nul", ce qui n'est pas une expression ordinaire en classe, mais est de bonne augure pour le futur cours sur les limites. Plusieurs élèves ont également avancé l'idée selon laquelle "on ne peut pas le faire", qu'il s'agisse effectivement d'opérer ou simplement de "finir le calcul", peut-être parce que ces quantités sont si bizarres qu'il est hors de question de faire des calculs ordinaires avec elles ? Aucun n'évoque directement l'<u>ordre de grandeur</u> du produit, comparé à l'un des facteurs.

L'interrogation, semblable pour le reste à celle de l'année précédente, est très bien réussie (moyenne de 14) ; c'est plutôt agréable, mais n'ai-je pas été assez peu exigeant ? Je change encore une fois mon fusil d'épaule pour la troisième expérimentation.

3^e^ époque, en classe de 1^ère^ ES

L'expérimentation la plus récente (2002/2003)[15] a été menée en section générale, sans emphase sur le côté littéraire de la chose. Encore une fois, L'*Essai de Théodicée* et la *Monadologie* de Leibniz sont passé à la trappe, car il importe peu de réhabiliter le grand Gottfried-Willhelm dans l'esprit de jeunes élèves de 16 ans, dont ce n'est pas la préoccupation essentielle. Cette fois-ci, j'ai préféré concentrer mon récit sur la question des tangentes, et les idées de Leibniz en réponse à cette question ; je parle bien de <u>mon récit</u>, car il n'est pas question de chercher à expliquer les Mémoires des *Acta eruditorum* tant leur niveau est hors de portée des élèves (j'ai aussi du mal…)

Mais je n'abandonne pas Voltaire, qui reste encore une fois le point d'entrée "original" dans ce difficile chapitre. D'autant que les élèves de ES ont naturellement plus d'affinités avec

[15] Il a fallu attendre le retour de *Candide*, passé de mode quelque temps.

la littérature, et m'écoutent volontiers (ça leur permet aussi de passer des moments tranquilles.)

Pour les infiniment petits, nous prenons le temps de l'appropriation ; beaucoup d'exercices sont nécessaires, et j'ai décidé de ne plus évaluer l'aspect anecdotique, mais seulement différentiel. Cette année, je vais plus loin dans la complication pour l'interrogation, il s'agit de développer les expressions :

$$d(2a+5b),\quad d(x^2-3x+18{,}5),\quad d\big((x+2)(3-4x)\big),\quad d(\tfrac{-4}{3}x+x^2),$$
$$d(xy-bx+z),\quad d(xy/az),\quad d(y^3x-7x^2y^2+1),\quad d(\tfrac{1}{x-4})$$
$$d(\tfrac{x}{x-4}),\quad d(\tfrac{y}{x-4}),\quad d(\tfrac{x^2+2x-1}{x+3}),\quad d\left(\frac{\frac{a}{x}}{\frac{b}{y}}\right)\quad \text{et}\quad d\big((x-3)\,z/y+1/xy\big)$$

Les résultats sont bons et les quelques erreurs laissent à penser qu'il n'est toujours pas facile, même en 1ère ES, de calculer avec des lettres. La plupart des erreurs des élèves seront très vite corrigées (par eux-mêmes), d'autant qu'elles se ramènent à quelques constantes simples : confusion dans les priorités opératoires, et entre multiplication et addition, incompréhension du statut de la lettre *d*, mais il faut reconnaître que c'est subtil. Par exemple, je trouve dans les copies :

Erreur conceptuelle supposée	Erreurs trouvées dans les copies
d est une lettre comme une autre ?	$x^2dx = xdx^2$, mais aussi $xdx = dx^2$, $xdy - ydx = 0$,
Joyeux mélanges ?	$d(x-4) = -4dx$ $(x+2)d(3-4x) = -(x+2)d4dx$ $dxy = dxdy + ydx$ $2xdx = 2dx^2 + xdx2$, le $xdx2$ étant barré à la fin.
Confusion entre addition et multiplication ? (Le cas de Fabien)	$xdx + ydx = xydx$ (cela ressemble à du logarithme) $ydx - bdx = ybdx$ " $\div \left(b/y\right)^2$ " est remplacé par " $\times \left(b/y\right)^2$ "
Opérateur agissant à distance ? (Le cas de Pauline) ou inopérant ? (Le cas de Claire)	$(b/y)^2$ remplacé par $-bdy/y^2$ $d(a/x)$ devenant $d(-adx/x^2)$ et (a/x) devenant $-adx/x^2$ $d\left(\frac{a/b}{b/y}\right) = d\left(\frac{a}{b}\right) \times d\left(\frac{y}{b}\right)$

Ce tableau montre assez bien quelles sont les difficultés des élèves face au calcul formel. À chaque fois, on peut supposer qu'il s'agit d'une perte du sens de l'opération en cours, de la formule ou de la signification des lettres.

Finalement, c'est pour moi le plus grand intérêt pédagogique de l'introduction du calcul des dérivées par le calcul des différentielles, outre l'ouverture vers l'interdisciplinaire que cela permet : c'est de retrouver le goût du calcul algébrique en travaillant sur un texte porteur de sens et générateur d'interrogations sur la nature de ces objets mathématiques.

