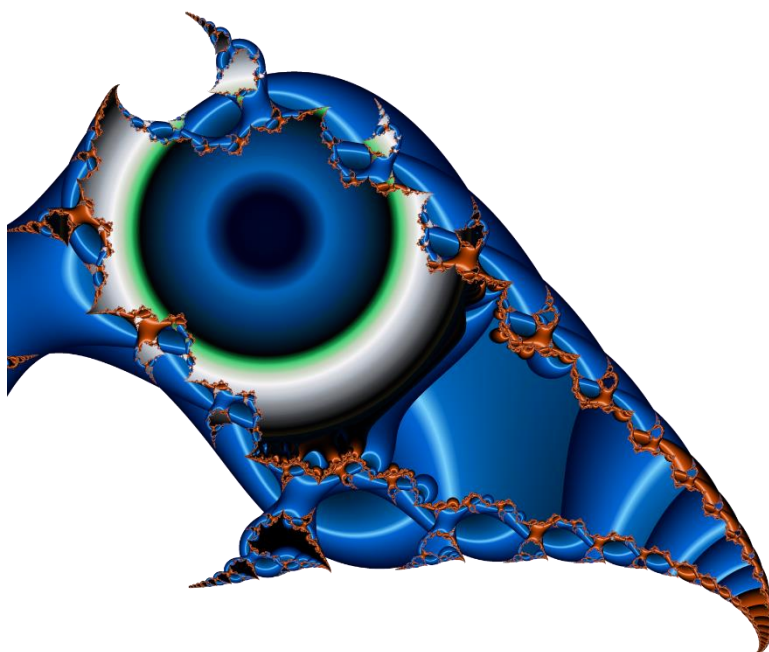


RALLYE MATHÉMATIQUE DE BOURGOGNE

2022 : 40^e rallye



Strcreatbol025a, avec l'aimable autorisation de Jos Leys (<http://www.josleys.com>)

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

Faculté Sciences Mirande - B.P. 47 870 - 21078 DIJON cedex

☎ 03 80 39 52 30 - Télécopie 03 80 39 52 39

e-mail "iremsecr@u-bourgogne.fr" - <http://irem.u-bourgogne.fr>

Franchement, n'est-on pas encore jeune à quarante ans ?

C'est le cas du Rallye des lycées ! Après ces deux années bouleversées par l'épidémie, il reste un moment fort de l'activité de l'IREM, mais aussi de celle des élèves dans les établissements ; en ces temps de retour incertain à la normale, ne négligeons pas ce petit bonheur d'être ensemble, de travailler ensemble, de réussir ensemble.

Dans le millésime 2022 : des chiffres, des lettres, des figures, des solides. Comme souvent, me direz-vous. Certes, mais c'est avant tout parce que les objets de l'activité mathématique sont d'abord les nombres et les formes, avant les variables, les algorithmes et les fonctions. Notre patrimoine commun reste constitué de nombres et de formes, pour peu que l'on considère l'algèbre comme une partie de l'univers numérique et la topologie comme une extension du discours (millénaire) sur les formes.

Mais nous considérons quand même qu'à l'égard de la discipline mathématique, les auteurs (et autrice) du Rallye font preuve de l'irrévérence caractéristique de la jeunesse ; en effet, ne voyagent-ils pas jusqu'au Japon pour s'inspirer du Kakuro ? Ne conçoivent-ils pas une suite *imparfaite*, quand c'est la perfection qui est toujours recherchée dans les nombres ? N'attribuent-ils pas une vie aux nombres, et par conséquent une mort, puisqu'il n'en reste qu'un ?

Bref ! la jeunesse est toujours l'attribut du Rallye, et nous lui souhaitons longue vie ! D'autant plus que le numéro de la prochaine édition étant l'un des deux nombres d'une paire de nombres premiers jumeaux, l'équipe devra nous concocter de nouvelles délicieuses friandises !

Frédéric Métin, directeur de l'IREM

1. ÉNONCÉS 2022

Exercice 1 : KAKURO

Il s'agit de remplir le carré ci-contre en mettant un chiffre de 1 à 9 par case de manière à respecter les sommes en lignes et en colonnes qui sont indiquées dans la marge. Attention, les 4 chiffres qui sont situés dans une même ligne ou une même colonne doivent être différents. Ainsi écrire $9 + 6 + 9 + 4 = 28$ est interdit dans la première ligne.

				28
				26
				18
				12
29	26	18	11	

Exercice 2 : DES CHIFFRES ET DES LETTRES

On invente un mot géant en accolant les lettres utilisées pour écrire la suite des nombres : *undeu×troisquatrecinqsixsept...seizedixseptdixhuit...vingtetun...*

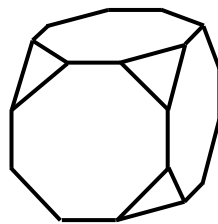
Quelle est la 2022^{ème} lettre de ce mot ?

