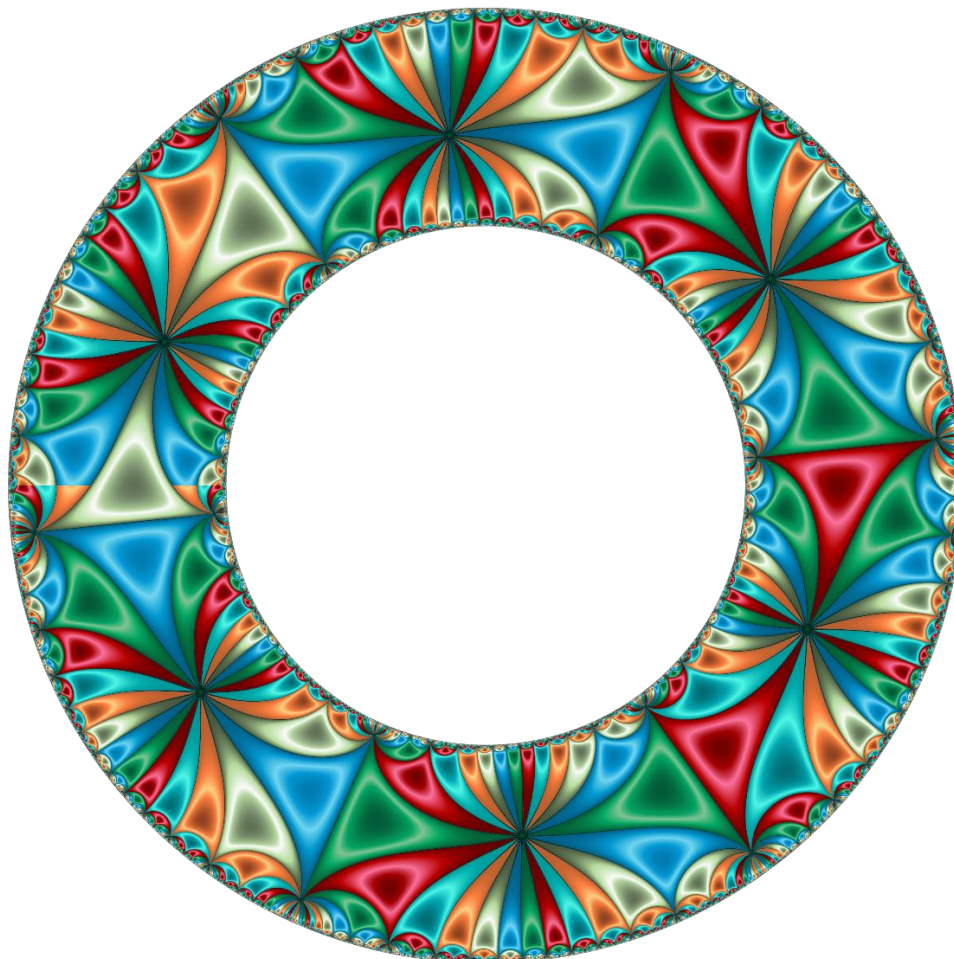


RALLYE MATHÉMATIQUE DE BOURGOGNE

2023 : 41^e rallye



!

HypRing006, avec l'aimable autorisation de Jos Leys (<http://www.josleys.com>)

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

Faculté Sciences Mirande - B.P. 47 870 - 21078 DIJON cedex

☎ 03 80 39 52 30 - Télécopie 03 80 39 52 39

e-mail "iremsecr@u-bourgogne.fr" - <http://irem.u-bourgogne.fr>

L'Institut de Mathématiques de Bourgogne (IMB)¹ est heureux de participer chaque année aux différentes manifestations organisées par l'IREM de l'université de Bourgogne. Le laboratoire a d'ailleurs choisi d'héberger l'IREM dans ses locaux pour une meilleure et efficace collaboration en le rapprochant des chercheurs et enseignants-chercheurs de celui-ci dont certains avaient assuré la direction de cette entité.

Je remercie l'équipe pédagogique de l'IREM pour l'organisation de cet évènement important dans la diffusion des mathématiques auprès du jeune public et pour donner à la nouvelle génération le goût des mathématiques, importantes dans le développement de notre pays

(voir <https://www.insmi.cnrs.fr/fr/cnrsinfo/les-mathematiques-un-impact-majeur>).

Je souhaite à toutes et à tous de passer un agréable moment d'échange et de réflexion sur des sujets mathématiques qui vous ont été proposés par les organisateurs. Dites vous que ce rallye des mathématiques est l'une des compétitions où il n'y a pas de perdants car l'essentiel est l'apprentissage qui est, à mon avis, essentiel pour réussir dans la vie.

Abderrahim JOURANI, Directeur de l'Institut de Mathématiques de Bourgogne

Quarante-et-un, c'est un de plus que l'année passée ! Heureuse sécurité donnée par la suite des nombres entiers : il y en a toujours un pour continuer.

Le travail de l'équipe « Rallye des lycées » de l'IREM de Dijon est un peu basé sur le même principe de continuité : il y en a toujours un (ou une) pour relancer la dynamique et remettre sur le métier l'ouvrage collectif.

Il ne faut pas croire que cela soit de tout repos. Certes, l'une d'entre les membres du groupe a gardé toute la fraîcheur de sa jeunesse, mais il suffit de voir ses camarades blanchis sous le harnais des années de labeur pour se rendre compte du travail que la création et l'organisation du Rallye représente depuis tant d'années. Néanmoins, il faut rappeler que les mathématiques contribuent à la conservation de la jeunesse et de l'œil pétillant quand il s'agit de recherche, surtout dans un contexte ludique.

Autrement dit, nos compétitions, qui n'en sont pas, doivent permettre aux participant/e/s de conserver cette jeunesse qu'on leur enviera encore dans quelques années. Alors, bravo à l'équipe organisatrice qui apporte cette cure de jouvence tous les ans, et bravo aux jeunes qui participent à l'aventure avec constance, qu'ils soient récompensés ou non.

Nous souhaitons que l'itération $n \rightarrow n + 1$ soit encore opérationnelle longtemps !

Frédéric MÉTIN, directeur de l'IREM de Dijon.