Quelques activités autour de Racine de deux.

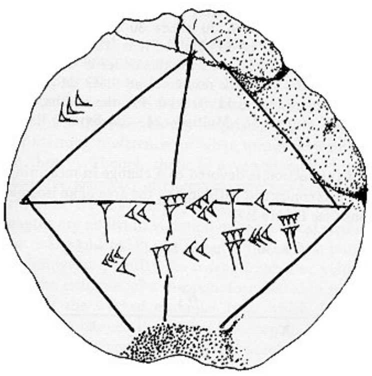
Philippe REGNARD,
Lycée Jules Renard, Nevers.

Les divers travaux présentés dans cet article ont été réalisés avec des élèves de première littéraire suivant l'option mathématique au cours de l'année scolaire 1999-2000.

Des premiers résultats babyloniens, aux différents algorithmes grecs en passant par l'émergence de la notion d'irrationnel, le prétexte était bon pour faire découvrir aux élèves la richesse de ces civilisations anciennes, leurs situations géographiques et historiques. De plus, l'étude des documents mathématiques a fourni l'occasion d'utiliser, certains pour la première fois, l'outil informatique (logiciel de géométrie et tableur).

La plus grande partie de ce qui est écrit ci-après a été évoquée en cours soit directement soit sous forme de questions du professeur ou des élèves.

Découverte d'une tablette babylonienne



Copyright: A. Aaboe

Copyright: Yale Babylonian Collection

cm 1 2 3

La tablette YBC 7289 (elle porte le numéro 7289 de la *Yale Babylonian Collection*) date sans doute de la première dynastie babylonienne, c'est à dire entre 1900 et 1600 ans avant notre ère. Comme la plupart des autres, sa taille est petite, à peu près 7 cm de diamètre. Elle représente manifestement un carré et ses deux diagonales. On peut imaginer le scribe, une tablette dans le creux de sa main, dessinant sur l'argile tendre à l'aide d'un stylet taillé appelé *calame*, des symboles en forme de coins qui donnèrent le nom de *cunéiforme* à cette écriture.

Ces premières tablettes, découvertes au cours du 19$^{\text{ème}}$ siècle, mais déchiffrées surtout dans la première moitié du 20$^{\text{ème}}$ siècle, attestent de l'étonnant développement des mathématiques en Mésopotamie avant l'éclosion de la civilisation grecque.

Bien que de tailles différentes, seuls deux symboles apparaissent sur la tablette : un *chevron* et une *pointe* qui représentent respectivement le nombre dix et l'unité. Ils sont agencés afin de bien distinguer les groupements de l'écriture sexagésimale de position.

Ainsi, sur un côté, on reconnaît aisément le nombre 30 qui pourrait représenter sa mesure. Sur une diagonale deux suites de nombres sont inscrites : 1-20-4-50-1-10 et juste au-dessous 40-2-20-5-30-5.

Si l'on groupe les dizaines et les unités, on obtient deux nombres en base sexagésimale : 1-24-51-10 et 42-25-35. Ce sont les groupements les plus plausibles, mais leur interprétation n'est pas unique ; le second nombre peut également représenter 40-02-25-35 ; De plus, dans cette numération de position, on ne peut distinguer, comme le permet notre virgule, quel groupement correspond aux unités. Est-ce 30 ou $\frac{1}{2}$? Le deuxième nombre correspond-il à 42 unités ou 42 soixantièmes d'unité ?

Si le premier groupement est le nombre d'unités, les deux nombres de la diagonale s'écrivent en base dix 1,41421296297 et 42,4263888889. La première valeur ne nous est pas inconnue : c'est le coefficient multiplicatif qui permet de trouver la diagonale du carré connaissant son côté c'est à dire ce que nous nommons aujourd'hui $\sqrt{2}$. Si l'on admet que la longueur du côté est 30, l'interprétation de la tablette est alors évidente :

Si tu veux trouver la longueur de la diagonale

d'un carré de côté 30,

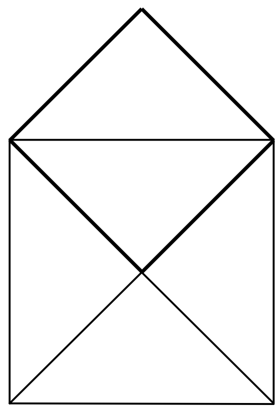
multiplie ce nombre par 1,41421296297 ;

tu trouveras alors 42,4263888889.

Le choix de 30 unités comme côté du carré peut paraître alors surprenant. Mais, si l'on admet que le côté mesure 30 soixantièmes d'unité, soit $\frac{1}{2}$, en multipliant cette valeur par le coefficient 1,41421296297, on obtient en sexagésimale 0-42-25-35 qui s'écrit en système décimal 0,7085648148, soit environ $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Les deux nombres écrits de la diagonale sont alors inverses l'un de l'autre. On retrouve dans ce cas les deux coefficients multiplicatifs permettant de passer du côté à la diagonale et inversement.

