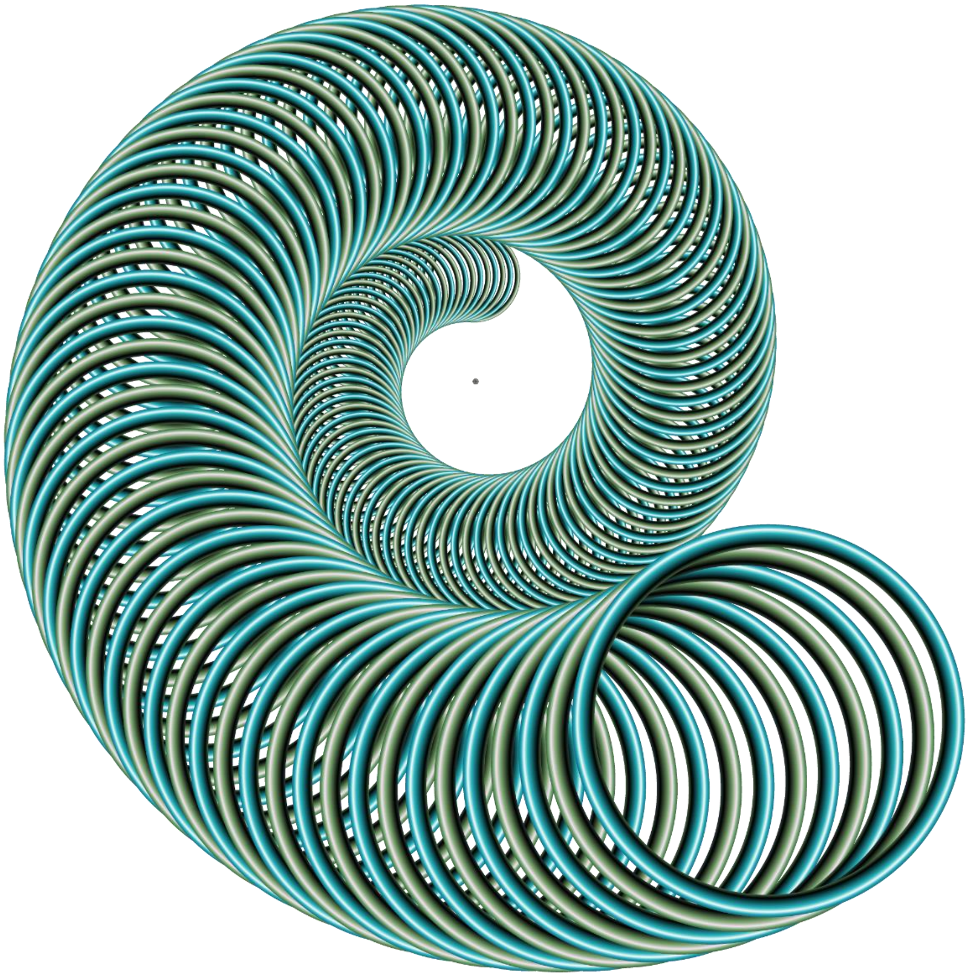
RALLYE MATHÉMATIQUE
DE BOURGOGNE
2024 : 42e rallye



Flower102, avec l'aimable autorisation de Jos Leys (http://www.josleys.com)

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Faculté Sciences Mirande - B.P. 47 870 - 21078 DIJON cedex
☎ 03 80 39 52 30 - Télécopie 03 80 39 52 39
e-mail "iremsecr@u-bourgogne.fr" – http://irem.u-bourgogne.fr

De quelles qualités doit-on disposer pour résoudre des énigmes mathématiques ? C'est une question que je me suis souvent posé durant mes études, puis au fil des années suivantes lorsque je découvris une telle diversité de scientifiques parmi mes brillant.e.s collègues. En effet, alors que certain.e.s collègues sont réputé.e.s très fort.e.s pour inventer des concepts et développer des théories (dans le but d'organiser, ou d'expliquer la « réalité » mathématique), d'autres se distinguent avant tout par leur prodigieuse capacité à résoudre des problèmes et, notamment, démontrer des conjectures (sans avoir à créer plus de formalisme mathématique que ce qui n'existe déjà). Quelles aptitudes caractérisent donc ces redoutables « *problem solvers* » ?

J'ai donc posé aujourd'hui la question à ChatGPT … littéralement : « *Quelles qualités pour résoudre une énigme mathématique* ? » Très inspirée et bavarde, l'IA générative m'a répondu avec une liste argumentée de 8 qualités : débutant par la capacite de raisonnement logique, puis la persévérance, et la créativité, elle a poursuivi ensuite avec 5 autres qualités un peu trop génériques à mon goût (e.g., l'esprit critique). Étonnamment, l'algorithme de ChatGPT ne fait aucune mention des aspects ludiques de la pratique mathématique, alors que le plaisir de la découverte, l'émulation et le dépassement de soi sont certainement parmi les moteurs principaux de l'exploration mathématique !

Les jeux mathématiques comme initiation à la recherche mathématique : c'est désormais une évidence pour nombre de laboratoires de mathématiques, tels que l'IMB. C'est donc avec beaucoup de conviction, et d'intérêt, que l'IMB soutient les diverses activités de l'IREM et notamment le « Rallye Mathématique ». Au nom de l'IMB, et avec beaucoup de gratitude, je tiens à remercier ici toute l'équipe d'organisation : l'élaboration de ces jolis énoncés mathématiques, la correction, et toute la logistique ... Au nom de l'IMB, toujours, je félicite aussi les élèves qui ont participé à ce jeu de grande échelle : en particulier, j'adresse un grand bravo aux gagnant.e.s !

Enfin, puisqu'en cette année 2024, les anneaux olympiques sont à l'honneur et ont inspiré une des énigmes, le topologue que je suis ne peux résister au plaisir de prolonger ce temps de jeu, en vous soumettant un autre « défi » mathématique. Regardez comment les 5 anneaux olympiques, ci-dessous, sont enlacés les uns aux autres :

L'anneau bleu est « lié » au jaune, qui est lui-même « lié » au noir, etc. A vous maintenant de *trouver une nouvelle configuration de 5 anneaux avec la propriété suivante : pris dans leur totalité, les 5 anneaux sont bien enlacés mais, sitôt qu'on en supprime 1 parmi les 5, les 4 anneaux restants se désenlacent complètement.* Cela ne fonctionne clairement pas avec les anneaux olympiques car, par exemple, si nous supprimons l'anneau noir, le bleu reste « lié » au jaune (ainsi que le vert au rouge). Un indice ? Commencez par résoudre ce problème pour une configuration de 3 anneaux et autorisez-vous à « déformer » les anneaux (car ce ne seront plus des cercles dans la solution) … et surtout : amusez-vous bien !

Gwénaël MASSUYEAU, Directeur de l'Institut de Mathématiques de Bourgogne

Une chose nous frappe en contemplant la couverture de la plaquette du Rallye 2024, c'est très visuel, presque non-remarquable, mais tous les *followers* de Pythagore depuis deux-mille cinq cents ans n'auront pas manqué de le remarquer, ce tout petit extrait : « 20**24 = 42**^{e} rallye ».

Cet extrait a un aspect plaisant pour les lecteurs atteints de palindromanie. Cette maladie rare a été diagnostiquée pour la première fois chez Georges Pérec en 1980, après la publication de son grand palindrome de mille deux cent quarante-sept mots, mais peu de personnes ont manifesté depuis une telle gravité de symptômes.

A l'IREM de Dijon, nous sommes atteints par le variant numérique de la maladie, celui qui nous fait produire parfois par inadvertance des chaînes numériques palindromatiques aussi bien que les déceler lorsqu'elles se présentent d'elles-mêmes. Il faut parfois faire preuve de perspicacité, comme pour $\xi\xi\xi\xi\xi\xi$. Si vous ne décelez rien, c'est que vous n'êtes pas malade, fort heureusement pour vous !

Certes, l'exemple donné se range apparemment du côté des « plaisanteries de professeur/e de mathématiques », qui répondent aux trois critères suivants : 1° c'est parfaitement correct logiquement, 2° on ne les comprend pas, et 3° ce n'est pas drôle, sauf pour les professeur/e/s de mathématiques (et encore).

En fait, nous exagérons en limitant la portée de ces plaisanteries au corps enseignant, car les participant/e/s au quarante-deuxième Rallye nous semblent disposer à la fois d'humour et de persévérance, ainsi que d'appétit pour le jeu et l'enquête, ce qui peut les ranger dans la catégorie de ceux et celles qui sont à même d'apprécier lesdites plaisanteries.

Nous tenons à les féliciter pour leur participation au Rallye cette année ! Et nous félicitons également notre équipe de trois créateurices / organisateurices, qui nous font le bonheur de préparer les énoncés et assurer la correction des productions depuis de nombreuses années

Alors, pour tous ces esprits fins, une petite question pour terminer : où trouver dans les précédents comptes-rendus du Rallye des lycées de Bourgogne un palindrome, même minimal ?