¹ L'IMB est l'unique laboratoire de mathématiques de Bourgogne et placé sous la double tutelle de l'université de Bourgogne et du Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS). Il est structuré en trois équipes de recherche allant des aspects les plus théoriques aux plus appliqués et regroupe une centaine de membres dont 80 docteurs en mathématiques. Sa mission principale est la recherche en mathématiques et la formation par et à la recherche puisqu'il compte une trentaine de thésards en son sein. En 6 ans, le laboratoire a porté et participé à une cinquantaine de projets nationaux et internationaux, ce qui représente 6 millions d'euros de ressources propres (hors dotations récurrentes de l'uB et du CNRS). L'activité scientifique de l'IMB est riche et variée. Pour avoir une idée sur celle-ci, je vous invite à consulter notre site Web (<https://math.u-bourgogne.fr/>).

Cette année encore, le rallye mathématique de Bourgogne s'inscrit dans une dynamique de réussite qui repose sur l'investissement sans failles de tous les acteurs. Comment dès lors ne pas commencer cette préface par des remerciements appuyés ?

Des remerciements pour l'équipe organisatrice et conceptrice des sujets toujours aussi variés et originaux.

Des remerciements pour l'IREM qui organise la cérémonie de remise des prix, moment incontournable du rallye au cours duquel les mathématiques sont à l'honneur.

Des remerciements pour les professeurs qui ont proposé l'inscription à leurs élèves, dans leur engagement toujours renouvelé au service de notre belle discipline.

Et bien sûr des remerciements pour vous tous, lycéennes et lycéens de l'académie de Dijon et du lycée Mermoz d'Abidjan en Côte d'Ivoire, qui avez participé à ce concours désormais bien établi dans notre académie.

Le rallye mathématique est l'occasion de faire des mathématiques autrement. À travers des exercices qui laissent libre cours à l'imagination, la prise d'initiative et la créativité, les élèves recherchent en équipe les solutions à des problèmes ouverts, très riches et qui peuvent être abordés sous différents angles.

En dehors de tout académisme, mais avec des outils, des connaissances et des savoir-faire inscrits dans les programmes officiels, chacun des membres de l'équipe apporte sa contribution dans une ambiance ludique quelquefois festive.

Quel plus bel hommage rendre aux mathématiques ?

Ainsi, le rallye de Bourgogne participe du rayonnement et de la valorisation des mathématiques.

Comme le disait le mathématicien Georges Cantor : « L'essence des mathématiques, c'est la liberté ». Pour toutes les raisons évoquées, le rallye mathématique s'inscrit dans cette recherche de liberté.

Frédéric Lemasson, IA-IPR de mathématiques

1. ÉNONCÉS 2023

Exercice 1 : PRESQUE TOUS MULTIPLES

Trouver des entiers naturels qui vérifient les quatre conditions suivantes :

- Tous, sauf deux, sont des multiples de 2 ;
- Tous, sauf trois, sont des multiples de 3 ;
- Tous, sauf cinq, sont des multiples de 5 ;
- Tous, sauf sept, sont des multiples de 7.

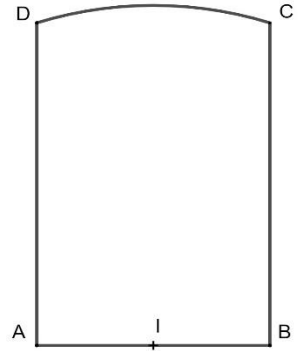
Exercice 2 : MAUDIT GAZON

Lise dispose d'un champ rectangulaire dans lequel elle souhaite créer un terrain pour y pratiquer un sport dérivé du base-ball.

Le terrain est tel que les angles de sommets A et B sont droits et ses dimensions sont : $AB = 35$ mètres et $AD = BC = 56$ mètres.

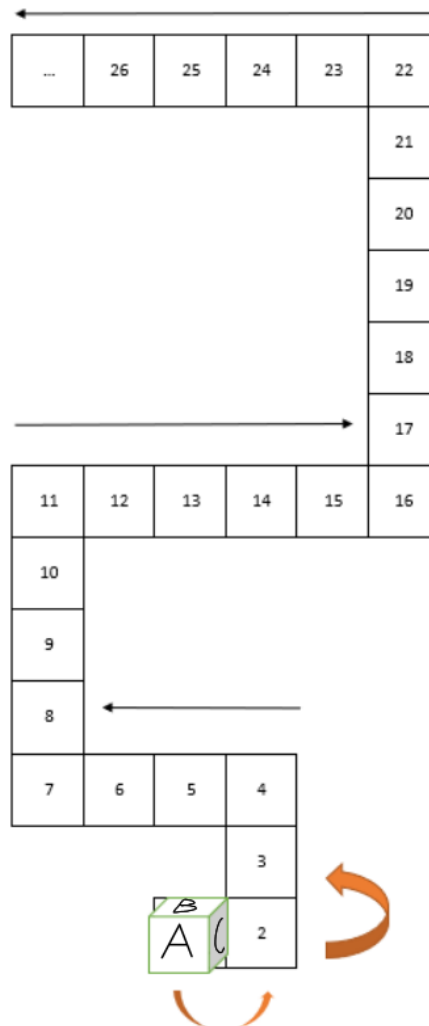
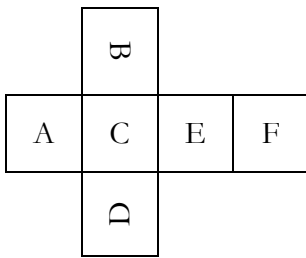
L'arc de cercle reliant C à D a pour centre le point I milieu de $[AB]$.

Déterminer l'aire du terrain, arrondie au m^2 le plus proche.



Exercice 3 : DÉ QUI ROULE

Un dé à 6 faces, dont le patron est donné ci-dessous, est placé sur la case N°1 de la grille suivante.



On le bascule la face C contre la case 2, la face B contre la case 3 et ainsi de suite pour passer d'une case à la suivante. Quelle est la lettre sur la face du dessus lorsqu'il atteint la case 2023 ?

Exercice 4 : PAGINATION

Dans ce gros livre, pour numéroter les pages, on a utilisé 3 fois plus de chiffres que de pages.
Combien a-t-il de pages ?

Exercice 5 : BOÎTE

Une boîte dont les longueurs des arêtes sont entières a une forme parallélépipédique rectangle. Si on ajoute les longueurs (en cm) des douze arêtes, les aires (en cm^2) des six faces et son volume (en cm^3), on trouve 33 033.
Quelles sont les dimensions de cette boîte ?