L'écriture positionnelle des nombres chez les Babyloniens est donc, à la base près, assez proche de notre écriture moderne. Elle est beaucoup mieux adaptée aux grands nombres et aux calculs que celles des Grecs et des Romains. Mais on a vu que certaines confusions étaient possibles surtout dans les groupements. Y avait-il un zéro pour indiquer l'absence de certains groupements ?

Jamais au début et à la fin d'un nombre, ce qui aurait pu permis de préciser le groupement des unités, tardivement en position médiale, mais les Babyloniens préféraient utiliser un vide : ainsi, un *chevron,* un *vide* et un *chevron* représentaient dix unités et la 360^{e} partie de l'unité.



Pour en revenir au fameux coefficient multiplicatif 1-24-51-10 soit environ 1,414, était-il nécessaire de connaître le théorème de Pythagore pour affirmer que ce nombre est le côté d'un carré égal à 2 ? Sans doute pas si l'on examine la figure ci-contre : la diagonale du petit carré unité en gras est le côté de l'autre carré dont l'aire est manifestement le double du premier cité. Le coefficient multiplicatif est bien le côté d'un carré égal à 2.

Premier algorithme

Héron d'Alexandrie, mathématicien du 1^{er} ou 2^{e} siècle de notre ère a laissé une œuvre scientifique importante dans de nombreux domaines comme la mécanique, l'optique et les mathématiques appliquées. Voici un extrait d'une de ses œuvres dans lequel il explique comment trouver le côté d'un *carré de 720*.[1]

> Puisque 720 n'a pas de côté rationnel, nous extrairons le côté avec une très petite différence de la façon suivante. Comme le premier nombre carré plus grand que 720 est 729 qui a pour côté 27, divise 720 par 27, cela fait 26 et $\frac{2}{3}$, ajoute 27 cela fait $53\frac{2}{3}$; prends-en la moitié, cela fait $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$. En fait, $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ multiplié par lui-même donne $720\frac{1}{36}$; de sorte que la différence (sur les carrés) est $\frac{1}{36}$. Si nous voulons rendre cette différence inférieure encore à $\frac{1}{36}$, nous mettrons $720\frac{1}{36}$ trouvé tout à l'heure à la place de 729 et, en procédant de la même façon, nous trouverons que la différence (sur les carrés) est beaucoup plus petite que $\frac{1}{36}$.

La démarche n'est pas difficile à suivre si l'on sait que les nombres fractionnaires sont notés *à l'anglo-saxonne :* $53\frac{2}{3}$ représente $53+\frac{2}{3}$ et $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ représente $26+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, mais des explications sont nécessaires pour bien la comprendre.

L'auteur cherche un nombre A tel que 720 = A × A. Ce nombre n'est pas une fraction donc il l'approche par un autre, A' (27 dans l'exemple).

Par conséquent A' × A' est différent de 720 ; en fait, il est un peu trop grand. Pour obtenir 720, il calcule un nombre B tel que B × A' = 720 qui lui, par compensation, sera plus petit que A, donc B = $\frac{720}{A'}$.

Héron obtient ainsi deux valeurs approchées de $\sqrt{720}$: l'une trop grande A' = 27, l'autre trop petite B = $\frac{720}{A'}$. Pour obtenir une valeur encore plus précise, il calcule leur moyenne arithmétique A'' = $\frac{1}{2}\left(A'+\frac{720}{A'}\right)$. Il est alors possible de réitérer le procédé avec cette nouvelle approximation.

Le logiciel *GeoplanW* nous a permis d'imager l'algorithme en cherchant des approximations successives de $\sqrt{2}$:

- A' est le point d'abscisse $\sqrt{2}$ à atteindre.
- M est un point dont l'abscisse a est la première approximation de $\sqrt{2}$: a = 1 sur la figure.
- M' est le point d'abscisse $\frac{2}{a}$ et I est le milieu de [MM'].

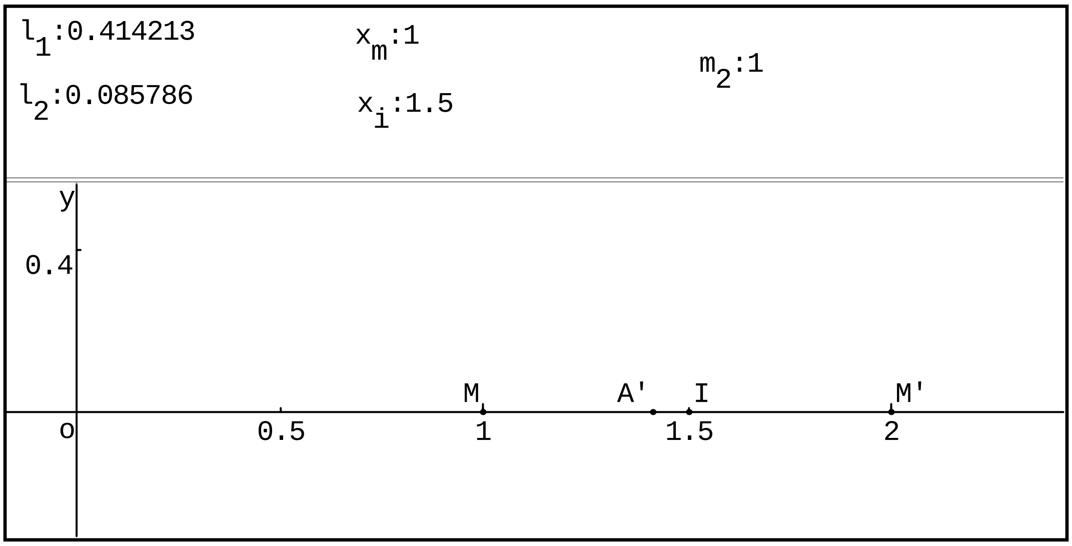
On a noté également les abscisses x_m et x_i des deux approximations consécutives ainsi que leur écart à la valeur cherchée.