Frédéric MÉTIN, directeur de l'IREM de Dijon

Depuis sa création, le rallye mathématiques de Bourgogne s'est imposé comme un rendez-vous incontournable pour nos élèves. Organisé par l'IREM, ce concours vise à promouvoir les mathématiques de manière ludique et conviviale. Il offre une occasion unique au cours de laquelle les élèves peuvent mettre en pratique leurs compétences en résolution de problèmes, en logique et en raisonnement. L'édition 2024 a maintenu la tradition pour stimuler l'intérêt des élèves. Les exercices, soigneusement élaborées par l'équipe conceptrice, sont toujours de grande qualité et, par leur d'originalité, permettent aux élèves d'aborder les mathématiques sous un regard nouveau. Chaque équipe a ainsi dû collaborer efficacement pour résoudre des problèmes en faisant appel à la créativité.

Au-delà de la compétition, le Rallye Mathématiques de Bourgogne 2024 est une expérience enrichissante pour tous les participants. Il favorise en effet le développement de compétences essentielles aux mathématiques telles que le travail en équipe et la persévérance.

En somme, cette édition 2024 du Rallye Mathématiques de Bourgogne a non seulement célébré les talents des jeunes mathématiciennes et mathématiciens, mais a aussi renforcé l'importance de l'enseignement des mathématiques dans un cadre stimulant.

Un grand merci à vous tous, élèves, professeurs, ainsi qu'à l'IREM et à l'équipe conceptrice des sujets !

Rendez-vous est déjà pris pour l'édition 2025, avec la promesse de nouveaux défis et de découvertes passionnantes.

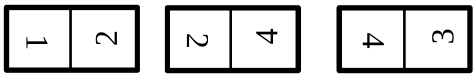
Frédéric LEMASSON, IA-IPR de mathématiques

1. ÉNONCÉS 2024

Exercice 1 : DES P'TITS TROUS
La société DuPli a créé une nouvelle sorte de papier très mince.
On plie dix fois de suite en deux une grande feuille de ce papier, chaque pli étant perpendiculaire au précédent.
Ensuite, on entaille chacun des quatre coins d'un coup de ciseaux.

Lorsque cette feuille est totalement dépliée, combien de trous (intérieurs) peut-on compter ?

Exercice 2 : DOMINOS EN CHAÎNE
On dispose des 15 dominos dont les deux numéros sont distincts et compris entre 1 et 6.
On appelle chaîne, une suite de dominos juxtaposés. Par exemple, voici une chaîne de longueur 3 :



Quelle est la longueur maximale d'une chaîne formée avec ces dominos ?

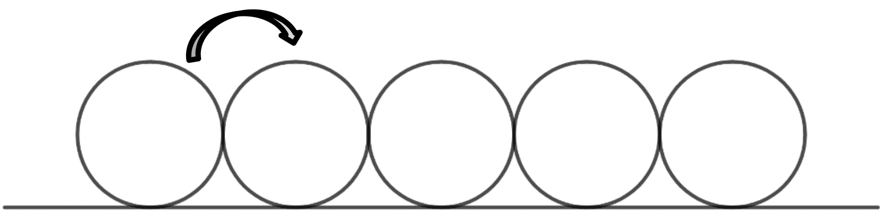
Exercice 3 : LE LIVRE DES HUNS
Le nombre de chiffres 1 utilisés dans la numérotation des pages du livre consacré à la biographie d'Attila représente 34% du nombre total de pages numérotées.

Quel est le nombre de pages numérotées de ce livre ?

Exercice 4 : LE COMPTE N'EST PAS BON
La Rallynésie Occidentale est un pays dont la monnaie, le Zeuro, n'est composé que de deux types de pièces : une pièce de 7 Zeuros et une pièce de 17 Zeuros. On peut ainsi obtenir un montant de 31 Zeuros, avec deux pièces de 7 Zeuros et une pièce de 17 Zeuros, mais pas un montant de 32 Zeuros.

Combien de montants ne peut-on pas réaliser ?

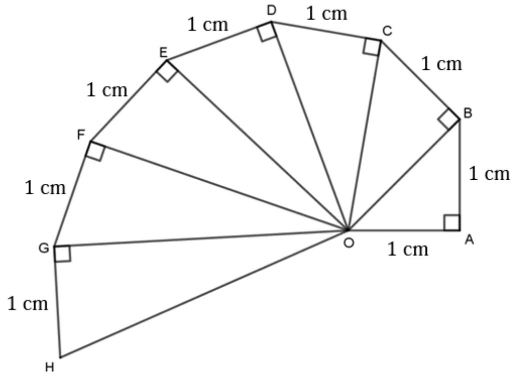
Exercice 5 : LES ANNEAUX OLYMPIQUES
Cinq anneaux sont alignés et tangents comme sur la figure ci-dessous.
On fait rouler l'anneau situé le plus à gauche par-dessus les autres, de telle sorte qu'il reste en contact avec au moins un des autres anneaux, pour l'amener à droite du cinquième anneau.



Combien de tours cet anneau mobile a-t-il effectués ?

<u>Exercice 6</u> : LA SPIRALE DE THEODORE

On construit « indéfiniment » l'escargot de Pythagore suivant, en partant du triangle rectangle isocèle de droite :



Combien de triangles sont nécessaires pour effectuer au moins un tour complet ?

<u>Exercice 7</u> : VIVE LA MARIÉE

De nombreux participants, dont les âges sont entiers, sont invités à un repas de noces.

Si on choisit cinq personnes quelconques, la somme de leurs âges est toujours : soit 149 ans, soit 150 ans, soit 151 ans.

Les deux témoins sont deux sœurs jumelles plus âgées que la mariée.

Quel est l'âge de la mariée ?

<u>Exercice 8</u> : PRODUIT MAXIMAL

On considère les neuf entiers $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

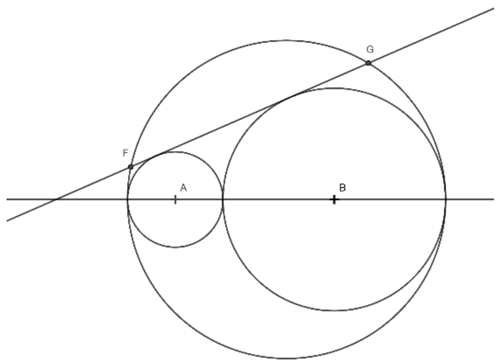
En utilisant une fois et une seule chacun de ces neuf entiers, former deux nombres entiers et calculer leur produit.

Par exemple, $238 \times 14\,6579 = 34\,885\,802$.

Quels sont les deux nombres dont le produit est maximal ?

<u>Exercice 9</u> : LES TROIS CERCLES TANGENTS

Dans la figure suivante, les trois cercles sont tangents. Le rayon du cercle de centre A est 6 et celui du cercle de centre B est 8. La droite (FG) est une tangente commune aux deux cercles de centres A et B.



Que vaut, arrondie à l'entier, la distance FG ?

Solutions succinctes

Exercice	Solution
1. Des P'tits trous	961 trous.
2. Dominos en chaîne	Les chaînes de longueur maximale sont constituées de 13 dominos.
3. Le livre des Huns	Le livre compte 750 pages et on compte 255 fois le chiffre 1.
4. Le compte n'est pas bon	48 montants ne sont pas réalisables.
5. Les anneaux olympiques	L'anneau a effectué exactement 2 tours.
6. La spirale de Théodore	Le $17^{ème}$ triangle permettra un tour complet.
7. Vive la mariée	La mariée a 29 ans.
8. Produit maximal	$9642 \times 87531 = 843973902$ est le produit maximal.
9. Les trois cercles tangents	$FG = 2IG = 2\sqrt{\frac{7104}{49}} \approx 24{,}0815$, soit $FG \approx 24$.

2. LA PARTICIPATION

Le **42**ème Rallye mathématique de Bourgogne des lycées s'est déroulé le mercredi 24 janvier 2024.
Il a concerné :

31 lycées **204 équipes** **658 participants**.

En particulier cette année, parmi les 31 lycées participants, nous avons eu le plaisir de noter la première participation du **lycée français international d'Agadir**, avec 19 candidats de 2nde.
Pour la seconde année consécutive, le **lycée international Jean Mermoz d'Abidjan** a participé au Rallye avec 41 candidats de 2nde et Première. À noter que ce lycée a son propre classement.