Exercice 6 : QUADRATURE DU CERCLE

Découper un disque de 10 cm de rayon en trois morceaux, de manière à recouvrir (les chevauchements sont possibles) un carré de 16 cm de côté.

Exercice 7 : RESCAPÉS

Dans la suite des entiers naturels non nuls 1, 2, 3, 4, etc, on barre de 2 en 2 tous les entiers à partir du deuxième.
Parmi ceux qui restent (les impairs), on barre de 3 en 3 tous les entiers à partir du troisième.
Parmi ceux qui restent, on barre de 4 en 4 tous les entiers à partir du quatrième, et ainsi de suite...
L'entier 2023 figure-t-il parmi les rescapés ?

Exercice 8 : HORLOGE FATIGUÉE

Une horloge, dont le mécanisme est fatigué, a été mise à l'heure à 12h, ce 29 mars 2023.

La grande aiguille effectue :

- son premier tour de cadran en 61 min (à vitesse constante),
- son deuxième tour en 62 min (toujours à vitesse constante),
- son troisième tour en 63 min, et ainsi de suite, en perdant une minute supplémentaire à chaque tour effectué à vitesse constante.

Quand marquera-t-elle à nouveau la bonne heure pour la première fois ?

Exercice 9 : MON PRÉCIEUX

Peut-on ranger un anneau de 3 cm de rayon (et d'épaisseur négligeable) dans une boîte cubique de côté 5 cm ?

Solutions succinctes

Exercice	Solution
1. Presque tous multiples	Par exemple, la liste {11, 13, 22, 66, 78, 330, 390, 2310}
2. Maudit gazon	Environ 2023 m^2 .
3. Dé qui « roule »	Sur la case 2023, la face du dessus sera le E.
4. Pagination	Ce gros livre contient 1107 pages.
5. Boîte	Les dimensions en cm de la boîte sont : 17, 35 et 45.
6. Quadrature du cercle	Voir schémas dans la correction détaillée.
7. Rescapés	L'entier 2023 figure parmi les rescapés.
8. Horloge fatiguée	Vendredi 31 mars à 13h 26 min et 50,4 secondes environ.
9. Mon Précieux	On peut ranger l'anneau (Voir schémas dans la correction détaillée).

2. LA PARTICIPATION

Le 41^{ème} Rallye mathématique de Bourgogne des lycées s'est déroulé le mercredi 29 mars 2023.

Il a concerné :

24 lycées

147 équipes

478 participants.

Voici l'évolution de la participation ces sept dernières années :

Année	Côte d'Or	Nièvre	Saône et Loire	Yonne	Total des participants
2017	427	172	180	69	848
2018	288	156	166	65	675
2019	319	133	166	43	661
2020	304	45	273	65	687
2021	104	30	43	26	203
2022	264	85	28	40	417
2023	280	45	51	102	478

Les effectifs par lycée et par niveau sont récapitulés ci-après.

Niveau I : secondes (générales, technologiques et professionnelles), premières générales (non spécialité mathématiques), terminales générales (élèves n'ayant pas suivi d'enseignement mathématique depuis la 2^{nde})

Niveau II : premières et terminales technologiques

Niveau III : premières générales (spécialité mathématiques) et terminales générales (élèves n'ayant suivi la spécialité mathématiques qu'en première)

Niveau IV : terminales (spécialité mathématiques ou option « mathématiques complémentaires »)

Niveau	Nombre d'équipes				Nombre de candidats			
	I	II	III	IV	I	II	III	IV
21 - Lycée Anna Judic	5	0	2	1	13	0	6	1
21 - Lycée Carnot	4	0	5	4	16	0	19	16
21 - Lycée Charles de Gaulle	10	0	3	4	34	0	9	15
21 - Lycée Eiffel	8	0	6	0	27	0	20	0
21 - Lycée Henri Moisan	1	2	0	0	4	6	0	0
21 - Lycée Hippolyte Fontaine	2	0	0	1	5	0	0	4
21 - Lycée Le Castel	1	0	0	0	4	0	0	0
21 - Lycée Montchapet	5	0	2	0	9	0	7	0
21 - Lycée Prieur de la Côte d'Or	1	0	1	2	3	0	4	5
21 - Lycée Saint Joseph - La Salle	10	0	0	0	36	0	0	0
21 - Lycée Stephen Liégeois	2	0	1	2	7	0	2	8
58 - Lycée Maurice Genevoix	2	0	2	0	8	0	6	0
58 - Lycée Notre-Dame – Nevers	1	0	3	2	2	0	9	8
58 - Lycée Romain Rolland	2	0	0	1	8	0	0	4
71 - Lycée Henri Parriat	3	0	2	2	5	0	7	6
71 - Lycée Julien Wittmer	0	0	0	1	0	0	0	4
71 - Lycée La Prat's	1	0	1	0	4	0	2	0
71 - Lycée militaire d'Autun	1	0	0	0	4	0	0	0
71 - Lycée Niepce Balleure	5	0	1	1	12	0	3	4
89 - Lycée Chevalier d'Éon	2	0	0	2	7	0	0	6
89 - Lycée du Parc des Chaumes	4	0	0	3	16	0	0	7
89 - Lycée Jacques Amyot	5	0	4	5	18	0	11	20
89 - Lycée Louis Davier	1	0	2	1	3	0	5	4
89 - Lycée Pierre Larousse	1	0	0	0	4	0	0	0
Total	77	2	35	32	249	6	110	112

À noter cette année la forte augmentation des participants de l'Yonne, avec en particulier la participation hors concours d'un élève de troisième !

3. L'ORGANISATION

L'IREM (Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques), dépendant de l'Université de Bourgogne, est l'organisateur du rallye.

Le financement est assuré par l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public), l'IREM et le Rectorat.

L'élaboration des sujets et la correction des copies sont assurées dans le cadre de l'IREM par : Anthony OSSWALD, Florian PLASTRE et Marie WAGNER.

Trois autres personnes ont participé au choix définitif des sujets : Frédéric LEMASSON, Maurice NUSSBAUM et Thomas BUREL. Nous les remercions vivement pour leurs cobayages éclairés.

Il faut remercier tout spécialement :

Monsieur Pierre N'GAHANE, Recteur de l'Académie de Dijon, Mesdames et Messieurs les Chefs d'Établissement, Adjointes et CPE, qui ont autorisé et permis la mise en place du Rallye.