En pilotant le point M (première approximation de $\sqrt{2}$) à la main ou au clavier (des changements de paramètres sont rapidement nécessaires), le travail consiste à le déplacer jusqu'au

[1] Extrait des *Métriques*, de *Heronis Alexandrini, Opera quae supersunt omnia…*, III : *Rationes dimetiendi et commentatio dioptrica*, éd. Hermann Schöne, Leipzig, 1903, Livre I, paragraphe 8, pp. 18-20. Traduction J.-P. Levet.

point I (approximation suivante de $\sqrt{2}$), et ainsi de suite, en relevant à chaque étape, les résultats obtenus.

On constate très vite que le procédé est très performant : en se limitant à une précision de 10^{-6}, on obtient en quatre itérations : 1,5 - 1,416667 - 1,414216 - 1,414214 . Des zooms successifs sont nécessaires pour celui qui veut distinguer les différents points !



Bien sûr, l'utilisation d'un tableur se prête particulièrement bien à ce type de travail. Les techniques de calcul sur Excel ainsi que les manipulations les plus courantes s'apprennent assez facilement. En voici les résultats donnant les six premières approximations de $\sqrt{2}$:

APPROXIMATION DE RACINE DE 2 PAR LA METHODE DE HERON						
			en nombres décimaux			
a_n	**1**	**1,5000**	**1,416666666667**	**1,414215686275**	**1,414213562375**	**1,414213562373**
$2/a_n$	2	1,3333	1,411764705882	1,414211438475	1,414213562372	1,414213562373
			en fractions			
a_n	**1**	**1 1/2**	**1 5/12**	**1 169/408**	**1 408/985**	**1 408/985**
$2/a_n$	2	1 1/3	1 7/17	1 239/577	1 408/985	1 408/985

La première valeur a_1 est l'approximation choisie au départ. Ensuite la valeur a_2 est la moyenne entre a_1 et $\frac{2}{a_1}$ et ainsi de suite. On peut donc faire le calcul suivant pour la valeur a_2 : dans la cellule C5, on calcule =MOYENNE(B5;B6) etc.

Une nouvelle approche.

$\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel. Ce résultat bien connu depuis les pythagoriciens peut être démontrer de plusieurs façons et reste un exemple classique de preuve par l'absurde dans nos classes de troisième ou de seconde. Nous l'admettrons.

a et *b* étant deux entiers, les écritures suivantes sont donc impossibles :

impossible !	**impossible !**	**impossible! impossible !**	**impossible ! impossible**
$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$	$2 = \frac{a^2}{b^2}$	$a^2 = 2b^2$	$a^2 - 2b^2 = 0$
impossible !	**impossible !**	**impossible! impossible !**	**impossible ! impossible**

Un carré n'est jamais égal au double d'un carré.

Mais si la nullité de $a^2 - 2b^2$ n'est jamais vérifiée, il est peut-être possible de s'en approcher. Et s'en approcher le plus possible, c'est bien sûr résoudre en nombres entiers les équations $a^2 - 2b^2 = 1$ et $a^2 - 2b^2 = -1$.

La première équation est un cas particulier des équations de Fermat du type $a^2 - Ab^2 = 1$.

"La question que j'avais proposée à M. Frenicle et autres est de grande difficulté : *tout nombre non carré est de telle nature qu'il y a infinis carrés qui, multipliant ledit nombre, font un carré moins 1*." (Fermat.)

Bien que des élèves littéraires soient intéressés par Fermat, son travail, ses relations avec les autres savants du 17e siècle, il n'était pas question, pour eux, d'aborder une démonstration d'époque permettant de trouver les valeurs possibles de *a* et *b*. Le tableur *Excel* nous a encore été d'un grand secours.

Le procédé utilisé a été le suivant (mais ce n'est pas le seul !).

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Colonne A : les entiers naturels.}\\ \text{Colonne B : les carrés de la colonne A } (a^2)\\ \text{Colonne C : le doubles des carrés de la colonne A } (2b^2)\end{array}\right.$$

Dans une seconde étape, on copie les valeurs des colonnes A et B pour les placer en D et E puis les colonnes A et C pour les placer en D et E sous le collage précédent. Il est pratique à ce niveau d'utiliser des couleurs différentes (gras-italique dans notre tableau) pour différentier les a^2 et les $2b^2$. Ensuite il suffit de trier en ordre croissant les colonnes D et E suivant la colonne E pour obtenir ce début, limité aux valeurs inférieures à 100 :

A	B	C	D	E
	a_n^2	$2b_n^2$		
1	1	***2***	1	1
2	4	***8***	1	***2***
3	9	***18***	2	4
4	16	***32***	2	***8***

(la suite ci-derrière)

5	25	***50***	3	9
6	36	***72***	4	16
7	49	***98***	3	***18***
8	64		5	25
9	81		4	***32***
			6	36
			7	49
			5	***50***
			8	64
			6	***72***
			9	81
			7	***98***
			10	100

On obtient donc dans la dernière colonne un mélange ordonné de a^2 et de $2b^2$. Aucun des nombres n'est cité deux fois d'après la règle énoncée plus haut mais certains entiers sont consécutifs : 1-2 ; 8-9 ; 49-50 dans notre extrait.