La participation de cette année a nettement progressé et retrouve des valeurs historiques, après trois années impactées par la faible participation de 2021, due à l'apparition du COVID…

Voici l'évolution de la participation des lycées bourguignons ces sept dernières années :

Année	**Côte d'Or**	**Nièvre**	**Saône et Loire**	**Yonne**	**Total des participants**
2018	288	156	166	65	**675**
2019	319	133	166	43	**661**
2020	304	45	273	65	**687**
2021	104	30	43	26	**203**
2022	264	85	28	40	**417**
2023	280	45	51	102	**478**
2024	395	30	104	110	**639**

Les effectifs par lycée et par niveau sont récapitulés ci-après.
Niveau I : secondes (générales, technologiques et professionnelles), premières générales (non spécialité mathématiques), terminales générales (élèves n'ayant pas suivi d'enseignement mathématique depuis la 2nde)
Niveau II : premières et terminales technologiques
Niveau III : premières générales (spécialité mathématiques) et terminales générales (élèves n'ayant suivi la spécialité mathématiques qu'en première)
Niveau IV : terminales (spécialité mathématiques ou option « mathématiques complémentaires »)

	Nombre d'équipes				Nombre de candidats			
Niveau	I	II	III	IV	I	II	III	IV
21 - Lycée Anna Judic	5	0	0	1	17	0	0	2
21 - Lycée Carnot	1	0	2	6	4	0	7	21
21 - Lycée Charles de Gaulle	8	0	8	8	25	0	28	28
21 - Lycée Eugène Guillaume	1	0	0	0	4	0	0	0
21 - Lycée Eiffel	14	2	6	5	40	8	19	17
21 - Lycée Henry Moisand	2	0	0	0	8	0	0	0
21 - Lycée Hippolyte Fontaine	1	0	1	1	2	0	3	3
21 - Lycée Le Castel	2	0	0	0	6	0	0	0
21 - Lycée Montchapet	0	0	1	2	0	0	4	7
21 - Lycée Prieur de la Côte d'Or	8	1	3	8	23	4	8	24
21 - Lycée Saint Joseph - La Salle, Dijon	16	0	0	0	54	0	0	0
21 - Lycée Saint-Bénigne	1	1	0	0	3	4	0	0
21 - Lycée Stephen Liégeard	3	0	1	2	11	0	3	8
58 - Lycée Maurice Genevoix	0	0	1	0	0	0	4	0
58 - Lycée Notre-Dame, Nevers	1	0	2	2	3	0	5	8
58 - Lycée Romain Rolland	1	0	2	0	4	0	6	0
71 - Lycée Camille Claudel	6	0	0	5	20	0	0	16
71 - Lycée Henri Parriat	2	0	1	1	8	0	2	4
71 - Lycée Julien Wittmer	0	0	0	2	0	0	0	8
71 - Lycée La Prat's	1	0	1	0	3	0	1	0
71 - Lycée Niepce Balleure	3	1	5	1	8	3	16	4
71 - Lycée Pontus de Tyard	3	0	0	0	9	0	0	0
71 - Lycée René Cassin	0	0	0	1	0	0	0	2
89 - Lycée Chevalier d'Éon	1	0	3	3	3	0	9	10
89 - Lycée Jacques Amyot	3	0	5	3	10	0	18	10
89 - Lycée Joseph Fourier	1	0	0	0	1	0	0	0
89 - Lycée Louis Davier	3	0	2	2	9	0	7	8
89 - Lycée du Parc des Chaumes	2	0	0	1	7	0	0	3
89 - Lycée Pierre Larousse	3	0	0	0	9	0	0	0
89 - Lycée Saint Joseph La Salle, Auxerre	0	0	1	2	0	0	2	4
99 - Lycée Français International d'Agadir	6	0	0	0	19	0	0	0
Total	98	5	45	56	310	19	142	187

3. L'ORGANISATION

L'IREM (Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques), dépendant de l'Université de Bourgogne, est l'organisateur du rallye.

Le financement est assuré par l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public), l'IREM et le Rectorat.

L'élaboration des sujets et la correction des copies sont assurées dans le cadre de l'IREM par : Anthony OSSWALD, Florian PLASTRE et Marie WAGNER.

Quatre autres personnes ont participé au choix définitif des sujets : Laurent BANDERIER, Thomas BUREL, Frédéric LEMASSON, Maurice NUSSBAUM. Nous les remercions vivement pour leurs cobayages éclairés.

Il faut remercier tout spécialement :
Monsieur Pierre N'GAHANE, Recteur de l'Académie de Dijon, Mesdames et Messieurs les Chefs d'Établissement, Adjoints et CPE, qui ont autorisé et permis la mise en place du Rallye.

Francis CORTADO, William EXERTIER et Frédéric LEMASSON, IA-IPR de mathématiques, pour leur soutien au Rallye des lycées.
Frédéric MÉTIN, Directeur de l'IREM.

Tous les professeurs qui ont bénévolement assuré l'organisation matérielle du Rallye dans leur établissement et la surveillance de l'épreuve.

Céline DAUBIGNEY, qui est responsable à l'IREM de la "logistique" du Rallye et de la publication de cette brochure.

Tous ceux qui ont bien voulu chercher les problèmes posés et nous faire part de leurs idées, par courrier, par la presse régionale ou par Internet.

Et bien évidemment les 658 candidats qui ont travaillé durement…

4. LA RÉUSSITE

Exercice	Nombre d'équipes ayant abordé le problème	Proportion d'équipes ayant abordé le problème	Proportion d'équipes ayant donné la bonne réponse
1. Des P'tits trous	77	74,8%	48,1%
2. Dominos en chaîne	99	96,1%	62,6%
3. Le livre des Huns	75	72,8%	18,7%
4. Le compte n'est pas bon	183	89,7%	15,3%
5. Les anneaux olympiques	146	71,6%	31,5%
6. La spirale de Théodore	175	85,8%	60,6%
7. Vive la mariée	74	73,3%	64,9%
8. Produit maximal	91	90,1%	54,9%
9. Les trois cercles tangents	78	77,2%	51,3%

5. LE PALMARÈS

(Seules les équipes de moins de 5 élèves seront récompensées)

Les meilleures équipes sont :

Niveau I (secondes (générales, technologiques et professionnelles), premières générales (non spécialité mathématiques), terminales générales (élèves n'ayant pas suivi d'enseignement mathématique depuis la 2nde))

L'équipe : [DESCHAMP SEVELINGE Léo, MERIGOT Rémi, SEEGERS Luc]
du lycée La Prat's de Cluny avec 57 points sur 60.

Niveau II (premières et terminales technologiques)

L'équipe : [BETTINELLI Hugo, COURBEZ Sarah, JACQUIN Clément, LOUIS Aristide]
du lycée Saint-Bénigne de Dijon avec 38 points sur 60.

Niveau III (premières générales (spécialité mathématiques) et terminales générales (élèves n'ayant suivi la spécialité mathématiques qu'en première))

L'équipe : [COSTE Roméo, NAUDET Antoine, ROGER MAUGAIN Charlotte, VIEUX Jérémy]
du lycée Montchapet de Dijon avec 42 points sur 60.

Niveau IV (terminales (spécialité mathématiques ou option « mathématiques complémentaires »))

L'équipe : [JAUGEY Antoine, LE SAULNIER Léo-Paul, PRETESACQUE Léo, RIPPLINGER Nathan]
du lycée Charles de Gaulle de Dijon avec 56 points sur 60.

Nous déclarons meilleure « équipe » du rallye 2024

DESCHAMP SEVELINGE Léo, MERIGOT Rémi, SEEGERS Luc
du lycée La Prat's de Cluny

Secondes (générales, technologiques et professionnelles), premières générales (non spécialité mathématiques), terminales générales (élèves n'ayant pas suivi d'enseignement mathématique depuis la 2nde)

1	SEEGERS Luc	MERIGOT Rémi	DESCHAMP SEVELINGE Léo		Lycée La Prat's
2	FORGEARD Côme	BERSANI Antoine	SOUBEIRAN Constance		Lycée Louis Davier
3	JACQUES Garance	FACY Jeanne	SIGWALT Eloi	GILLIG Gauthier	Lycée Carnot
4	PEREIRA Lili	HERBILLON Aiko	MOUSSAUT Gaëtan		Lycée Jacques Amyot
5	DESPLANTES Marie	LEMAITRE Fleur	LARRIVEE Matthieu	GUERARD EM Cléa	Lycée Anna Judic
6	SHAROUBIM Laeticia	DANGER Angelyss	TAILLAT Faustine	BOURGET Maëline	Lycée Pierre Larousse
7	DUBREUIL Arthur	GABET Agathe	PARNALLAND Agathe	TOURNIER Ashley	Lycée Saint Joseph – La Salle, Dijon
8	GOSSE Kiara	COLLARD Sarah	AUDOIN Aurèle	FOUROT Manon	Lycée Henry Moisand
9	CHEN Léa	COULON Marie			Lycée Pontus de Tyard
10	DUCOTE Juline	GAYET Alicia	BENAS Julie		Lycée Niepce Balleure
11	POINTURIER Pauline	BAZOT Adam	COUREAULT Axel	BENSID Aylan	Lycée Anna Judic
12	DEQUINCEY Théodore	CHEVROT Léonore	PELTIER Mélissa	EPIARD Fantine	Lycée Henry Moisand
13	GEORGY--GAUSSET Isaure	QUENTIN Eve	DUPAQUIER--GLARMET Tino	GATEAU Maël	Lycée Charles de Gaulle