Francis CORTADO, William EXERTIER et Frédéric LEMASSON, IA-IPR de mathématiques, pour leur soutien au rallye des lycées.

Frédéric MÉTIN, Directeur de l'IREM.

Tous les professeurs qui ont bénévolement assuré l'organisation matérielle du Rallye dans leur établissement et la surveillance de l'épreuve.

Céline DAUBIGNEY, qui est responsable à l'IREM de la "logistique" du Rallye et de la publication de cette brochure.

Tous ceux qui ont bien voulu chercher les problèmes posés et nous faire part de leurs idées, par courrier, par la presse régionale ou par Internet.

Et bien évidemment les 478 Bourguignons qui ont travaillé durement...

4. LA RÉUSSITE

Exercice	Nombre d'équipes ayant abordé le problème	Proportion d'équipes ayant abordé le problème	Proportion d'équipes ayant donné la bonne réponse
1. Presque tous multiples	77	97,5%	37,7%
2. Maudit gazon	74	93,7%	31,1%
3. Dé qui « roule »	63	79,7%	22,2%
4. Pagination	145	98,6%	65,5%
5. Boîte	108	73,5%	18,5%
6. Quadrature du cercle	131	89,1%	88,5%
7. Rescapés	52	77,6%	51,9%
8. Horloge fatiguée	53	79,1%	2%
9. Mon Précieux	63	94%	19%

5. LE PALMARÈS

(Seules les équipes de moins de 5 élèves seront récompensées)

Les meilleures équipes sont :

Niveau I (secondes (générales, technologiques et professionnelles), premières générales (non spécialité mathématiques), terminales générales (élèves n'ayant pas suivi d'enseignement mathématique depuis la 2^{nde}))

**L'équipe : [BLONDET Hermine, SHISHIDO Lise, LOSANGO Dercas, TURPIN Mélodie]
du lycée Romain Rolland de Clamecy avec 51 points sur 60.**

Niveau II (premières et terminales technologiques)

**L'équipe : [DARGAUD-NECTOUX Louise, DUMONT Marthe, VINCENT Manon]
du lycée Henri Moisan de Longchamp avec 56 points sur 60.**

Niveau III (premières générales (spécialité mathématiques) et terminales générales (élèves n'ayant suivi la spécialité mathématiques qu'en première))

**L'équipe : [GIERCZAK-GALLE Tristan, REGNAUD Matthieu, TARNAUD Émilien, KOBESSI Haïdar]
du lycée Charles de Gaulle de Dijon avec 51 points sur 60.**

Niveau IV (terminales (spécialité mathématiques ou option « mathématiques complémentaires »))

**L'équipe : [GEBAUER Jiri, CORNOT Gaylor, DROUYNOT Titouan, BIRON Paul]
du lycée Carnot de Dijon avec 55 points sur 60.**

Nous déclarons meilleure « équipe » du rallye 2023

**DARGAUD-NECTOUX Louise, DUMONT Marthe, VINCENT Manon
du lycée Henri Moisan de Longchamp**

Secondes (générales, technologiques et professionnelles), premières générales (non spécialité mathématiques), terminales générales (élèves n'ayant pas suivi d'enseignement mathématique depuis la 2^{nde})

1	BLONDET Hermine	SHISHIDO Lise	LOSANGO Dercas	TURPIN Mélodie	Lycée Romain Rolland
2	BRIVOT-FEURTET Blanche	DUPONT Margaux	JACQUOT Nolan	PETTINAROLI Emilio	Lycée Henri Moisan
3	LECLERCQ Virgile	FOYZUL Sahim	LAVIER Cyprien	GAGET Kévin	Lycée Saint Joseph – La Salle
4	FIALON Amandine	OJALVO Mélodie	LEYGUES Louis		Lycée Jacques Amyot
5	ANDRE Lalie	RINGEVAL Laëtitia	HICHAMI Kenza	DINH Ha Miên	Lycée Charles de Gaulle
6	GIBOUIN Renaud	CALLÉ Antonin	CHEVAILLER Célian		Lycée Louis Davier
7	HART--HUTASSE Abel	DOIZON Maxence	OPTASANU Augustin	PIETRIGA Antoine	Lycée Charles de Gaulle
8	COSTE Roméo	VIEUX Jérémy			Lycée Montchapet
9	IBANEZ ESTEBAN Anthony	D'AIX Lucas			Lycée Henri Parriat
10	CLECH Étienne	MUNIZ Maylusine	RAMILLON Martin	LELEUX Richard	Lycée Chevalier d'Éon
11	LAMBERT Ève	DE SOUZA Gloria	CARRÉ Clémence	COMBOT Domitille	Lycée Jacques Amyot
12	MASSON Élise	COUVERT Sophie	COULON Mathias		Lycée Eiffel
13	VARZARI Madalina	CANCELA Charlène	MECHIN Manon		Lycée Chevalier d'Éon
14	RICARD BASSOLEIL Pauline	JOVIGNOT Timothé	OLIVIER Chrio		Lycée Prieur de la Côte d'Or

Premières et terminales technologiques

1	DARGAUD-NECTOUX Louise	DUMONT Marthe	VINCENT Manon	Lycée Henri Moïsand
2	CHASSAING Nolhan	DEBORRE Anaëlle	JAXEL-PIERRE Camille	Lycée Henri Moïsand

Premières générales (spécialité mathématiques) et terminales générales (élèves n'ayant suivi la spécialité mathématiques qu'en première)

1	GIERCZAK-GALLE Tristan	REGNAUD Matthieu	TARNAUD Émilien	KOBEISSI Haïdar	Lycée Charles de Gaulle
2	DEFONTAINE Malo	MARTIN Paul	BOISSERIE Samuel		Lycée Louis Davier
3	DE WARREN Théandre	BREUILLET Anaïs	CARDOT Yannis	RELAVE Anatole	Lycée Carnot
4	STATI-DANTIGNY Kais	FLECHARD Emma	MALOT Lilian	SPOHR Camille	Lycée Henri Parriat
5	SIGWALT Nello	EVARD Lucille	BIRON Noémie	GENELOT Sarah	Lycée Carnot
6	GAUTIER--BONNEAU Florine	DODIN Thomas	GRENIER Étienne	GERARD Amandine	Lycée Jacques Amyot
7	DE OLIVEIRA Péline	DEPINOY Léane	NIANG Martin-Luther		Lycée Anna Judic