Les trois premières colonnes sont maintenant inutiles. On ne conserve que la colonne des a ou b et la colonne des a^2 ou des $2b^2$. Il ne faut pas, bien sûr, se contenter des valeurs inférieures à 100. Les élèves ont testé jusqu'à 72000000 qui correspond à 2×6000^2, soit plus de 14000 lignes !

Pour trouver les solutions, un test logique est nécessaire. Sur la colonne suivante, les élèves ont calculé la différence de deux valeurs consécutives. Il suffit alors de tester si la valeur obtenue est un ; dans ce cas le mot EUREKA s'inscrit. Le rapport $\frac{a}{b}$ ou $\frac{b}{a}$ dans le cas où $\frac{a}{b}$ est inférieur à 1 (il suffit de calculer l'inverse) fournit alors une approximation de $\sqrt{2}$. Voilà les différentes valeurs obtenues dans le tableau ainsi que des extraits des 14000 lignes *d'Excel*.

a ou *b*	a^2 ou $2\,b^2$	différence	rapport	approximation de $\sqrt{2}$	et en fraction
1	1				
1	2	1	1	**1,000000000000**	**1**
2	8				
3	9	1	1,5	**1,500000000000**	**1 1/2**
7	49				
5	50	1	0,71428571	**1,400000000000**	**1 2/5**
12	288				
17	289	1	1,41666667	**1,416666666667**	**1 5/12**
41	1681				
29	1682	1	0,70731707	**1,413793103448**	**1 12/29**
70	9800				
99	9801	1	1,41428571	**1,414285714286**	**1 29/70**
239	57121				
169	57122	1	0,70711297	**1,414201183432**	**1 70/169**

408	332928				
577	332929	1	1,41421569	**1,414215686275**	**1 169/408**
1393	1940449				
985	1940450	1	0,70710696	**1,414213197970**	**1 408/985**
2378	11309768				
3363	11309769	1	1,41421362	**1,414213624895**	**1 408/985**
8119	65918161				
5741	65918162	1	0,70710679	**1,414213551646**	**1 408/985**

Quelques extraits de la feuille Excel :

1	1					
1	2	1	**EUREKA**	1	**1,000000000000**	**1**
2	4	2				
2	8	4				
3	9	1	**EUREKA**	1,5	**1,500000000000**	**1 1/2**
4	16	7				
3	18	2				
5	25	7				
4	32	7				
6	36	4				
7	49	13				
5	50	1	**EUREKA**	0,71428571	**1,400000000000**	**1 2/5**
8	64	14				
6	72	8				

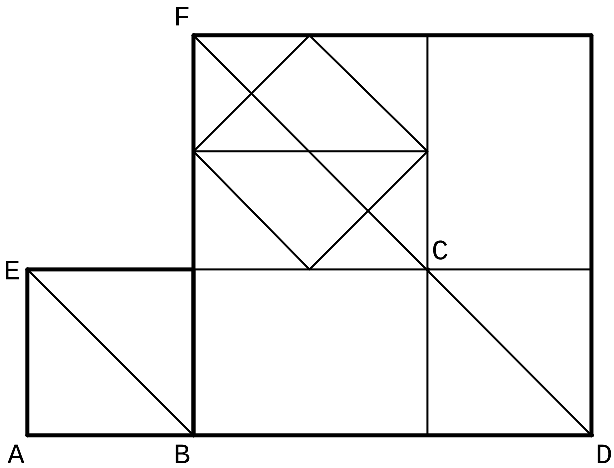
98	9604	82				
70	9800	196				
99	9801	1	**EUREKA**	1,41428571	**1,414285714286**	**1 29/70**
100	10000	199				
71	10082	82				

576	331776	478				
408	332928	1152				
577	332929	1	**EUREKA**	1,41421569	**1,414215686275**	**1 169/408**
578	334084	1155				
409	334562	478				

1393	1940449	2785				
985	1940450	1	**EUREKA**	0,70710696	**1,414213197970**	**1 408/985**
1394	1943236	2786				
986	1944392	1156				

8118	65901924	6724				
8119	65918161	16237				
5741	65918162	1	**EUREKA**	0,70710679	**1,414213551646**	**1 408/985**
8120	65934400	16238				
5742	65941128	6728				
8121	65950641	9513				
5743	65964098	13457				

Dernière approche : nombres latéraux et diagonaux



Examinons la figure ci-dessus. Au petit carré de côté AB = a_1 et de diagonale BE = d_1, on adjoint le carré de côté BD = $a_2 = a_1 + d_1$. Que vaut alors la diagonale DF = d_2 ? Les constructions supplémentaires montre que FC = 2 a_1, donc que DF = $d_2 = d_1 + 2\, a_1$.