Premières et terminales technologiques

1	BETTINELLI Hugo	COURBEZ Sarah	JACQUIN Clément	LOUIS Aristide	Lycée Saint-Bénigne
2	BRUGNOT Thomas	LAGNIEN Elaura	RICARD-BASSOLEIL Pauline	DARCIEU Célestine	Lycée Prieur de la Côte d'Or

Premières générales (spécialité mathématiques) et terminales générales (élèves n'ayant suivi la spécialité mathématiques qu'en première)

1	COSTE Roméo	NAUDET Antoine	ROGER MAUGAIN Charlotte	VIEUX Jérémy	Lycée Montchapet
2	JUPRELLE Camille	COURILLON Louise	LABBÉ Camille	DOIZON Maxence	Lycée Charles de Gaulle
3	PORTET Jade	DESSERTENNE Lily	SERRUYS Félix	MATROT Ferdinand	Lycée Charles de Gaulle
4	NAUDET Antoine	SETIAO Axel	GUILLEMIN PARNASO Alban	VILLEMIN Théo	Lycée Eiffel
5	GODÉREAUX Claire	YÈME Domitille	RUSTENHOLZ Simon		Lycée Charles de Gaulle
6	CHALOUPKA Darek	PICARD Tim	SIBILLE Hortense	SIMON Jeanne	Lycée Charles de Gaulle
7	COMMUNIAU-DUPRE Augustine	DUMONT Chloé	HOUËL Joseph	HOUËL Maximilien-Marie	Lycée Jacques Amyot
8	COGNARD Thomas	LAURENT Louis	LIN Clément	LEPAULARD Adrien	Lycée Carnot
9	JARMOLA Marius	FIALON Amandine	OJALVO Mélodie	LEYGUES Louis	Lycée Jacques Amyot
10	BONFILS Jérôme	GROND Thomas	VERNOY GAGNEUX Gabriel		Lycée Carnot
11	TOUVREY Marion	STIENT Lucie	ROVER Mathéis		Lycée Eiffel

Terminales (spécialité mathématiques ou option « mathématiques complémentaires »)

1	JAUGEY Antoine	LE SAULNIER Léo-Paul	RIPPLINGER Nathan	PRETESACQUE Léo	Lycée Charles de Gaulle
2	SALIN Lucie	KOZACZKA Olivier	POEY Arthur	PRUVEL Mathilde	Lycée Louis Davier
3	GIERCZAK-GALLE Tristan	KOBEISSI Haïdar	REGNAUD Matthieu	TARNAUD Emilien	Lycée Charles de Gaulle
4	DEFONTAINE Malo	BOISSERIE Samuel	DUBOST Louise	MARTIN Samuel	Lycée Louis Davier
5	BREUILLET Anaïs	MARCEAUX Abel	CARDOT Yannis	DE WARREN Théandre	Lycée Carnot
6	TIONNAIS Simon	EL FAIZ HRI Ayman			Lycée René Cassin
7	LEVEQUE Quentin	RIDOLFI-BODINI Paolino	PIERRE Eliott	COUDOR Lucas	Lycée Carnot
8	BONDOUX Constance	MARTIN--ROUSSEAU Océane	HAK Eric		Lycée Carnot
9	DODIN Thomas	BUSSON Hugo	SÉNÉCHAL Arthur	MÉRARD Maxime	Lycée Jacques Amyot
10	BOUTHORS Ambre	LEJEUNE Léonie	GROSJEAN Guillaume		Lycée Montchapet
11	PICHERY Nathan	BARBIER Lucien	LANGLOIS Elisa-Fleur	CUROT Alexis	Lycée Stephen Liégeard

Élèves cités, non récompensés

Secondes (générales, technologiques et professionnelles), premières générales (non spécialité mathématiques), terminales générales (élèves n'ayant pas suivi d'enseignement mathématique depuis la 2nde)

ROSSE Gabrielle	PIPERNO Ema	GEHIN Thibault	DROUOT Tristan	Lycée Eiffel
LOSSET Mathys	JOBARD Paul	BARTET Paul	ZHANG Zihui	Lycée Saint Joseph – La Salle, Dijon
PERROT Axelle	MOISSON Iris			Lycée Eiffel
RAILLARD Zoé	GUIGNARD Camille	BONNET Aline	JACOBERGER Aponi	Lycée Eiffel
ROBELIN Nolhan	MUZARD Hugo	ALMOLKI Rany		Lycée Saint Joseph – La Salle, Dijon
BARAZZA Camille	BERTRAND Lino	BRUNOT Georges		Lycée Pontus de Tyard
LEPIANKO Mahaut	OFFNER Eléa	PEREIRA Mayline	MENEGAUT Lise	Lycée Camille Claudel
PEZARO Joe	KAPLAN Azad	DU GARDIN Baptiste	CARRAT Jules	Lycée Pontus de Tyard
MARTIN Côme	FILLON César	BORGNAT Samuel		Lycée Jacques Amyot
LEFEVRE Paul	ROUBEROL Darius	RIGNIER Augustin		Lycée Pierre Larousse

Premières et terminales technologiques

MOUSSA Leya	BOULET-BURGAN Matteo	ALUZE Samuel		Lycée Niepce Balleure

Premières générales (spécialité mathématiques) et terminales générales (élèves n'ayant suivi la spécialité mathématiques qu'en première)

LOSANGO Dorcas	LOSANGO Given	OBIANG-BE Marc-Anthony		Lycée Romain Rolland
CHEVAILLER Célian	GIBOIN Renaud	DE AGUIAR FOUCAULT Kenzo		Lycée Louis Davier
CARRÉ Clémence	COMBOT Domitille	DESCHUYTENEER Thomes	LAMBERT Eve	Lycée Jacques Amyot
CHARRIER Ludivine	MICHELOT Etienne	BLAISE Marie	BOYER Florine	Lycée Maurice Genevoix
JAOUEN-TABOUREUR Aure-Lucie	RICHARD Elodie	WILLIOT Elouan		Lycée Romain Rolland
DAMOISEAU Elise	GAILLARDOT Perrine	LEPAGE Léana	MORAND Leïla	Lycée Louis Davier
ALLIÉ Iris	BUSSO Achille			Lycée Saint Joseph – La Salle, Auxerre
NADARAJAH Hariram	LARIQUE Anna	SUGNY Raphaël		Lycée Charles de Gaulle
OLIVIER Chris	LORAIN Timothée	BRIOTET Alexis		Lycée Prieur de la Côte d'Or

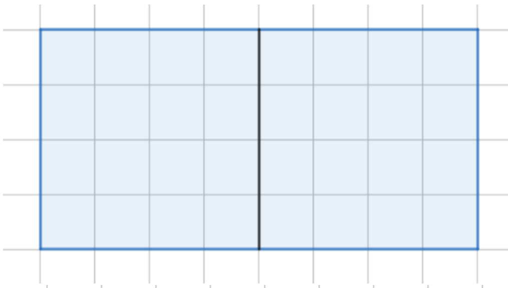
Terminales (spécialité mathématiques ou option « mathématiques complémentaires »)

DURGET Paul	CZARNYSZKA Aurélien	BOURIANT Romain		Lycée Carnot
OUDOT Julien	SIMONNET--ROUARD Jules	AURY--MARCEAU Gaspard	JENTEY Martin	Lycée Charles de Gaulle
COLIN Mathilde	COLIN Juliette	DEQUATRE Juliette	CORNOT-VALENTIN Adèle	Lycée Carnot
MORAINE Antoine	VINCENT Nathan	MANCA Marc	PETIT Isaac	Lycée Montchapet
GUÉRO Origène	MEURISSE Jules	THIBAUT Tugdual		Lycée Saint Joseph – La Salle, Auxerre
DERAIN Célia	CORTIER Alexis	PROST Théo	ROUX Louise	Lycée Julien Wittmer
HANCER Johan	SIGWALT Nello	RELAVE Anatole		Lycée Carnot
MARTIN--CHAN-YAT-TSEUNG Umhambi	MERLE Edouard	GRZESKOWIAK Noé		Lycée Eiffel
MONNET Clément	AGASSE James	CARAPITO Jordan	BONNEFOY Loïc	Lycée Camille Claudel
CALMES Suzanne	BUNEL-LENOIR Héloïse	THIERY Naomie	FAIVRE-DUBOZ Maud	Lycée Eiffel
FARJAUD Antoine	PLUCHAUD Alexis	SADOUN Rayan	D'HEILLY Gwladys	Lycée Julien Wittmer
QUANTIN Raphaël	MARTIN Soren	CHOLLET Louise	VERRIER Claire	Lycée Chevalier d'Éon
SEGADO Paul	CHARLOIS Paul	MATHIEU Samy		Lycée Chevalier d'Éon

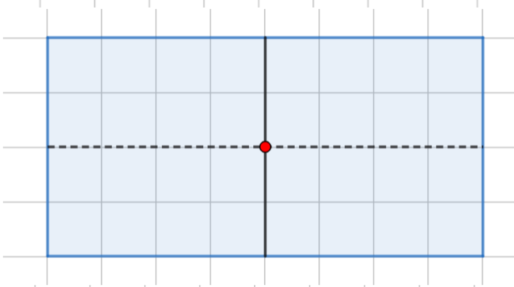
6. LE CORRIGÉ

Exercice 1 : Des P'tits trous

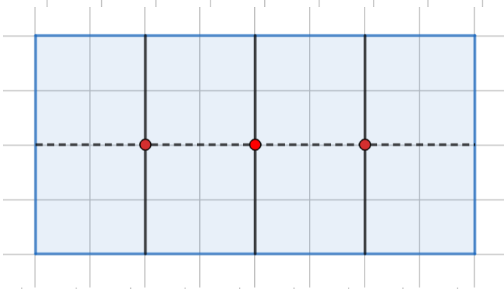
Après un pli :
1 colonne et 0 ligne et $1 \times 0 = 0$ trous.