Terminales (spécialité mathématiques ou option « mathématiques complémentaires »)

1	GEBAUER Jiri	CORNOT Gaylor	DROUYNOT Titouan	BIRON Paul	Lycée Carnot
2	FRANÇOIS Tom	MARION Clovis	THERIN Lohan	FUMEY Théotime	Lycée Stephen Liégeois
3	BOULLY Lucas	GARNIER Alexis	LHOSTE Matthieu	GARRY Kilian	Lycée Niepce Balleure
4	WALCZAK Loïc	GEOFFRAY Méline	NOLY Julie	MERLIN Paul	Lycée Julien Wittmer
5	JEFFERY-SANTON Calliopé	MAITRE Sabrina	PELLENARD Daphné	ATAK Nessibe	Lycée Charles de Gaulle
6	FARIA--PERON Antoine	VENANT Hugo	PONGE Pénélope	MATHIEU Paul	Lycée Romain Rolland

Élèves cités, non récompensés

Commençons par féliciter **Mathis MAHUT--SAUVAGE**, élève de troisième, pour sa participation fort honorable !

Secondes (générales, technologiques et professionnelles), premières générales (non spécialité mathématiques), terminales générales (élèves n'ayant pas suivi d'enseignement mathématique depuis la 2^{nde})

VERNOY GAGNEUX Gabriel	HAEGY-BEGRAND Maya	ISSELIN Hippolyte	SERIN Timothée	Lycée Carnot
HOUËL Maximilien-Marie	HOUËL Joseph	LEDEY Solène		Lycée Jacques Amyot
KULLAJ Samuel	SUGNY Raphaël			Lycée Charles de Gaulle
ORTUNO Jean-Baptiste	ROUSSEAUX William	JOURDE Benjamin	VOUAUX Noam	Lycée Eiffel
SOLOMAMPIONONA Elia	BOYE Mathilde	GAUTHIER Valentine		Lycée Saint Joseph – La Salle
GRYBEK Pauline	NAJJAR Walid			Lycée Notre Dame, Nevers
BOIVIN-DULÉRY Aurélien	NAUDET Antoine	BONNOT Arsène	STIENT Lucie	Lycée Eiffel
FAVRIE Alix	JUPRELLE Camille	FEESER Orlane	DUBOIS Théophile	Lycée Charles de Gaulle
ORLANDO-ALGLAVE Victor	RESSY Harold	RODRIGUES REGO Ana Rita		Lycée Saint Joseph – La Salle
HOVAANNYSSIAN Areg	DESCOURS Samuel	PAIRE Lisa	LOOSLI Joseph	Lycée La Prat's
GEENEN Maxime	BOURHANO Noam	MARTIGNON Côme	REB Timéo	Lycée Pierre Larousse

Premières générales (spécialité mathématiques) et terminales générales (élèves n'ayant suivi la spécialité mathématiques qu'en première)

BILLION Victorien	FRIMAS BROC Clément	BOCHATON Alizée	OLIVIER Daphné	Lycée Prieur de la Côte d'Or
BOUAMER Bilal	MOGINOT Sébastien	CHAUDAGNE Paul		Lycée Niepce Balleure
BONDOUX Constance	LEVEQUE Quentin	HAK Éric	PIERRE Eliott	Lycée Carnot
MERLE Edouard	GROSJEAN Thibault	SARTORI Lucas	TERRILLON Tristan	Lycée Eiffel
COTTON Eléna	RIBET Garance	JAXEL Lola	RABOUDOT Thomas	Lycée Maurice Genevoix
MICHELET Yann	LÉCOLLE Jules			Lycée Jacques Amyot
DUMAS Camille	CARRERAS Manon			Lycée Maurice Genevoix
AMARA Yasmine	GUERBA Safia	EL HYATE Nora	MAHJOUBI Imane	Lycée Charles de Gaulle
UTET Romain	MANDUCCI Nathan	WEGIEL Nolan		Lycée Eiffel
BETTSTATTER Manon	POEY Arthur			Lycée Louis Davier
PIEGAY Martin	MARTIN Tiago	THIERRY Marine	QUANEUX Angèle	Lycée Montchapet

Terminales (spécialité mathématiques ou option « mathématiques complémentaires »)

COUTANT Clément	TASDELEN Armand	ASSILA Imad	DAUJON Nicolas	Lycée Charles de Gaulle
HADJ DAOUD Amine	ROGER Bastien	AVELINO Robin	TIBONI Bastien	Lycée Louis Davier
GOUVILLE Louis	GUINCHARD Pierre	CHAPLEAU Julien		Lycée Charles de Gaulle
MESSOUSSI BICHET Lonic	SALAHUB Éléonore	GARRETA Louis	NICOLAS Adrien	Lycée Stephen Liégeard
PEREIRA DE ARAUJO Raphaël	PEUGNET Erwan	CAPON Kilian		Lycée Chevalier d'Éon
LEPOËC--MOULLET Macha	MUNIER--BAULT Eliott	CANET PIAUD Erwan	COMTE Line	Lycée Jacques Amyot
CARVALHIDO--DOMINICI Louis	GUILLEMETTE Alexis	SARIER Aylim		Lycée du Parc des Chaumes
WIOLAND Romain	SIGNORET Lila	BANDERIER Maxime	GENEVOIS Étienne	Lycée Charles de Gaulle

6. LE CORRIGÉ

Exercice 1 : Presque tous multiples (Correction très inspirée du cobayage de Thomas Burel)

Il existe une infinité de listes d'entiers naturels répondant aux consignes de l'énoncé. Chacune de ces listes doit être constituée d'au moins huit entiers.

Proposons une méthode pour en construire une infinité :

- Soit p et q deux entiers premiers supérieurs à 7 : ils ne sont pas multiples de 2 ;
- Ajoutons $p \times 2$: les trois entiers ne sont pas multiples de 3 ;
- Ajoutons $p \times 2 \times 3$ et $q \times 2 \times 3$: les cinq entiers ne sont pas multiples de 5 ;
- Ajoutons $p \times 2 \times 3 \times 5$ et $q \times 2 \times 3 \times 5$: les sept entiers ne sont pas multiples de 7 ;
- Ajoutons $p \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$ pour clore cette liste.