La double récurrence $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + d_{n-1} \\ d_n = 2a_{n-1} + d_{n-1} \end{cases}$ permet donc de passer d'un carré de côté a_n et de diagonale d_n à un autre carré plus grand. Encore faut-il générer cette double suite par des valeurs initiales. On démontre que si l'on donne à a_1 et d_1 des valeurs entières arbitraires, le rapport $\frac{d_n}{a_n}$ tend vers $\sqrt{2}$. Théon de Smyrne, mathématicien grec du 2$^{\text{ème}}$ siècle, parle dans son *Exposition des connaissances utiles à la lecture de Platon* des nombres *latéraux* et *diagonaux* pour désigner les termes de ces deux suites. Voici, pour information, quelques explications.

Nombres latéraux et diagonaux

Dans le paragraphe précédent, on a pu constater que des approximations successives de $\sqrt{2}$ pouvaient se déduire des solutions entières des équations

$$d^2 - 2a^2 = \pm 1.$$

Les solutions sont des couples successifs constitués respectivement de ce qu'on appelle un *nombre latéral* et un *nombre diagonal*.

La loi de formation de ces nombres est expliquée par Théon de Smyrne de la façon suivante. L'unité, étant le commencement de toute chose, doit être potentiellement à la fois un nombre latéral et diagonal. Par conséquent nous commençons avec deux unités, la première étant le premier *latéral* que nous appelons a_1, l'autre étant le premier diagonal que nous appelons d_1.

Les couples de latéraux et de diagonaux suivants sont formés par la récurrence rencontrée plus haut :

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + d_1, \quad d_2 = 2a_1 + d_1. \\ a_3 = a_2 + d_2, \quad d_3 = 2a_2 + d_2.. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n+1} = a_n + d_n, \quad d_{n+1} = 2a_n + d_n. \end{cases}$$

Puisque $a_1 = d_1 = 1$, on obtient les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{ll} a_2 = 1+1 = 2, & d_2 = 2.1+1 = 3, \\ a_3 = 2+3 = 5, & d_3 = 2.2+3 = 7, \\ a_4 = 5+7 = 12, & d_4 = 2.5+7 = 17 \text{ etc.} \end{array}$$

Théon établit, la formules générale : $d_n^2 = 2a_n^2 \pm 1$, et il observe que la valeur de $d_n - 2a_n$ est alternativement +1 et -1 suivant que n est pair ou impair et que la somme paire des carrés de tous les diagonaux est le double de la somme paire des carrés de tous les latéraux. La propriété énoncée se déduit de l'identité suivante :

$$(2x + y)^2 - 2(x + y)^2 = 2x^2 - y^2,$$

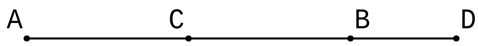
car si x et y satisfont à l'une des deux équations $2x^2 - y^2 = \pm 1$, la formule nous donne, si elle est vraie, deux nombres plus grands, $x + y$ et $2x + y$ qui satisfont à l'autre des deux équations.

Nous pouvons, bien sûr, prouver algébriquement la propriété des nombres latéraux et diagonaux comme suit :

$$\begin{aligned} d_n^2 - 2a_n^2 &= (2a_{n-1} + d_{n-1})^2 - 2(a_{n-1} + d_{n-1})^2 \\ &= 2a_{n-1}^2 - d_{n-1}^2 \\ &= -(d_{n-1}^2 - 2a_{n-1}^2) \\ &= +(d_{n-2}^2 - 2a_{n-2}^2), \text{ de la même façon ; et ainsi de suite.} \end{aligned}$$

Proclus, dans son *Commentaire sur la République de Platon*, nous montre comment ces propriétés furent démontrées avec les moyens des mathématiciens grecs. Il suffit de lire la proposition 10 du deuxième livre des *Eléments* d'Euclide. La proposition prouve que si [AB] a pour milieu C et est prolongé en D, alors

$$AD^2 + DB^2 = 2AC^2 + 2CD^2 ;$$



et, si AC = CB =x et BD = y ceci donne :

$$(2x + y)^2 + y^2 = 2x^2 + 2(x + y)^2,$$

$$\text{ou } (2x + y)^2 - 2(x + y)^2 = 2x^2 - y^2; \text{qui est la formule voulue.}$$

Dans le fameux passage de la *République* (546 c) traitant du nombre géométrique, Platon fait une distinction entre la *diagonale irrationnelle de 5*, c'est à dire la diagonale d'un carré de côté 5, et ce qu'il appelle *la diagonale rationnelle* de *5*. Le carré de la *diagonale rationnelle* est moindre d'une unité que le carré de la *diagonale irrationnelle,* et vaut donc 49, ainsi la *diagonale rationnelle* est *7* ; Platon se réfère au fait que $2.5^2 – 7^2 = 1$, et a en tête le couple de nombres latéraux et diagonaux 5 et 7, qui devaient donc être connus avant cette époque. Comme la preuve générale de la propriété de ces nombres utilise, comme Proclus le dit, la proposition 10 du livre II d'Euclide, il est plausible que ce théorème soit pythagoricien, et qu'il fut peut-être inventé pour ce cas particulier.