Attention : le mot vingt prend un « s » uniquement pour le nombre 80 (*quatrevingts*).

Exercice 3 : CUBE TRONQUÉ

Un cube de côté 15 cm est tronqué aux 8 coins. Les 36 arêtes de ce cube tronqué sont égales.

Le récipient ainsi obtenu peut-il contenir 3 litres ?



Exercice 4 : LA SUITE IMPARFAITE

On écrit les entiers à la suite les uns des autres, mais sans les carrés (1, 4, 9...) et les cubes (1, 8, 27...) :

2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 ; 15 ; 17 ; ...

Quel est le 2022^{ème} terme de cette suite ?

Exercice 5 : PERMUTATIONS

L'entier N est un nombre dont les trois chiffres sont distincts.

En permutant ces trois chiffres, on peut écrire cinq autres nombres, dont la somme est égale à 2022.

Que vaut N ?

Exercice 6 : VITESSE LIMITÉE

André, Bernard et Claude ont fait le même trajet en voiture, pendant le même temps.

Toutefois, chacun a fait une pause plus ou moins longue :

- André a roulé 3 fois plus de temps que Bernard ne s'est arrêté.
- Bernard a roulé 4 fois plus de temps que Claude ne s'est arrêté.
- Claude a roulé 5 fois plus de temps qu'André ne s'est arrêté.

Ils comparent leur vitesse moyenne (sans compter les pauses) : elle est de 100 pour le peintre et de 102 pour le poète.
 Trouver la vitesse du mathématicien, arrondie à l'entier, et son prénom.

Exercice 7 : JURASSIK PARK

Deux voraceptors mâles ne peuvent pas cohabiter, à moins d'être éloignés d'au minimum 16 m.
 Quel est le nombre maximal de voraceptors mâles qui peuvent cohabiter dans un enclos rectangulaire de $31 \times 36 \text{ m}^2$?

Exercice 8 : LE SURVIVANT

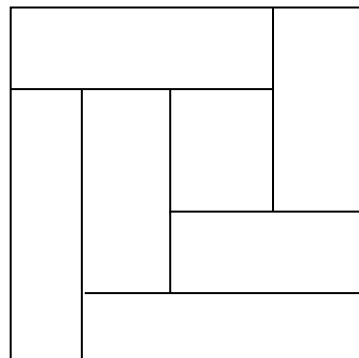
Des nombres sont inscrits sur un grand tableau blanc.

Je débute le jeu dont les règles sont les suivantes :

1. je choisis deux de ces nombres au hasard, notés a et b ;
 2. je les efface tous les deux du tableau ;
 3. je remplace un des deux emplacements libres par le nombre $a + b + 1$;
 4. je recommence les étapes 1 à 3 jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul nombre écrit, appelé survivant.
- Quel est le survivant du tableau dont les nombres inscrits au départ sont les entiers de 1 à 2022 ?

Exercice 9 : LA LA LA L'AIRE

Le carré ci-contre a été partagé en sept rectangles qui ont tous le même périmètre de 300 m.
 Combien mesure le côté du carré ?



Solutions succinctes

Exercice	Solution
1. Kakuro	Les quatre lignes du Kakuro sont : 8, 9, 6, 5 ; 7, 8, 9, 2 ; 9, 5, 1, 3 ; 5, 4, 2, 1.
2. Des chiffres et des lettres	La 2022 ^{ième} lettre de ce mot est donc le « u » du neuf de 169.
3. Cube tronqué	Oui car le cube tronqué a un volume d'environ 3,261 litres.
4. La suite imparfaite	Le 2022 ^{ème} terme de la suite est 2076.
5. Permutations	L'entier N est 642.
6. Vitesse limitée	Bernard est le mathématicien et sa vitesse est d'environ 116 km/h.
7. Jurassik Park	Au maximum, 9 voraceptors mâles peuvent cohabiter.
8. Le survivant	Le survivant est 2 047 274.
9. La la la l'aire	Le carré initial a pour côté 160 m.

2. LA PARTICIPATION

Le 40^{ème} Rallye mathématique de Bourgogne des lycées s'est déroulé le mercredi 30 mars 2022.

Il a concerné :

17 lycées

129 équipes

417 participants.

Voici l'évolution de la participation ces sept dernières années :

Année	Côte d'Or	Nièvre	Saône et Loire	Yonne	Total des participants
2016	365	180	154	72	771
2017	427	172	180	69	848
2018	288	156	166	65	675
2019	319	133	166	43	661
2020	304	45	273	65	687
2021	104	30	43	26	203
2022	264	85	28	40	417

Les effectifs par lycée et par niveau sont récapitulés ci-après.