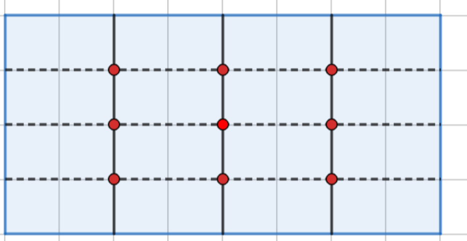
Après 2 plis :
1 colonne et $2 \times 0 + 1 = 1$ ligne donnent
$1 \times 1 = 1$ trou.



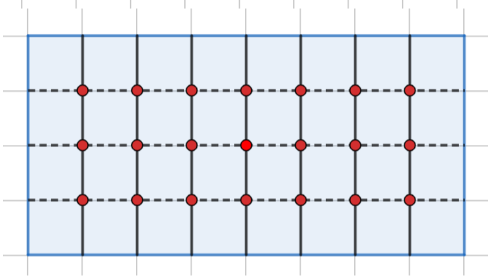
Après 3 plis :
$2 \times 1 + 1$ colonnes et 1 ligne donnent
$3 \times 1 = 3$ trous.



Après 4 plis :
3 colonnes et $2 \times 1 + 1 = 3$ lignes donnent
$3 \times 3 = 9$ trous.



Après 5 plis :
$2 \times 3 + 1 = 7$ colonnes et 3 lignes donnent
$3 \times 7 = 21$ trous.



Le nombre de colonnes change tous les plis impairs et d'un nombre de plis impairs à l'autre le nombre de colonnes augmente de $2 \times \text{nombre de colonnes précédentes } + 1$
Le nombre de lignes change tous les plis pairs et d'un nombre de plis pairs à l'autre le nombre de lignes augmente de $2 \times \text{nombre de lignes précédentes } + 1$.

Ainsi au
6ième pli il y a 7 colonnes et $2 \times 3 + 1 = 7$ lignes et cela donne $7 \times 7 = 49$ trous.
7ième pli il y a $2 \times 7 + 1 = 15$ colonnes et 7 lignes et cela donne $15 \times 7 = 105$ trous.
8ième pli il y a 15 colonnes et $2 \times 7 + 1 = 15$ lignes et cela donne $15 \times 15 = 225$ trous.
9ième pli il y a $2 \times 15 + 1 = 31$ colonnes et 15 lignes et cela donne $31 \times 15 = 465$ trous.

Finalement au 10[ième] pli il y a 31 colonnes et $2 \times 15 + 1 = 31$ lignes et cela donne **$31 \times 31 = 961$ trous**.

Exercice 2 : Dominos en chaîne
Chaque chaîne est de la forme : a-u / u-v / v-w / … / x-y / y-z / z-b, où seuls les numéros a et b n'apparaissent pas dans une paire.
Or, sur l'ensemble des dominos, apparaissent cinq fois chacun des numéros 1 à 6. Si l'on considère que toutes les paires sont possibles, il reste une fois le 1, une fois le 2, …, une fois le 6.
Les numéros a et b sont à prendre parmi ces six numéros restants : il reste donc 4 numéros, soit deux dominos non utilisés au minimum.
La chaîne maximale est donc potentiellement de longueur 13.
Ce maximum est atteint avec, par exemple, la chaîne :
1-2 / 2-3 / 3-4 / 4-5 / 5-6 / 6-1 / 1-3 / 3-5 / 5-1 / 1-4 / 4-6 / 6-2 / 2-4

Finalement, les chaînes de longueur maximale sont constituées de **13 dominos**.

Programme Seegers Luc, Mérigot Rémi, Deschamp Sevelinge Léo (La Prat's) :

```
from random import randint
dominos=[(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)]
while True:
    dominos_restants=dominos[:]
    chaine=[]
    nombre_precedent=randint(1,6)
    longueur_chaine=0
    while True:
        valides=[]
        for d in dominos_restants:
            if nombre_precedent in d:
                valides.append(d)
        if len(valides)==0:
            break
        longueur_chaine+=1
        domino_choisi=valides[randint(0,len(valides)-1)]
        chaine.append(domino_choisi)
        if domino_choisi[0]==nombre_precedent:
            nombre_precedent=domino_choisi[1]
        else:
            nombre_precedent=domino_choisi[0]
        del dominos_restants[dominos_restants.index(domino_choisi)]
    if longueur_chaine>12:
        print(chaine)
        print(longueur_chaine)
        break
```

Exercice 3 : Le livre des Huns
De 1 à 9 on utilise 1 fois le chiffre 1.
De 10 à 19 on utilise 11 fois le chiffre 1.
De 20 à 99 on utilise 8 fois le chiffre 1.
Donc de 1 à 99 on utilise 20 fois le chiffre 1.
Excepté les pages numérotées de 100 à 199, pour chaque centaine de pages (200 à 299, 300 à 399…) il y a toujours 20 fois le chiffre 1 utilisé puisque le chiffe des centaines n'est jamais 1.