Par exemple, la liste **{11, 13, 22, 66, 78, 330, 390, 2310}** répond au problème.

Exercice 2 : Maudit Gazon

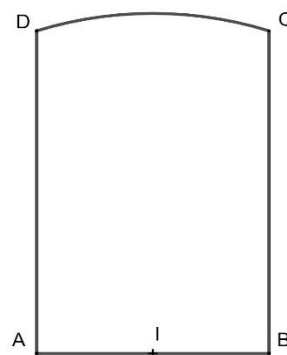
Posons α et β les mesures en degrés des angles respectifs $\widehat{D\hat{I}C}$ et $\widehat{A\hat{I}D}$.

- L'aire totale des deux triangles rectangles IAD et IBC est égale à :
 $17,5 \times 56 = 980 \text{m}^2$.
- $\tan \beta = \frac{AD}{IA} = \frac{56}{17,5} = 3,2$ d'où $\beta = \tan^{-1} 3,2$.
- On en déduit $\alpha = 180 - 2 \times \tan^{-1} 3,2$.
- L'aire du secteur $\widehat{D\hat{I}C}$ est égale à : $\frac{\alpha}{360} \pi r^2$ où $r = ID$.

Le théorème de Pythagore donne $r^2 = 56^2 + 17,5^2 = 3442,25$.

- Finalement, l'aire totale du terrain de sport est :

$$980 + \frac{180 - 2 \times \tan^{-1} 3,2}{360} \pi \times 3442,25 \approx 2022,605 \approx \mathbf{2023 \text{ m}^2}.$$



Exercice 3 : Dé qui roule»

Rangée	Sens de rotation du dé	Lettre sur la face du dessus dernière case	Rangée	Sens de rotation du dé	Lettre sur la face du dessus dernière case
$1 = 4 \times 0 + \mathbf{1}$	droite	D	$9 = 4 \times 2 + \mathbf{1}$	droite	D
$2 = 4 \times 0 + \mathbf{2}$	haut	C	$10 = 4 \times 2 + \mathbf{2}$	haut	C
$3 = 4 \times 0 + \mathbf{3}$	gauche	F	$11 = 4 \times 2 + \mathbf{3}$	gauche	F
$4 = 4 \times 1 + \mathbf{0}$	Haut	F	$12 = 4 \times 3 + \mathbf{0}$	Haut	F
$5 = 4 \times 1 + \mathbf{1}$	Droite	D	$13 = 4 \times 3 + \mathbf{1}$	Droite	D
$6 = 4 \times 1 + \mathbf{2}$	Haut	C	$14 = 4 \times 3 + \mathbf{2}$	Haut	C
$7 = 4 \times 1 + \mathbf{3}$	Gauche	A	$15 = 4 \times 3 + \mathbf{3}$	Gauche	A
$8 = 4 \times 2 + \mathbf{0}$	haut	A	$16 = 4 \times 4 + \mathbf{0}$	haut	A

Remarquons la 4 périodicité :

- Si le numéro de la rangée vaut $1+4k$ (k entier) alors on va à droite
- Si le numéro de la rangée vaut $3+4k$ (k entier) alors on va à gauche
- Sinon, on va en haut.

Remarquons la 8 périodicité :

Cherchons dans quelle rangée se situe la case numérotée 2023.

La somme des n premiers nombres entiers est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$.

Pour $n = 63$, on a $\frac{63 \times 64}{2} = 2016$ et $\frac{64 \times 65}{2} = 2080$.

Donc la case 2023 se trouve sur la 64^{ième} rangée. Rangée qui commence par la case 2017.

Comme $64 = 4 \times 16 + 0$, à la 64^{ième} rangée, on part vers le haut.

Comme $64 = 8 \times 8 + 0$, commence avec le A sur la face du dessus.

$2023 = 2017 + 6 = 2017 + 4 + 2$. Sur la case 2023, la face du dessus sera le **E**.

Exercice 4 : Pagination

Soit n le nombre de page de ce gros livre : on peut donc supposer $100 \leq n < 10000$.

- Supposons que $n < 1000$:
Le livre contient 9 pages numérotées avec 1 chiffre, 90 avec 2 chiffres et $n - 99$ avec 3 chiffres, d'où $9 + 2 \times 90 + 3(n - 99) = 3n \Leftrightarrow 3n - 108 = 3n$, qui ne conduit à aucune solution.
- Supposons que $n \geq 1000$:
Le livre contient 900 pages numérotées avec 3 chiffres et $n - 999$ avec 4 chiffres, d'où $9 + 2 \times 90 + 3 \times 900 + 4(n - 999) = 3n \Leftrightarrow n = 1107$.

Ce gros livre contient **1107 pages**.

Exercice 5 : Boîte

Cet exercice est facilement programmable (voir ci-dessous).

Notons a, b, c les trois dimensions de la boîte, rangées dans l'ordre croissant par exemple.

L'équation du problème est : $abc + 2(ab + ac + bc) + 4(a + b + c) = 33033$.

Remarquons : $(a + 2)(b + 2)(c + 2) = abc + 2(ab + ac + bc) + 4(a + b + c) + 8$.

On en déduit une réécriture de l'équation du problème : $(a + 2)(b + 2)(c + 2) = 33041$.

Comme la décomposition en produit de facteurs premiers de 33041 est $19 \times 37 \times 47$, on en déduit que

$\begin{cases} a + 2 = 19 \\ b + 2 = 37 \\ c + 2 = 47 \end{cases}$. Finalement **les dimensions en cm de la boîte sont : 17, 35 et 45**.