Niveau I : secondes (générales, technologiques et professionnelles), premières générales (non spécialité mathématiques), terminales générales (élèves n'ayant pas suivi d'enseignement mathématique depuis la 2^{nde})

Niveau II : premières et terminales technologiques

Niveau III : premières générales (spécialité mathématiques) et terminales générales (élèves n'ayant suivi la spécialité mathématiques qu'en première)

Niveau IV : terminales (spécialité mathématiques ou option « mathématiques complémentaires »)

Niveau	Nombre de candidats				Nombre d'équipes			
	I	II	III	IV	I	II	III	IV
21 - Lycée Anna Judic	14	0	0	4	4	0	0	1
21 - Lycée Carnot	19	0	2	3	5	0	1	1
21 - Lycée Charles de Gaulle	14	0	10	10	4	0	3	3
21 - Lycée Eiffel	85	0	1	30	27	0	1	10
21 - Lycée Le Castel	9	0	0	0	3	0	0	0
21 - Lycée Montchapet	12	0	3	0	4	0	1	0
21 - Lycée Stephen Liégeois	9	0	4	6	3	0	1	2
21 - Lycée Saint Joseph - La Salle	29	0	0	0	8	0	0	0
58 - Lycée Alain Colas	16	11	6	18	5	4	2	5
58 - Lycée Maurice Genevoix	7	0	0	3	2	0	0	1
58 - Lycée Notre-Dame - Nevers	6	0	4	4	2	0	1	1
58 - Lycée Romain Rolland	0	0	6	4	0	0	2	1
71 - Lycée Henri Parriat	6	0	4	4	2	0	1	1
71 - Lycée Julien Wittmer	0	0	2	4	0	0	1	1
71 - Lycée Niepce-Balleure	4	0	4	0	1	0	1	0
89 - Lycée du Parc des Chaumes	9	0	4	11	3	0	1	4
89 - Lycée Jacques Amyot	9	0	7	0	3	0	2	0
Total	248	11	57	101	76	4	18	31

À noter la très forte participation du lycée Eiffel, avec plus du quart du total des participants !

3. L'ORGANISATION

L'IREM (Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques), dépendant de l'Université de Bourgogne, est l'organisateur du rallye.

Le financement est assuré par l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public), l'IREM et le Rectorat.

L'élaboration des sujets et la correction des copies sont assurées dans le cadre de l'IREM par : Anthony OSSWALD, Florian PLASTRE et Marie WAGNER.

Trois autres personnes ont participé au choix définitif des sujets : Frédéric LEMASSON, Maurice NUSSBAUM et Anna Verkerk. Nous les remercions vivement pour leur cobayage éclairé.

Il faut remercier tout spécialement :

Madame Albert-Moretti, Rectrice de l'Académie de Dijon, Monsieur Pierre N'Gahane, Recteur de l'Académie de Dijon, Mesdames et Messieurs les Chefs d'Établissement, Adjointes et CPE, qui ont autorisé et permis la mise en place du Rallye.

Francis Cortado, William Exertier et Frédéric Lemasson, IA-IPR de mathématiques, pour leur soutien au rallye des lycées.

Frédéric MÉTIN, Directeur de l'IREM.

Tous les professeurs qui ont bénévolement assuré l'organisation matérielle du Rallye dans leur établissement et la surveillance de l'épreuve.

Fouziya Moustakim, qui est responsable à l'IREM de la "logistique" du Rallye et de la publication de cette brochure.

Tous ceux qui ont bien voulu chercher les problèmes posés et nous faire part de leurs idées, par courrier, par la presse régionale ou par Internet.

Et bien évidemment les 417 Bourguignons qui ont travaillé durement...

4. LA RÉUSSITE

Exercice	Nombre d'équipes ayant abordé le problème	Proportion d'équipes ayant abordé le problème	Proportion d'équipes ayant donné la bonne réponse
1. Kakuro	68	86,1%	48,5%
2. Des chiffres et des lettres	75	94,9%	9,3%
3. Cube tronqué	66	83,6%	6,1%
4. La suite imparfaite	107	82,9%	31,8%
5. Permutations	112	86,8%	85,7%
6. Vitesse limitée	78	60,5%	16,7%
7. Jurassik Park	48	98%	6,3%
8. Le survivant	40	81,6%	77,5%
9. La la la l'aire	33	67,3%	3%

5. LE PALMARÈS

(Seules les équipes de moins de 5 élèves seront récompensées)

Les meilleures équipes sont :