De 100 à 199 on utilise 120 fois le chiffre 1.
On peut utiliser un tableur pour calculer le pourcentage de 1 dans les pages :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
1	Nbe de pa	Nbe d	% de 1	Nbe de	Nbe de	% de 1	Nbe de p	Nbe de 1	% de 1	Nbe de	Nbe de 1	% de 1	Nbe de	Nbe de 1	% de 1	Nbe de p	Nbe de 1	% de 1	Nbe de p	Nbe de	% de 1	Nbe de	Nbe de 1	% de 1
2	0	0		100	21	0,21	200	140	0,7	300	160	0,5333	400	180	0,45	500	200	0,4	600	220	0,3667	700	240	0,342857
3	1	1	1	101	23	0,2277	201	141	0,70149	301	161	0,5349	401	181	0,4514	501	201	0,4012	601	221	0,3677	701	241	0,343795
4	2	1	0,5	102	24	0,2353	202	141	0,69802	302	161	0,5331	402	181	0,4502	502	201	0,4004	602	221	0,3671	702	241	0,343305
5	3	1	0,33333	103	25	0,2427	203	141	0,69458	303	161	0,5314	403	181	0,4491	503	201	0,3996	603	221	0,3665	703	241	0,342817
6	4	1	0,25	104	26	0,25	204	141	0,69118	304	161	0,5296	404	181	0,448	504	201	0,3988	604	221	0,3659	704	241	0,34233
7	5	1	0,2	105	27	0,2571	205	141	0,6878	305	161	0,5279	405	181	0,4469	505	201	0,398	605	221	0,3653	705	241	0,341844
8	6	1	0,16667	106	28	0,2642	206	141	0,68447	306	161	0,5261	406	181	0,4458	506	201	0,3972	606	221	0,3647	706	241	0,34136
9	7	1	0,14286	107	29	0,271	207	141	0,68116	307	161	0,5244	407	181	0,4447	507	201	0,3964	607	221	0,3641	707	241	0,340877
10	8	1	0,125	108	30	0,2778	208	141	0,67788	308	161	0,5227	408	181	0,4436	508	201	0,3957	608	221	0,3635	708	241	0,340395
11	9	1	0,11111	109	31	0,2844	209	141	0,67464	309	161	0,521	409	181	0,4425	509	201	0,3949	609	221	0,3629	709	241	0,339915
12	10	2	0,2	110	33	0,3	210	142	0,67619	310	162	0,5226	410	182	0,4439	510	202	0,3961	610	222	0,3639	710	242	0,340845
13	11	4	0,36364	111	36	0,3243	211	144	0,68246	311	164	0,5273	411	184	0,4477	511	204	0,3992	611	224	0,3666	711	244	0,343179
14	12	5	0,41667	112	38	0,3393	212	145	0,68396	312	165	0,5288	412	185	0,449	512	205	0,4004	612	225	0,3676	712	245	0,344101
15	13	6	0,46154	113	40	0,354	213	146	0,68545	313	166	0,5304	413	186	0,4504	513	206	0,4016	613	226	0,3687	713	246	0,345021
16	14	7	0,5	114	42	0,3684	214	147	0,68692	314	167	0,5318	414	187	0,4517	514	207	0,4027	614	227	0,3697	714	247	0,345938
17	15	8	0,53333	115	44	0,3826	215	148	0,68837	315	168	0,5333	415	188	0,453	515	208	0,4039	615	228	0,3707	715	248	0,346853
18	16	9	0,5625	116	46	0,3966	216	149	0,68981	316	169	0,5348	416	189	0,4543	516	209	0,405	616	229	0,3718	716	249	0,347765
19	17	10	0,58824	117	48	0,4103	217	150	0,69124	317	170	0,5363	417	190	0,4556	517	210	0,4062	617	230	0,3728	717	250	0,348675
20	18	11	0,61111	118	50	0,4237	218	151	0,69266	318	171	0,5377	418	191	0,4569	518	211	0,4073	618	231	0,3738	718	251	0,349582
21	19	12	0,63158	119	52	0,437	219	152	0,69406	319	172	0,5392	419	192	0,4582	519	212	0,4085	619	232	0,3748	719	252	0,350487
22	20	12	0,6	120	53	0,4417	220	152	0,69091	320	172	0,5375	420	192	0,4571	520	212	0,4077	620	232	0,3742	720	252	0,35
23	21	13	0,61905	121	55	0,4545	221	153	0,69231	321	173	0,5389	421	193	0,4584	521	213	0,4088	621	233	0,3752	721	253	0,350902
24	22	13	0,59091	122	56	0,459	222	153	0,68919	322	173	0,5373	422	193	0,4573	522	213	0,408	622	233	0,3746	722	253	0,350416
25	23	13	0,56522	123	57	0,4634	223	153	0,6861	323	173	0,5356	423	193	0,4563	523	213	0,4073	623	233	0,374	723	253	0,349931
26	24	13	0,54167	124	58	0,4677	224	153	0,68304	324	173	0,534	424	193	0,4552	524	213	0,4065	624	233	0,3734	724	253	0,349448
27	25	13	0,52	125	59	0,472	225	153	0,68	325	173	0,5323	425	193	0,4541	525	213	0,4057	625	233	0,3728	725	253	0,348966
28	26	13	0,5	126	60	0,4762	226	153	0,67699	326	173	0,5307	426	193	0,4531	526	213	0,4049	626	233	0,3722	726	253	0,348485
29	27	13	0,48148	127	61	0,4803	227	153	0,67401	327	173	0,5291	427	193	0,452	527	213	0,4042	627	233	0,3716	727	253	0,348006
30	28	13	0,46429	128	62	0,4844	228	153	0,67105	328	173	0,5274	428	193	0,4509	528	213	0,4034	628	233	0,371	728	253	0,347527
31	29	13	0,44828	129	63	0,4884	229	153	0,66812	329	173	0,5258	429	193	0,4499	529	213	0,4026	629	233	0,3704	729	253	0,347051
32	30	13	0,43333	130	64	0,4923	230	153	0,66522	330	173	0,5242	430	193	0,4488	530	213	0,4019	630	233	0,3698	730	253	0,346575
33	31	14	0,45161	131	66	0,5038	231	154	0,66667	331	174	0,5257	431	194	0,4501	531	214	0,403	631	234	0,3708	731	254	0,347469
34	32	14	0,4375	132	67	0,5076	232	154	0,66379	332	174	0,5241	432	194	0,4491	532	214	0,4023	632	234	0,3703	732	254	0,346995
35	33	14	0,42424	133	68	0,5113	233	154	0,66094	333	174	0,5225	433	194	0,448	533	214	0,4015	633	234	0,3697	733	254	0,346521
36	34	14	0,41176	134	69	0,5149	234	154	0,65812	334	174	0,521	434	194	0,447	534	214	0,4007	634	234	0,3691	734	254	0,346049
37	35	14	0,4	135	70	0,5185	235	154	0,65532	335	174	0,5194	435	194	0,446	535	214	0,4	635	234	0,3685	735	254	0,345578
38	36	14	0,38889	136	71	0,5221	236	154	0,65254	336	174	0,5179	436	194	0,445	536	214	0,3993	636	234	0,3679	736	254	0,345109
39	37	14	0,37838	137	72	0,5255	237	154	0,64979	337	174	0,5163	437	194	0,4439	537	214	0,3985	637	234	0,3673	737	254	0,34464
40	38	14	0,36842	138	73	0,529	238	154	0,64706	338	174	0,5148	438	194	0,4429	538	214	0,3978	638	234	0,3668	738	254	0,344173
41	39	14	0,35897	139	74	0,5324	239	154	0,64435	339	174	0,5133	439	194	0,4419	539	214	0,397	639	234	0,3662	739	254	0,343708
42	40	14	0,35	140	75	0,5357	240	154	0,64167	340	174	0,5118	440	194	0,4409	540	214	0,3963	640	234	0,3656	740	254	0,343243
43	41	15	0,36585	141	77	0,5461	241	155	0,64315	341	175	0,5132	441	195	0,4422	541	215	0,3974	641	235	0,3666	741	255	0,34413
44	42	15	0,35714	142	78	0,5493	242	155	0,6405	342	175	0,5117	442	195	0,4412	542	215	0,3967	642	235	0,366	742	255	0,343666
45	43	15	0,34884	143	79	0,5524	243	155	0,63786	343	175	0,5102	443	195	0,4402	543	215	0,3959	643	235	0,3655	743	255	0,343203
46	44	15	0,34091	144	80	0,5556	244	155	0,63525	344	175	0,5087	444	195	0,4392	544	215	0,3952	644	235	0,3649	744	255	0,342742
47	45	15	0,33333	145	81	0,5586	245	155	0,63265	345	175	0,5072	445	195	0,4382	545	215	0,3945	645	235	0,3643	745	255	0,342282
48	46	15	0,32609	146	82	0,5616	246	155	0,63008	346	175	0,5058	446	195	0,4372	546	215	0,3938	646	235	0,3638	746	255	0,341823
49	47	15	0,31915	147	83	0,5646	247	155	0,62753	347	175	0,5043	447	195	0,4362	547	215	0,3931	647	235	0,3632	747	255	0,341365
50	48	15	0,3125	148	84	0,5676	248	155	0,625	348	175	0,5029	448	195	0,4353	548	215	0,3923	648	235	0,3627	748	255	0,340909
51	49	15	0,30612	149	85	0,5705	249	155	0,62249	349	175	0,5014	449	195	0,4343	549	215	0,3916	649	235	0,3621	749	255	0,340454
52	50	15	0,3	150	86	0,5733	250	155	0,62	350	175	0,5	450	195	0,4333	550	215	0,3909	650	235	0,3615	750	255	0,34
53	51	16	0,31373	151	88	0,5828	251	156	0,62151	351	176	0,5014	451	196	0,4346	551	216	0,392	651	236	0,3625	751	256	0,340879

Si le livre compte **750 pages**, on compte 255 fois le chiffre 1 et $\frac{255}{750} = 0{,}34$.
C'est-à-dire que le nombre de 1 utilisés pour la numérotation représente 34% des pages numérotées.

Programme de Seegers Luc, Mérigot Rémi, Deschamp Sevelinge Léo (La Prat's) :

```
nb_de_un=0
nb_pages=0
for i in range(1,3000):
    nb_pages=i
    copie_de_i_str=str(i)
    for k in range(len(copie_de_i_str)):
        if copie_de_i_str[k]=="1":
            nb_de_un +=1
    if round(i*0.34,2)==round(nb_de_un,2):
        print(str(nb_de_un)+" fois le nombre 1")
        print(str(nb_pages)+" pages")
```

Exercice 4 : Le compte n'est pas bon

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120

On barre tous les multiples de 7 et de 17 jusqu'à 120, ce qui suffira largement.
On reprend chaque entier barré et on barre les entiers suivants en ajoutant 7 ou 17.
On le fait pour 7, 14, 17, 21, 24, 28, 31, 34, 35, 38, 41, 42, 45, 48, 49, 51, 52, 55, 56, 58, 59, 62, 63, 65, 66, 68, 69, 70, 72, 73, 75, 76, 77, 79, 80, 82, 83, 84, 85.
On remarque alors une suite de 7 nombres consécutifs barrés : 96 à 102.
Les successeurs de 102 seront donc tous barrés !
Reste à vérifier s'il reste à barrer des nombres entre 86 et 96 : ce n'est pas le cas.
Finalement, il suffit de compter les nombres non barrés entre 1 et 96 : il y en a **48**.

Complément : si a et b sont deux entiers premiers entre eux, alors tout nombre supérieur ou égal à $(a-1)(b-1)$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de a et b. De plus, le nombre d'entiers qui ne peuvent pas s'écrire sous cette forme est $\frac{(a-1)(b-1)}{2}$. C'est un cas particulier du problème de Frobenius.