Programme Python « Boîte »

a,b et c sont les dimensions de la boîte

```
for c in range(100):
    for b in range(c+1):
        for a in range(b+1):
            if a*b*c+2*(a*b+a*c+b*c)+4*(a+b+c)==33033:
                print(a,b,c)
```

Programme en Javascript proposé par l'équipe « FRANÇOIS, MARION, THERIN, FUMEX » du lycée Brochon

```
let a=1,b=1,c=1,
    n=100;

//numbers to remove

for (let i=1; i<=n; i++) {
    for (let j=1; j<=n; j++) {
        for (let k=1; k<=n; k++) {
            if ((4*(i+j+k)+2*(i*j+i*k+k*j)+i*j*k) == 33033) {
                console.log(i, j, k);
            }
        }
    }
}
```

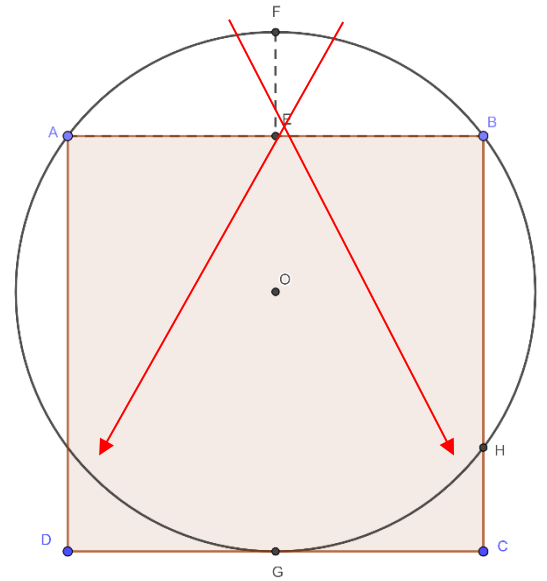
Exercice 6 : Quadrature du cercle

Le disque de centre O est découpé en trois parties, selon les pointillés, de telle sorte que $AB = 16$ cm.

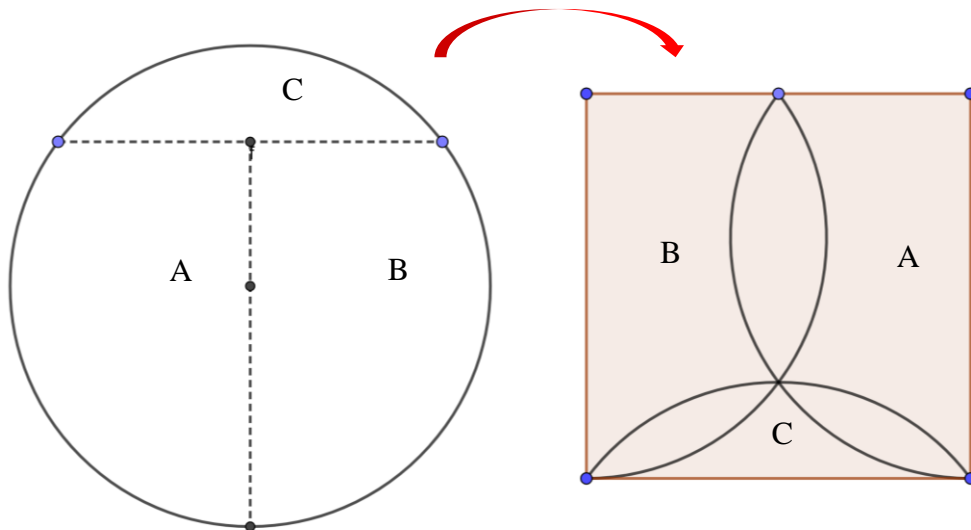
Le théorème de Pythagore permet de vérifier que $OE = 6$ cm.

La partie inférieure, la plus grande, recouvre la majorité du carré, à l'exception des deux coins inférieurs.

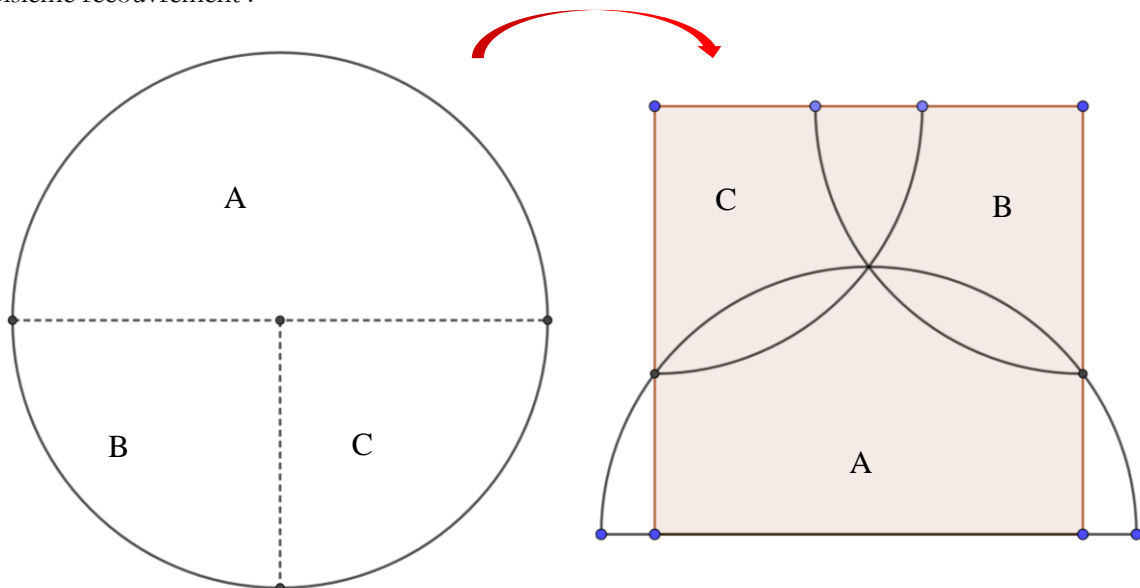
Ceux-ci sont recouverts par les deux morceaux supérieurs du disque, comme les flèches l'indiquent. En effet, par symétrie de la figure, $HC = FE = 4$ cm.



Un deuxième recouvrement :



Un troisième recouvrement :



Exercice 7 : Rescapés

Cet exercice est connu sous le nom « Nombres chanceux de Josèphe ».

L'équipe « STATI-DANTIGNY, FLECHARD, MALOT, SPOHR » du lycée Henri Parriat a traité et résolu l'exercice à l'aide du tableur Excel.