Niveau I (secondes (générales, technologiques et professionnelles), premières générales (non spécialité mathématiques), terminales générales (élèves n'ayant pas suivi d'enseignement mathématique depuis la 2^{nde}))

**L'équipe : [BREUILLET Anaïs – CARDOT Yanis – DE WARREN Théandre – RELAVE Anatole]
du lycée Carnot de Dijon avec 50 points sur 60.**

Niveau II (premières et terminales technologiques)

**L'équipe : [DUMONT Benjamin – MARCINIAK Mahée – MENCONI Mathis – SIMONIN Lisa]
du lycée Alain Colas de Nevers avec 33 points sur 60.**

Niveau III (premières générales (spécialité mathématiques) et terminales générales (élèves n'ayant suivi la spécialité mathématiques qu'en première))

**L'équipe : [DROUYNOT Titouan – GEBAUER Jiri]
du lycée Carnot de Dijon avec 56 points sur 60.**

Niveau IV (terminales (spécialité mathématiques ou option « mathématiques complémentaires »))

**L'équipe : [CHENDEA Théophile – PITA Mathis – THOMAS Mathias – TILLIER Lisa]
du lycée Julien Wittmer de Charolles avec 46 points sur 60.**

Nous déclarons meilleure « équipe » du rallye 2022

**DROUYNOT Titouan – GEBAUER Jiri
du lycée Carnot de Dijon**

Secondes (générales, technologiques et professionnelles), premières générales (non spécialité mathématiques), terminales générales (élèves n'ayant pas suivi d'enseignement mathématique depuis la 2^{nde})

1	BREUILLET Anaïs	CARDOT Yannis	RELAVE Anatole	DE WARREN Théandre	Lycée Carnot
2	GIERCZAK-GALLE Tristan	KOBEISSI Haïdar	REGNAUD Matthieu	TARNAUD Emilien	Lycée Charles de Gaulle
3	LÉVÊQUE Quentin	PIERRE Eliott	BONDOUX Constance		Lycée Carnot
4	FONTAINE Solange	BRANLY Baptiste	ORNETTI Céleste		Lycée Saint Joseph - La Salle
5	DURAND Antonin	KARAFI Ilyès	GRUOT Augustin	PIEL Titouan	Lycée Le Castel
6	CALMÈS Suzanne	THIÉRY Naomie	LOUET Marine	FAIVRE-DUBOZ Maud	Lycée Eiffel
7	WEGIEL Nolan	GROSJEAN Thibault			Lycée Eiffel
8	POURNIN Mathys	JOUBERT Ayline	JOTHIE Erina	DELEGUE Jules	Lycée Eiffel
9	MALOT Lilian	SPOHR Camille	STATI-DANTIGNY Kais	FLECHARD Emma	Lycée Henri Parriat
10	BEL Lucas	BOUVET Nathan	MALLER Yann	NEDELJKOVIC Wikola	Lycée Eiffel
11	DEVILLERS Lubin	GRZESKOWIAK Noé	ROUX Théo		Lycée Eiffel
12	PETIT Isaac	PIEGAY Martin	MAMADOU Nabil	MARTIN Tiago	Lycée Montchapet
13	MASSÉ Lou	THIERRY Marine	GOEURIOT Elice		Lycée Montchapet
14	VAST Zélie	GUIDON Lubin	GODARD Arthur	DUVERNET Clément	Lycée Saint Joseph - La Salle

Premières et terminales technologiques

1	MENCONI Mathis	MARCINIAK Mahée	DUMONT Benjamin	SIMONIN Lisa	Lycée Alain Colas
---	----------------	-----------------	-----------------	--------------	-------------------

Premières générales (spécialité mathématiques) et terminales générales (élèves n'ayant suivi la spécialité mathématiques qu'en première)

1	DROUYNOT Titouan	GEBAUER Jiri			Lycée Carnot
2	ROUANET Colin	GARRÉTA Louis	FUMEX Théotine	SALAHUB Éleonore	Lycée Stephen Liégeard
3	LUCARAIN Bertille	SIGNORET Lila	ROBIN Alexandre		Lycée Charles de Gaulle

Terminales (spécialité mathématiques ou option « mathématiques complémentaires »)

1	CHENDEA Théophile	PITA Mathis	THOMAS Mathias	TILLIER Lisa	Lycée Julien Wittmer
2	BOURGEOIS Mia	CREHANGE Tom	LEBONNOIS Simon	WILHELM Kiara	Lycée Charles de Gaulle
3	MEUNIER Thomas	SUJAT Samuel	PLUMET Félicien		Lycée Eiffel
4	CHANDIOUX Salomé	THOMPSON Émile	DUSZYNSKI Laszlo	DE POORTERE Martin	Lycée Romain Rolland
5	HITIER Philémon	FURLANETTO Camille			Lycée du Parc des Chaumes
6	ACHOTTE Justine	LORIOT Ambre	BIJELIC Nikola	VASSARD Célian	Lycée Anna Judic
7	MAYOT Mélanie	MEMBRÉ Luc	ERNOULT Thomas		Lycée du Parc des Chaumes