Pour terminer, revenons à nos activités avec les premières littéraires. Ces récurrences ont encore été exploitées avec le tableur Excel. En voici les résultats.

rang	1	2	3	4
a_n	1	2	5	12
b_n	1	3	7	17
b_n/a_n	1,00000000000000	1,50000000000000	1,40000000000000	1,41666666666667
écarts	-0,41421356237310	0,08578643762690	-0,01421356237310	0,00245310429357

rang	5	6	7	8
a_n	29	70	169	408
b_n	41	99	239	577
b_n/a_n	1,41379310344828	1,41428571428571	1,41420118343195	1,41421568627451
écarts	-0,00042045892482	0,00007215191262	-0,00001237894114	0,00000212390141

rang	9	10	11	12
a_n	985	2378	5741	13860
b_n	1393	3363	8119	19601
b_n/a_n	1,41421319796954	1,41421362489487	1,41421355164605	1,41421356421356
écarts	-0,00000036440355	0,00000006252177	-0,00000001072704	0,00000000184047

rang	13	14	15	16
a_n	33461	80782	195025	470832
b_n	47321	114243	275807	665857
b_n/a_n	1,41421356205732	1,41421356242727	1,41421356236380	1,41421356237469
écarts	-0,00000000031577	0,00000000005418	-0,00000000000930	0,00000000000159

rang	17	18	19	20
a_n	1136689	2744210	6625109	15994428
b_n	1607521	3880899	9369319	22619537
b_n/a_n	1,41421356237282	1,41421356237314	1,41421356237309	1,41421356237310
écarts	-0,00000000000027	0,00000000000005	-0,00000000000001	0,00000000000000

Documents annexes.

1) Théon de Smyrne, *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon*. Traduction J. Dupuis. Hachette 1892. pages 71 à 75.

Des nombres latéraux et des nombres diagonaux.

De même que les nombres ont en puissance les rapports des triangulaires, des tétragones, des pentagones et des autres figures, de même, nous trouverons que les rapports des nombres latéraux et des nombres diagonaux se manifestent dans les nombres selon des raisons génératrices, car ce sont les nombres qui harmonisent les figures. Donc comme l'unité est le principe de toutes les figures, selon la raison suprême et génératrice, de même aussi le rapport de la diagonale et du côté se trouve dans l'unité.

Supposons par exemple deux unités dont 1'une soit la diagonale et l'autre le côté, car il faut que l'unité qui est le principe de tout soit en puissance le côté et la diagonale ; Ajoutons au côté la diagonale et à la diagonale ajoutons deux côtés, car ce que le côté peut deux fois, la diagonale le peut une fois. Dès lors la diagonale est devenue plus grande et le côté plus petit. Or, pour le premier côté et la première diagonale, le carré de la diagonale unité sera moindre d'une unité que le double carré du côté unité, car les unités sont en égalité, mais un est moindre d'une unité que le double de l'unité. Ajoutons maintenant la diagonale au côté, c'est à dire une unité à l'unité, le côté vaudra alors 2 unités; mais, si nous ajoutons deux côtés à la diagonale, c'est à dire 2 unités à 1'unité, la diagonale vaudra 3 unités : le carré construit sur le côté 2 est 4. et le carré de la diagonale est 9 qui est plus grand d'une unité que le double carré de 2.

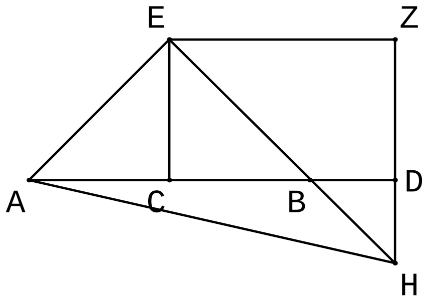
De même ajoutons au côté 2 la diagonale 3, le côté deviendra 5. Si à la diagonale 3 nous ajoutons deux côtés, c'est à dire 2 fois 2, nom aurons 7 unités. Le carré construit sur le côté 5 est 25, et celui qui est construit sur la diagonale 7 est 49, qui est moindre d'une unité que le double (50) du carré 25. De nouveau, si au côté 5 on ajoute la diagonale 7, on obtient 12 unités ; et si à la diagonale 7 on ajoute 2 fois le côté 5, on aura 17 dont le carré (289) est plus grand d'une unité que le double (288) du carré de 12. Et ainsi de suite en continuant l'addition. La proportion alterne : le carré construit sur la diagonale sera tantôt plus petit, tantôt plus grand, d'une unité, que le double carré construit sur le côté, en sorte que ces diagonales et ces côtés seront toujours exprimables.

Inversement les diagonales comparées aux côtés, en puissance, sont tantôt plus grandes d'une unité que les doubles, tantôt plus petites d'une unité. Toutes les diagonales sont donc, par rapport aux carrés des côtés, doubles alternativement par excès et par défaut, la même unité combinée également avec tous, rétablissant l'égalité, en sorte que le double ne pèche ni par excès ni par défaut ; en effet, ce qui manque dans la diagonale précédente se trouve en excès, en puissance dans la diagonale qui suit.