D'autres équipes ont traité cet exercice avec Python ou Javascript. Voici quatre programmes fonctionnels recensés dans certaines copies :

- Programme de l'équipe « DODIN, GAUTIER--BONNEAU, GRENIER, GERARD » du lycée Jacques Amyot

```
l=[x for x in range(1,2024)]
for i in range(2,100):
    r=[]
    for j in range(1,len(l)//i+1):
        r.append(l[i*j-1])
    for a in r:
        l.remove(a)
print(l)
```

- Programme de l'équipe « GEBAUER, CORNOT, DROUYNOT, PIRON » du lycée Carnot

```
l=[]
s_init=1
for i in range (1,2024):
    l+= [i]
n=1
while n<len(l):
    s_init+=1
    s_var=s_init
    e=1
    while s_var-e<len(l)-1:
        l.pop(s_var-e)
        e+=1
        s_var+=s_init
    n+=1
print(2023 in l)

print(l)
```

- Programme de l'équipe « BONDOUX, LEVEQUE, HAK, PIERRE » du lycée Carnot

```
nbl=0
listenb=[]
test=3000
for i in range(test):
    nbl=nbl+1
    listenb.append(nbl)
print("La liste de départ a ",test,"nombres : ",listenb)
```

```
n,entier,pos=1,1,0
while entier<=1000:
    pos=entier
    for i in range(3000):
        if len(listenb)>pos:
            del listenb[pos]
        pos=pos+entier
    entier=entier+1
print(listenb)
```

- Programme en Javascript proposé par l'équipe « FRANÇOIS, MARION, THERIN, FUMEX » du lycée Brochon

```

let arr = [], n=2023;
// arr
for (let i = 1; i<=n; i++) {
  arr.push(i);
}

console.log(arr);

//numbers to remove
for (let j=2; j<=n; j++) {
  let nb_removal=0;
  for (let k=2; k<=n; k++) {
    if (k%j==0) {
      arr.splice(k-nb_removal-1, 1);
      nb_removal++;
    }
  }
}

console.log(arr);
console.log(arr.indexOf(2023)+1);

```

La liste des rescapés contient 2023 :

[1, 3, 7, 13, 19, 27, 39, 49, 63, 79, 91, 109, 133, 147, 181, 207, 223, 253, 289, 307, 349, 387, 399, 459, 481, 529, 567, 613, 649, 709, 763, 807, 843, 927, 949, 1009, 1093, 1111, 1189, 1261, 1321, 1359, 1471, 1483, 1579, 1693, 1719, 1807, 1899, 1933, **2023**].

Exercice 8 : Horloge fatiguée

Au bout d'un tour complet de la grande aiguille, l'horloge retarde de 1 min, puis 2 min supplémentaires au tour suivant (soit 3 min en tout), 3 min supplémentaires au tour suivant (soit 6 min en tout), etc.

Finalement, au bout de n tours complets de la grande aiguille, l'horloge retarde de $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ minutes par rapport à l'heure véritable.

12h = 720' et $\begin{cases} 37 \text{ tours} = \frac{37 \times 38}{2} = 703' \text{ de retard} \\ 38 \text{ tours} = \frac{38 \times 39}{2} = 741' \text{ de retard} \end{cases}$ donc l'horloge fatiguée marquera « la bonne heure » au cours

du 38^{ème} tour de sa grande aiguille.

Récapitulons l'évolution chronologique dans le tableau suivant :

	Heure Horloge	Heure véritable
Mercredi 29 mars	12h00	+ 1' 12h00
	13h00	+ 1' 13h01
	14h00	+ 2' 14h03
Jeudi 30 mars	24h00	24h00 + 1h18
	12h00	12h00 + 5h00
Vendredi 31 mars	24h00	+ 37' 24h + 11h06
	1h00	+ 38' 1h00 + 11h43
	2h00	+ 38' 2h00 + 12h21

$\sum_{i=1}^{12} i = 78$

$\sum_{i=1}^{24} i = 300$

$\sum_{i=1}^{38} i = 741$

Le 31 mars, entre 1h et 2h du matin pour l'horloge fatiguée, il était entre 12h43 et 14h21 en réalité. Notons x la position de la grande aiguille au moment où l'horloge donne « la bonne heure ».

60	x	120
43	x	141

L'aiguille avançant à vitesse constante entre 1h et 2h, par proportionnalité des écarts, on en déduit :
 $\frac{x-60}{120-60} = \frac{x-43}{141-43} \Leftrightarrow 98(x-60) = 60(x-43) \Leftrightarrow x = \frac{1650}{19} \approx 86,84' \approx 86' 50,4''$.

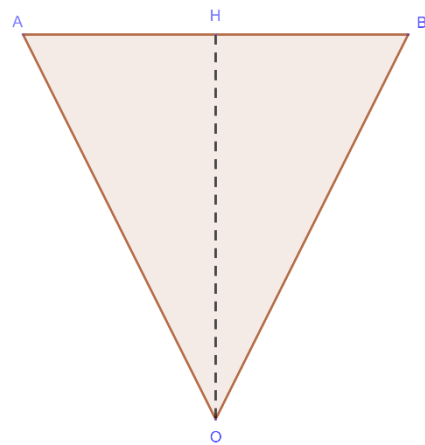
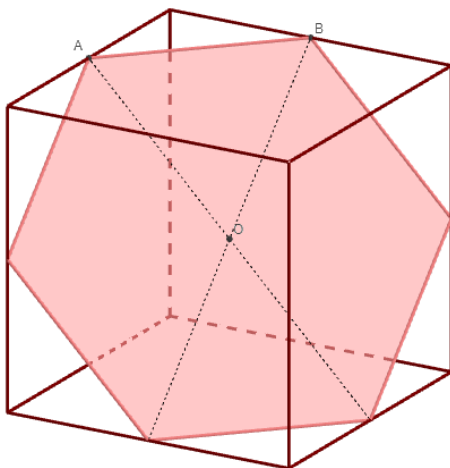
L'horloge a marqué la bonne heure le **vendredi 31 mars à 13h 26 min et 50,4 secondes** environ.

Exercice 9 : Mon Précieux

Considérons l'hexagone (de Bergson) régulier inscrit dans le cube, passant par 6 milieux d'arêtes.

Son côté est $AB = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm.

Le cercle inscrit dans cet hexagone a pour rayon maximal $r = OH$ où H est le projeté orthogonal de O sur [AB].



D'après le théorème de Pythagore, $r^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{150}{16}$ d'où $r = \frac{5\sqrt{6}}{4} \approx 3,06 > 3$.

L'anneau peut donc être rangé dans la boîte cubique.



Université de Bourgogne - U.F.R. Sciences et Techniques - IREM –
9, avenue Savary - B.P. 47 870 - 21078 DIJON cedex
☎ 03 80 39 52 30 - Télécopie 03 80 39 52 39
e-mail "iremsecr@u-bourgogne.fr"
<http://irem.u-bourgogne.fr/>