Programme Gierczak-Galle Tristan, Kobeissi Haïdar, Regnaud Matthieu, Tarnaud Émilien (CDG) :

```
l=[i*7+j*17 for i in range(50) for j in range(50)]
l.sort()
i=0
total=0
while l[i]!=100:
    total+=l[i+1]-l[i]-1
    i+=1
print(total)
```

Programme Quantin Raphaël, Martin Soren, Chollet Louise, Verrier Claire (Chevalier d'Eon) :

```
liste_entier=[]
for i in range(1,95):
    liste_entier.append(i)
fin=len(liste_entier)
a=1

for n in range(0,20):
    for m in range(0,10):
        nombre=7*n+17*m
        for x in range(0,fin-a):
            if nombre==liste_entier[x]:
                del(liste_entier[x])
                a=a+1

print(liste_entier)
print(len(liste_entier))
```

<u>Programme Clech Etienne, Ramillon Martin, (Chevalier d'Eon)</u> :

```
resultat=[]
for i in range(1000):
    resultat.append(i)
test=0
for i in range(500):
    for n in range(500):
        test=i*17+n*7
        if resultat.count(test)!=0:
            resultat.remove(test)
print(resultat)
print(len(resultat))
```

<u>Programme Salin Lucie, Kozaczka Olivier, Poey Arthur, Pruvel Mathilde (Louis Davier)</u> :

```
liste_nombres=list(range(119))
for a in range(18):
    for b in range(8):
        test=a*7+b*17
        if test in liste_nombres:
            liste_nombres.remove(test)
print(liste_nombres)
print(len(liste_nombres))
```

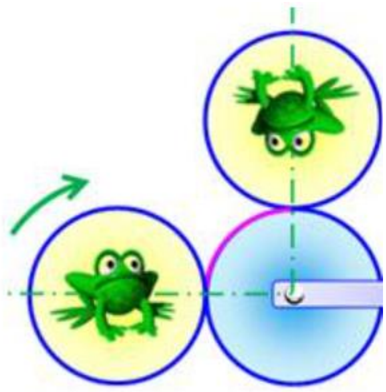
<u>Programme Seegers Luc, Mérigot Rémi, Deschamp Sevelinge Léo (La Prat's)</u> :

```
from math import*
l_test=1000
for i in range(l_test):
    n_17=i//17
    flop=0
    ok=False
    if n_17==0:
        if i%7==0 and i!=0:
            ok=True
    else:
        for j in range(n_17+1):
            n_test=i-(17*j)
            if n_test%7==0:
                ok=True
            else:
                flop +=1
    if ok:
        print(str(i) +": OK")
    else:
        print(str(i) +": non")
```

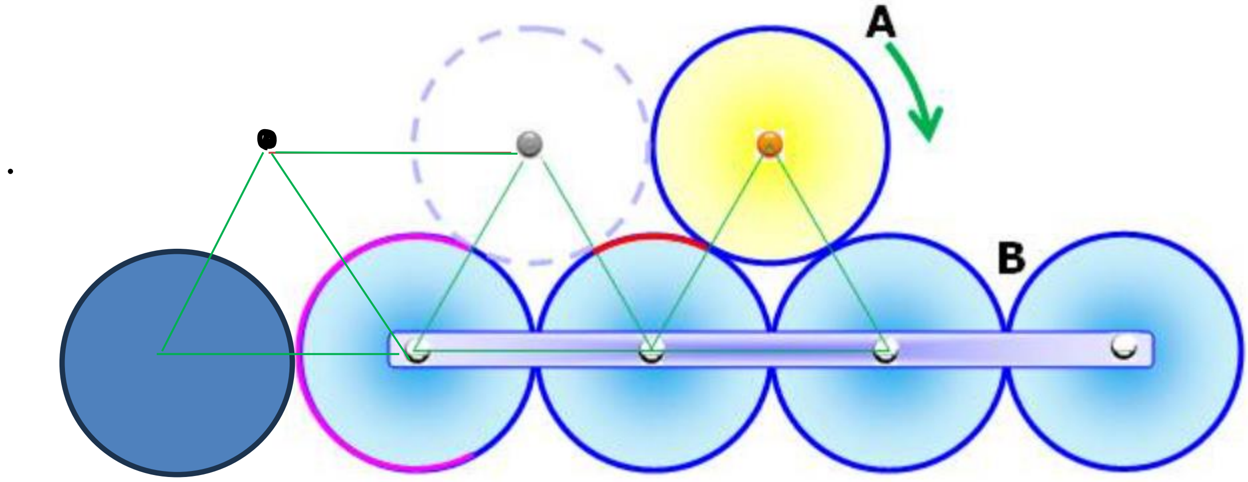
<u>Exercice 5</u> : Les anneaux olympiques

Dans cet exercice, il est très important de noter que l'anneau roule au-dessus des autres, sans glisser.

Un résultat, contre-intuitif peut-être, est que lorsque l'anneau mobile effectue un quart de tour d'un anneau fixe, il effectue un demi-tour sur lui-même, comme l'illustre cette figure, extraite de la mine d'or du site du passionné Gérard VUILLEMIN :

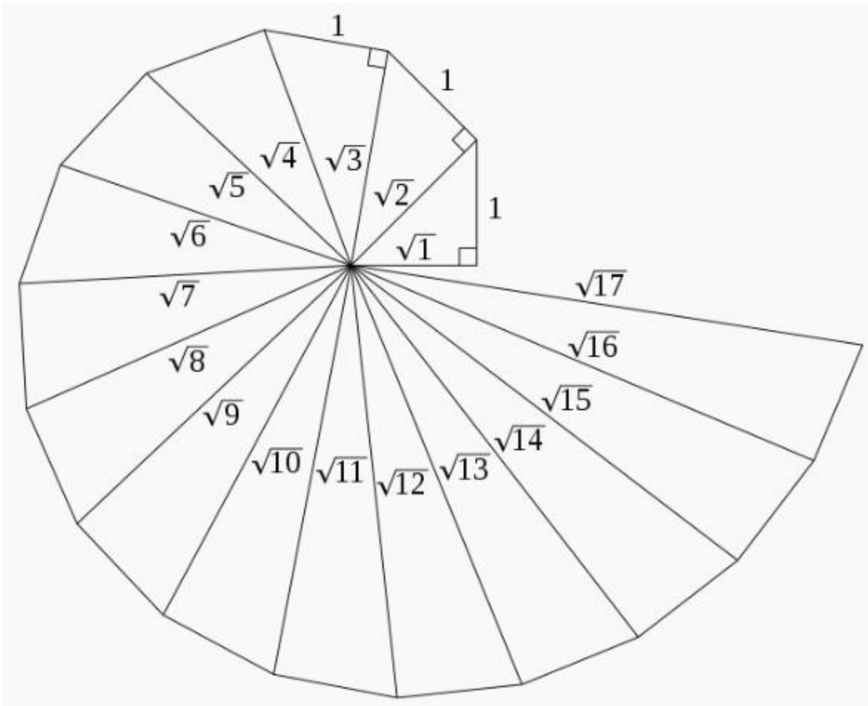


Si l'anneau mobile effectuait un tour complet autour d'un anneau fixe, il réaliserait donc deux tours sur lui-même.
Ce résultat constitue en soi un petit exercice de géométrie.
Pour revenir à la configuration de l'exercice, où les anneaux sont de rayon R.



Les triangles représentés sont équilatéraux de côtés $2R$, donc les angles mesurent donc $\frac{\pi}{3}$.
Pour passer de la configuration initiale à la configuration en pointillés, le centre de l'anneau mobile effectue une rotation de $\frac{2\pi}{3}$ autour de l'anneau 1, puis il effectue une rotation de $\frac{\pi}{3}$ autour du centre de l'anneau 2.
Ensuite, par symétrie, il effectue à nouveau une rotation $\frac{\pi}{3}$ autour du centre de l'anneau 3 puis une de $\frac{2\pi}{3}$ autour de l'anneau 4.
Finalement cela correspond à une « rotation totale » de 2π, ce qui revient à considérer le résultat introductif.
Finalement, l'anneau de gauche effectue deux tours sur lui-même.

Exercice 6 : La spirale de Théodore
On a représenté les 16 premiers triangles de la spirale :



Le 17ème triangle nous fera faire un tour complet.
On appelle O le point commun à tous les triangles.
On ajoute les mesures des angles $\hat{O}$ des différents triangles. Dans le triangle i, entier strictement positif :

$$\tan(\hat{O}_i) = \frac{1}{\sqrt{i}} = \frac{\sqrt{i}}{i}$$

Au centième près :

$$\arctan\left(\frac{\sqrt{1}}{1}\right) + \cdots + \arctan\left(\frac{\sqrt{16}}{16}\right) = 351{,}15 < 360 \text{ et } \arctan\left(\frac{\sqrt{1}}{1}\right) + \cdots + \arctan\left(\frac{\sqrt{17}}{17}\right) = 364{,}78 > 360.$$

<u>**Exercice 7**</u> : Vive la mariée
Commençons par montrer qu'il n'y a pas plus de trois âges différents.
Pour cela, considérons qu'il y a quatre âges différents : a, b, c, d. Parmi les invités, il y a au moins cinq personnes ayant le même âge, sinon il n'y aurait qu'au maximum 16 invités : l'énoncé précise que les invités sont nombreux !
Supposons donc qu'il y a au moins cinq invités d'âge a.