Élèves cités, non récompensés

Secondes (générales, technologiques et professionnelles), premières générales (non spécialité mathématiques), terminales générales (élèves n'ayant pas suivi d'enseignement mathématique depuis la 2^{nde})

BASTAROVA Veronika	MARTIN-ROUSSEAU Océane	ROBAULT Emma	RIDOLFI-BODINI Paolino	Lycée Carnot
YOHON Mohamed-Ayad	FRASCOTA Tom	ABDELKHALIK Amina	AIT FARES Amina	Lycée Eiffel
BOUAMER Bilal	FERNANDES Théo	CHAUDAGNE Paul	MOGINOT Sébastien	Lycée Niepce - Balleure
GAUZELIN Ulysse	STOLTZ Jolan	MASSON Yohan	MARTINEZ Benjamin	Lycée Eiffel
PRADO Mattéo	BORNOT Méline	BRISSAC Kelia		Lycée Stephen Liégeard
GÉRARD Amandine	GAUTIER--BONNEAU Florène	VIGOT Aurane		Lycée Jacques Amyot
CIMATI Raphaël	BAUDE Rachel-Enora	MOSSOYAN Emma	BOUTIER Victorine	Lycée Anna Judic
DODIN Thomas	PELLEGRINO Antonin	PRANDI Enzo		Lycée Jacques Amyot
BISSEY Nathan	ROBIN Axel			Lycée Stephen Liégeard
DEPINOY Léane	RAPPENEAU Théophile	DE OLIVEIRA Périne		Lycée Anna Judic
OUDARD Yanis	LAVERLOCHERE Aymeric	VREL Hugo		Lycée Eiffel
DEVOIZE Chloé	ROUSSEAU Jade	MERARD Maxime		Lycée Jacques Amyot

Premières et terminales technologiques

AGBE Uriel	MOUILLAT Romain	ROUCOU Eve		Lycée Alain Colas
STERLE Chloé	GOURDET Émeline			Lycée Alain Colas

Premières générales (spécialité mathématiques) et terminales générales (élèves n'ayant suivi la spécialité mathématiques qu'en première)

DELPLANQUE Paul	BENNARDO Gael	CARRY Kilian	BOURDIAU Pierre	Lycée Niepce - Balleure
NOLY Julie	EVERHART Brigitte			Lycée Julien Wittmer
PONGE Pénélope	KEGREISZ Cosima	VENANT Hugo		Lycée Romain Rolland
VERRIER Loan	WALESZCZAK Célia	MORETTI Raphaël	WIDERA David	Lycée Henri Parriat

Terminales (spécialité mathématiques ou option « mathématiques complémentaires »)

HEURTAUX Raphaël	SILVESTRE SIAZ Léa	RENAUD Margaux	GUETIERE Anthonin	Lycée Eiffel
BORRION Tristan	TISSIER Antoine	BAPTISTA Andréa		Lycée Charles de Gaulle
TRILLO William	BERTIN Lisa	DUTAUD Lukas		Lycée Eiffel
RENÉ Simon	VALLET Baptiste	BELIN Anoki	MEYER-OLRY Loïc	Lycée Notre Dame - Nevers
MATHIEU Arthur	POÇAS Yonni			Lycée Stephen Liégeois
THIANT Gabriel	RAZNIEWSKI Samuel	LEFEBVRE Axel	ROUBY Margaux	Lycée Alain Colas
CHAUCHOT Nathan	CAHAGNE Jacinthe	VICHOT Loann		Lycée Charles de Gaulle
GÉRARD Paul	CLAUZEL Antoine	COLSON Maël		Lycée Carnot

6. LE CORRIGÉ

Exercice 1 : KAKURO

Il s'agit de remplir le carré ci-contre en mettant un chiffre de 1 à 9 par case de manière à respecter les sommes en lignes et en colonnes qui sont indiquées dans la marge. Attention, les 4 chiffres qui sont situés dans une même ligne ou une même colonne doivent être différents. Ainsi écrire $9 + 6 + 9 + 4 = 28$ est interdit dans la première ligne.