2) Euclide, *Les Eléments*, traduction F. Peyrard. Réédition Blanchard. Livre II. Prop. 10.

Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, et si on lui ajoute directement une droite, le quarré de la droite entière avec la droite ajoutée, et le quarré de la droite ajoutée, étant pris ensemble, sont doubles du quarré de la moitié de la droite entière, et du quarré décrit avec la droite composée de la moitié de la droite entière et de la droite ajoutée, comme avec une seule droite.

Qu'une droite AB soit coupée en deux parties égales en C, et qu'on lui ajoute directement une droite BD ; je dis que les quarrés des droites AD, DB sont doubles des quarrés des droites AC, CD.



Du point C conduisons CE perpendiculaire à AB ; faisons cette droite égale à l'une ou à l'autre des droites AC, CB; joignons EA, EB ; par le point E conduisons EZ parallèle à AD; et par le point D conduisons ZD parallèle à CE. Puisque la droite EZ tombe sur les parallèles EC, ZD, les angles CEZ, EZD sont égaux à deux droits ; donc les angles ZEB, EZD sont plus petits que deux droits. Mais deux droites prolongées se rencontrent du côté où les angles sont plus petits, que deux droits ; donc les droites EB, ZD, prolongées se rencontreront du côté BOUL. Prolongeons ces droites; quelles se rencontrent au point H ; et joignons AH.

Puisque AC est égal à CE, l'angle AEC est égal à l'angle EAC ; mais l'angle en C est droit; donc chacun des angles EAC, AEC est la moitié d'un droit. Par la même raison, chacun des angles CEB, EBC est la moitié d'un droit ; donc l'angle AEB est droit. Et puisque l'angle EBC est la moitié d'un angle droit, l'angle DBH est la moitié d'un droit. Mais l'angle BDH est droit, car il est égal à l'angle alterne DCE; donc l'angle restant DHB est égal à l'angle DBH, donc le côté BD est égal au CÖT2 BH. De plus, puisque l'angle EHZ est la moitié d'un droit, et que l'angle en Z est droit, car il est égal à l'angle opposé en C, l'angle restant ZEH est la moitié d'un droit; donc l'angle EHZ est égal à l'angle ZEH; donc le côté HZ est égal au côté ZE. Et puisque EC est égal à CA, le quarré de EC est égal au quarré de CA ; donc les quarrés des droites EC, CA sont doubles du quarré de CA. Mais le quarré de AE est égal aux quarrés des droites EC, CA ; donc le quarré de EA est double du quarré de AC. De plus, puisque ZH est égal à ZE, le quarré de HZ est égal au quarré de ZE ; donc les quarrés des droites HZ, ZE sont doubles du quarré de EZ. Mais le quarré de EH est égal aux quarrés des droites HZ, ZE ; donc le quarré de EH est double du quarré de EZ. Mais EZ est égal à CD ; donc le quarré de EH est double du quarré de CD. Mais on a démontré que le quarré de EA est double du quarré de AC; donc les quarrés des droites AE, EH sont doubles des quarrés des droites AC, CD. Mais le quarré de AH est égal aux quarrés des droites AE, EH ; donc le quarré AH est double des quarrés des droites AC, CD. Mais les quarrés des droites AD, DH sont égaux au quarré de AH ; donc les quarrés des droites AD, DH Sont doubles dès quarréS, des droites AC, CD ; mais la droite DH est égale à la droite DB ; donc les quarrés des droites AD, DB sont doubles des quarrés des droites AC, CD, Donc, etc.

I. Auteurs	Pierre COLLAUDIN Frédéric METIN Philippe REGNARD Patrick GUYOT Marie-Noëlle RACINE Jean TERRERAN
II. Titre	***Pot-pourri : activités historico-mathématiques***
III . Caractéristique de l'édition	Editée par l'IREM Dijon en 2004, A4, 80 pages
IV Types de documents et supports	Ouvrage papier
V Public Visé	Tous enseignants de mathématiques, sciences, histoire et philosophie

VI. Contenu

- ✓ Bon an, mal an
- ✓ Introduction historique des nombres complexes
- ✓ Le triangle d'Ahmès revisité par Fourrey ou Fourrey déforma-t-il le triangle d'Ahmès
- ✓ Une histoire d'eaux landaise ou Dans quel milieu sommes-nous ?
- ✓ "Inscrire un carré dans un triangle"
- ✓ Candide face à l'infiniment petit :une introduction de la dérivation avec des textes anciens
- ✓ Quelques activités autour de Racine de deux.

VII. Mots Clés

Histoire des mathématiques	utilisations en classe,	Cardan	équations du troisième degré
nombres imaginaires	Ahmès	mathématiques égyptiennes	géométrie du triangle
calculs d'aire	Lalande	statistiques	moyenne
milieu	Bézout	algèbre appliquée à la géométrie	Lezibniz
Voltaire	L'Hôpital	calcul différentiel	Théon de Smyrne
mathématiques babyloniennes	mathématiques grecques	nombres irrationnels	nombres diagonaux et latéraux

Prix : 8 €, plus frais de port