Considérons les sommes $\begin{cases} S_1 = a+a+a+a+a \\ S_2 = a+a+a+a+b \\ S_3 = a+a+a+a+c \\ S_4 = a+a+a+a+d \end{cases}$. Ces quatre sommes sont distinctes deux à deux, ce qui n'est pas compatible avec l'énoncé puisque, quelque soit la somme des âges de cinq invités, celle-ci ne peut être égale qu'à 149, 150 ou 151.
Il ne peut donc y avoir quatre âges différents parmi les nombreux invités. On montrerait de même qu'il n'y a pas plus de quatre âges différents.
Finalement, les âges des invités sont a, b ou c, avec par exemple au moins cinq invités d'âge a.

La somme $S_1 = a+a+a+a+a$ conduit nécessairement à $a = 30$. De même, en supposant que $b < c$, la somme $S_2 = a+a+a+a+b$ est égale 149 d'où $b = 29$. Cet âge b ne peut être celui que d'un seul invité sinon la somme $a+a+a+b+b$ serait strictement inférieure à 149…
Pour des raisons analogues, la somme $S_3 = a+a+a+a+c$ est égale 151 d'où $c = 31$, avec un seul invité de cet âge.

Finalement, les sommes possibles sont $\begin{cases} S_1 = a + a + a + a + a \\ S_2 = a + a + a + a + b \\ S_3 = a + a + a + a + c \\ S_4 = a + a + a + b + c \end{cases}$ qui valent 149, 150 ou 151.

Comme les témoins sont deux sœurs jumelles plus âgées que la mariée, elles ont 30 ans et **la mariée a 29 ans**.

<u>Exercice 8</u> : Produit maximal

En testant « de proche en proche » :

$$9 \times 8$$
$$9 \times 87$$
$$96 \times 87$$
$$96 \times 875$$
$$964 \times 875$$
$$964 \times 8753$$
$$9642 \times 8753$$
$$\mathbf{9642 \times 87531 = 843973902}.$$

Le nombre le plus « court » commence par le chiffre le plus grand, le nombre le plus « long » commence par les deux chiffres restants les plus grands, puis on alterne à chacun des deux facteurs la répartition des chiffres décroissants.

<u>Programme Quantin Raphaël, Martin Soren, Chollet Louise, Verrier Claire (Chevalier d'Eon)</u> :

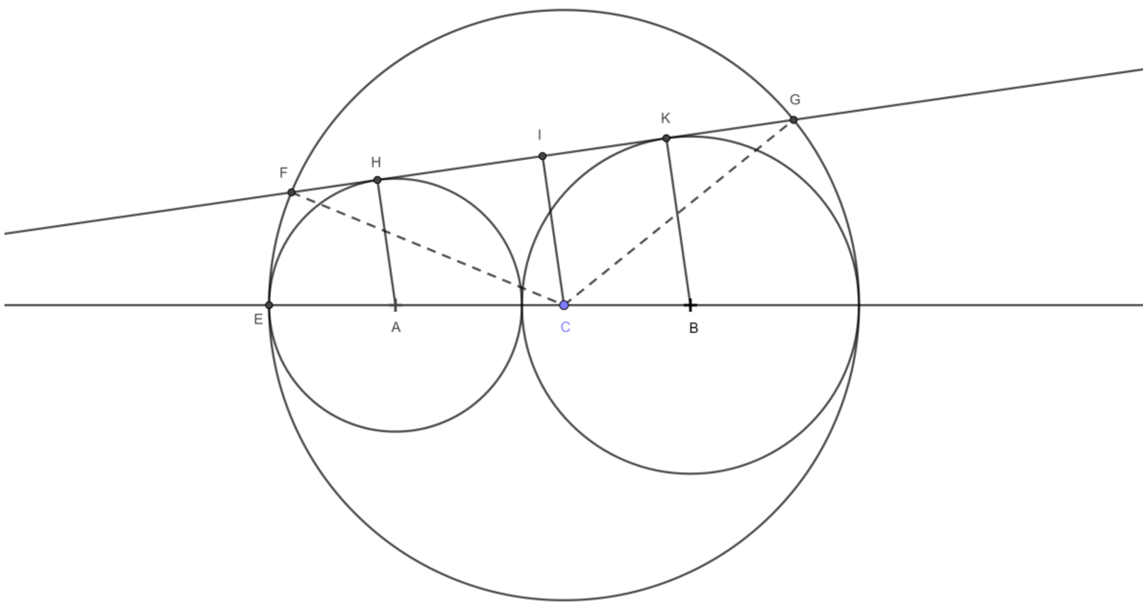
```
import random
max=0
produit=[0,0]
repet=0

while repet !=100000:
    liste_nombre=[1,2,3,4,5,6,7,8,9]
    n=9
    gauche=[]
    for i in range(1,5):
        alea=random.randint(1,n-1)
        gauche.append(liste_nombre[alea])
        del(liste_nombre[alea])
        n=n-1
    nombre_g=0
    power=len(gauche)
    for j in gauche:
        nombre_g=nombre_g+j*10**power
        power=power-1
    nombre_g=nombre_g/10
    random.shuffle(liste_nombre)
    nombre_d=0
    power=len(liste_nombre)
    for k in liste_nombre:
        nombre_d=nombre_d+k*10**power
        power=power-1
    nombre_d=nombre_d/10
    max_bis=nombre_d*nombre_g
    if max_bis>max:
        max=max_bis
        del(produit[0:])
        produit.append(nombre_g)
        produit.append(nombre_d)
    repet=repet+1
```

Programme Hancer Johan, Sigwalt Nello, Relave Anatole (Carnot) :

```
import time
from itertools import permutations
start=time.time()
digits="123456789"
strs=["".join(n) for n in permutations(digits)]
print((len(strs))," combinaisons générées en ",(time.time()-start)," s")
count=0
hi=0
for p in strs:
    pc=count/len(strs)
    if pc*100 % 10==0:
        print("progression : ",(pc*100), "%")
    for i in range(8):
        n1=p[0:i+1]
        n2=p[i+1:]
        if int(n1)*int(n2)>hi:
            hi=int(n1)*int(n2)
            mn1=n1
            mn2=n2
    count+=1
print("le plus grand nombre est ",[hi], "trouvé en multipliant ",(mn1)," par ",(mn2))
print("Script exécuté en ",(time.time()-start), "s")
```

Exercice 9 : Les trois cercles tangents

Le cercle de centre A a pour rayon 6, celui de centre B a pour rayon 8 et celui de centre C a pour rayon 14. Les points H, I, K sont les projetés orthogonaux respectifs de A, C, B sur la droite (FG). Notons O le point d'intersection des droites (AB) et (FG) (hors figure).



Considérons le triangle FCG isocèle en C : I est le milieu de [FG]. Pour calculer IG, déterminons OE, puis IC.

Dans le triangle OKB, appliquons le théorème de Thalès :

$\frac{OA}{OB} = \frac{HA}{KB} = \left(\frac{OH}{OK}\right) \Leftrightarrow \frac{OE+6}{OE+20} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4(OE+6) = 3(OE+20) \Leftrightarrow \boldsymbol{OE = 36}.$

Dans le triangle OIC, appliquons le théorème de Thalès :
$\frac{OA}{OC} = \frac{HA}{IC} = \left(\frac{OH}{OI}\right) \Leftrightarrow \frac{OE+6}{OE+14} = \frac{6}{IC} \Leftrightarrow \frac{42}{50} = \frac{6}{IC} \Leftrightarrow \boldsymbol{IC = \frac{50}{7}}$.

Appliquons ensuite le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ICG :
$IG^2 + IC^2 = CG^2 \Leftrightarrow IG^2 = 14^2 - \left(\frac{50}{7}\right)^2 = \frac{7104}{49}$ d'où $IG = \sqrt{\frac{7104}{49}}$.
Finalement, $FG = 2IG = 2\sqrt{\frac{7104}{49}} \approx 24{,}0815$, soit $\boldsymbol{FG \approx 24}$.

<u>Complément</u> : généralisation de l'exercice.
Si on note respectivement a, b et $a + b$ les rayons des cercles de centres respectifs A, B et C, alors on montre que :
$OE = \frac{2a^2}{b-a}$, $IC = \frac{a^2+b^2}{a+b}$ et $FG = 2\frac{\sqrt{(a+b)^4-(a^2+b^2)^2}}{a+b} = 4\frac{\sqrt{ab(a^2+ab+b^2)}}{a+b}$.

Université de Bourgogne - U.F.R. Sciences et Techniques - IREM –
9, avenue Savary - B.P. 47 870 - 21078 DIJON cedex
☎ 03 80 39 52 30 - Télécopie 03 80 39 52 39
e-mail "iremsecr@u-bourgogne.fr"
http://irem.u-bourgogne.fr/