				28
				26
				18
				12
29	26	18	11	

Solution :

8	9	6	5	28
7	8	9	2	26
9	5	1	3	18
5	4	2	1	12
29	26	18	11	

Indications :

$$28 = 4 \times 7 \text{ et } 29 = 4 \times 7 + 1$$

$$29 = 7 + 7 + 7 + 7 + 1 = 7 + 2 + 7 - 2 + 7 + 8 = 9 + 5 + 7 + 8$$

et la décomposition est unique.

$$12 = 4 \times 3 \text{ et } 11 = 4 \times 3 - 1$$

$$11 = 3 + 3 + 3 + 3 - 1 = 3 + 2 + 3 - 2 + 3 + 2 = 5 + 1 + 3 + 2$$

et la décomposition est unique.

$$28 = 7 + 8 + 9 + 4 = 5 + 6 + 8 + 9 \text{ et}$$

$$12 = 1 + 2 + 3 + 6 = 1 + 2 + 4 + 5$$

Avec les décompositions de 29 et 11, cela impose les deux « 5 » dans chaque coin et de choisir

$$28 = 5 + 6 + 8 + 9 \text{ et } 12 = 1 + 2 + 4 + 5$$

....

Exercice 2 : DES CHIFFRES ET DES LETTRES

On invente un mot géant en accolant les lettres utilisées pour écrire la suite des nombres :
undeux-trois-quatre-cinq-six-sept...seize-dix-sept-dix-huit...vingt-et-un...

Quelle est la 2022^{ème} lettre de ce mot ?

Attention : le mot vingt prend un « s » uniquement pour le nombre 80 (*quatrevingts*).

Solution :

De 1 à 9 : 36 lettres

De 10 à 19 : 58 lettres

De 20 à 29 : on compte dix fois le mot « vingt » le « et » de 21 et les mêmes lettres que de 1 à 9 soit
 $10 \times 5 + 2 + 36 = 88$

Soit 88 lettres.

On fait de même de 30 à 69 et on trouve 462 lettres.

De 70 à 79 : on compte dix fois le mot « soixante » le « et » de 71 et les mêmes lettres que de 10 à 19 soit :

$$10 \times 8 + 2 + 58 = 140$$

De 80 à 89 : On compte dix fois le mot « quatre-vingt » les « s » de 80 et le même nombre de lettres que de 1 à 9 soit :

$$10 \times 11 + 1 + 36 = 147$$

De 90 à 99 on compte 168 lettres.

Conclusion de 1 à 99, nous avons 1099 lettres.

A partir de 100, par dizaine, on rajoute 40 (10 fois le mot « cent ») à chaque totaux déjà trouvés.

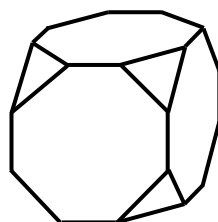
On compte 2023 lettres de 1 à 169.

La 2022^{ième} lettre de ce mot est donc le « u » du neuf de 169.

Exercice 3 : CUBE TRONQUÉ

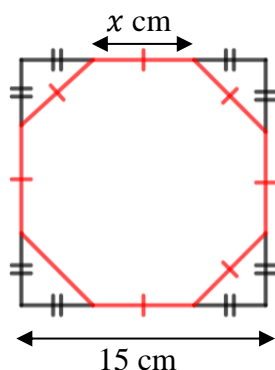
Un cube de côté 15 cm est tronqué aux 8 coins. Les 36 arêtes de ce cube tronqué sont égales.

Le récipient ainsi obtenu peut-il contenir 3 litres ?



Solution :

Notons x la longueur d'une arête du cube tronqué.



Dans le carré de 15 cm de côté, d'après le théorème de Pythagore, x vérifie $0 \leq x \leq 15$ et :

$$x^2 = 2 \times \left(\frac{15-x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}(15-x)^2 \Leftrightarrow x = \frac{15-x}{\sqrt{2}} \text{ (comme } x \text{ et } 15-x \text{ sont positifs)}$$

$$\text{Soit } x = 15\sqrt{2} - 15.$$

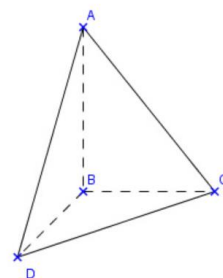
Le Volume V du récipient est la différence entre le volume du cube initial et les 8 tétraèdres ôtés.

Les tétraèdres sont de hauteur $AB = \frac{15-x}{2}$ et de base un triangle rectangle

isocèle de côté $BC = BD = \frac{15-x}{2}$.

$$V = 15^3 - 8 \times \left(\frac{15-x}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} \times \frac{15-x}{2} \times \frac{1}{3} \cong 3261 \text{ cm}^3 \text{ Soit environ } 3,261 \text{ L.}$$

Le cube tronqué peut contenir 3 L.



Exercice 4 : LA SUITE IMPARFAITE

On écrit les entiers à la suite les uns des autres, mais sans les carrés (1, 4, 9...) et les cubes (1, 8, 27...) :
2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 ; 15 ; 17 ; ...

Quel est le 2022^{ème} terme de cette suite ?

Solution :

Si on écrivait les entiers à la suite des uns des autres de 1 jusqu'à 2022, ce dernier serait naturellement le 2022^{ème} terme de la suite. On doit déterminer le nombre de carrés et de cubes présents dans cette suite qui sont à enlever afin de savoir de combien de rangs on doit se « décaler » après 2022.

Les carrés parfaits inférieurs à 2022 sont au nombre de 44 : 1, 4, 9, 16, ..., 1849, 1936.

Les carrés suivants sont 2025 et 2116.

Les cubes parfaits inférieurs à 2022 sont au nombre de 12 : 1, 8, 27, ..., 1331, 1728.

Le cube suivant est 2197.

Parmi les 12 cubes précédents, 3 nombres sont également des carrés : 1, 64 et 729.

On doit donc enlever $44 + 12 - 3 = 53$ nombres.

Or, en se « décalant vers la droite » 2025 sera aussi concerné et il faudra également l'enlever.

Finalement le 2022^{ème} terme de la suite sera $2022 + 54 = 2076$.

Exercice 5 : PERMUTATIONS

L'entier N est un nombre dont les trois chiffres sont distincts.

En permutant ces trois chiffres, on peut écrire cinq autres nombres, dont la somme est égale à 2022.

Que vaut N ?

Solution 1 :

L'entier $N = abc$ se décompose en $N = 100a + 10b + c$, où $a \neq 0$.

En permutant les trois chiffres de N , on peut en déduire l'égalité : $(100a + 10c + b) + (100b + 10a + c) + (100b + 10c + a) + (100c + 10a + b) + (100c + 10b + a) = 200$ d'où en simplifiant : $122a + 212b + 221c = 2022$. (E)

Pour des raisons de parité, il faut obligatoirement que c soit pair : $c = 0, 2, 4, 6$ ou 8 .

- Supposons $c = 0$, soit l'égalité $61a + 106b = 1011$: a doit être obligatoirement impair. Les différentes valeurs impaires de a conduisent à b non entier. Par conséquent, $c \neq 0$.
- Supposons $c = 2$, soit l'égalité $61a + 106b = 790$: $a \neq 0$ doit être obligatoirement pair. Les différents tests sur a conduisent à une seule solution : $a = 6, b = 4$.
- On recommence avec $c = 4, c = 6, c = 8$ qui ne mènent à aucune solution.

En conclusion, ce problème admet une seule solution : $N = 642$.

Solution 2 : cet exercice se programme très facilement (en Python par exemple), à l'aide de l'équation (E) précédente. Il est à noter que quelques équipes l'ont résolu ainsi.

```
for a in range (9) :
    for b in range (10) :
        for c in range (10) :
            if 122*a+212*b+221*c==2022 :
                print(a,b,c)
```

Exercice 6 : VITESSE LIMITÉE

André, Bernard et Claude ont fait le même trajet en voiture, pendant le même temps.

Toutefois, chacun a fait une pause plus ou moins longue :

- André a roulé 3 fois plus de temps que Bernard ne s'est arrêté.
 - Bernard a roulé 4 fois plus de temps que Claude ne s'est arrêté.
 - Claude a roulé 5 fois plus de temps qu'André ne s'est arrêté.
- Ils comparent leur vitesse moyenne (sans compter les pauses) : elle est de 100 pour le peintre et de 102 pour le poète.
Trouver la vitesse du mathématicien, arrondie à l'entier, et son prénom.

Solution :

Notons T le temps de trajet commun aux trois automobilistes.

Notons T_A (resp. T_B , resp. T_C) le temps de route d'André (resp. Bernard, resp. Claude) et x_A (resp. x_B , resp. x_C) le temps de pause d'André (resp. Bernard, resp. Claude).

D'après l'énoncé on a :

$$\begin{aligned} T &= T_A + x_A = T_B + x_B = T_C + x_C \\ T_A &= 3x_B \\ T_B &= 4x_C \\ T_C &= 5x_A \end{aligned}$$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} T = x_A + 3x_B \\ T = x_B + 4x_C \\ T = 5x_A + x_C \end{cases}$$

Après résolution on a $x_A = \frac{10}{61}T$; $x_B = \frac{17}{61}T$ et $x_C = \frac{11}{61}T$.

Notons D la distance parcourue et v_A (resp. v_B , resp. v_C) la vitesse d'André (resp. Bernard, resp. Claude).

On a :

$$\begin{aligned} v_A &= \frac{D}{T - x_A} = \frac{61}{51} \times \frac{D}{T} \\ v_B &= \frac{D}{T - x_B} = \frac{61}{44} \times \frac{D}{T} \\ v_C &= \frac{D}{T - x_C} = \frac{61}{50} \times \frac{D}{T} \end{aligned}$$

On a donc $v_B > v_C > v_A$.

L'hypothèse $v_C = 100$ et $v_B = 102$ donne deux valeurs différentes pour $\frac{D}{T}$. Impossible.

On a donc : $v_A = 100$, $v_C = 102$ ce qui donne $\frac{D}{T} = \frac{5100}{61}$.

D'où $v_B = \frac{61}{44} \times \frac{5100}{61} \cong 116$.

Le mathématicien s'appelle **Bernard** et sa vitesse était de **116 km/h**.

Exercice 7 : JURASSIK PARK

Deux voraceptors mâles ne peuvent pas cohabiter, à moins d'être éloignés d'au minimum 16 m.

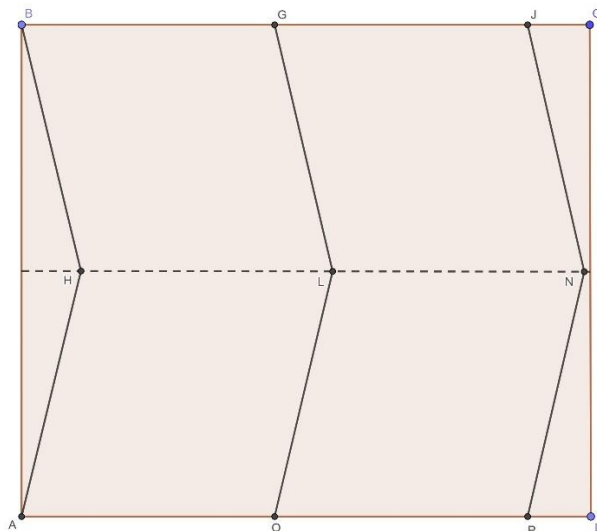
Quel est le nombre maximal de voraceptors mâles qui peuvent cohabiter dans un enclos rectangulaire de $31 \times 36 \text{ m}^2$?

Solution :

On peut montrer qu'il ne peut y avoir 10 voraceptors dans cet enclos en le divisant en 9 rectangles (de dimensions 12 sur $\frac{31}{3}$) et en prouvant qu'un rectangle ne peut en contenir deux.

En effet, la diagonale d'un de ces rectangles a pour longueur $\sqrt{\left(\frac{31}{3}\right)^2 + 12^2} \cong 15,84 < 16$.

Enfin, on peut trouver une configuration où 9 voraceptors cohabitent :



$$BG = GJ = BH = GL = JN = HL = LN = AH = OL = PN = AO = OP = 16.$$

Le segment de gauche en pointillés d'extrémité H mesure $\sqrt{16^2 - 15,5^2} \cong 3,97 < 4$ donc Le point N est bien à l'intérieur de l'enclos.

En conclusion, 9 vorceptors au maximum peuvent cohabiter dans cet enclos.

Exercice 8 : LE SURVIVANT

Des nombres sont inscrits sur un grand tableau blanc.

Je débute le jeu dont les règles sont les suivantes :

1. je choisis deux de ces nombres au hasard, notés a et b ;
 2. je les efface tous les deux du tableau ;
 3. je remplace un des deux emplacements libres par le nombre $a + b + 1$;
 4. je recommence les étapes 1 à 3 jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul nombre écrit, appelé survivant.
- Quel est le survivant du tableau dont les nombres inscrits au départ sont les entiers de 1 à 2022 ?

Solution :

Dans ce genre d'exercices, il est toujours préférable de faire des essais avec moins de nombres afin de comprendre le fonctionnement et de conjecturer le résultat. Soit $n \geq 2$ et notons a_i (pour i variant de 2 à n) les nombres écrits au tableau. On peut justifier (par récurrence par exemple) que le survivant, qui ne dépend d'ailleurs pas de l'ordre dans lequel on choisit les nombres car l'addition est commutative, est la somme des nombres a_i auquel on ajoute $n - 1$ (car on ajoute 1 à chacune des $n - 1$ étapes menant au survivant).

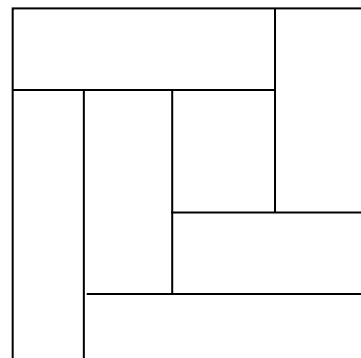
Dans notre cas, le survivant est donc :

$$(1 + 2 + \dots + 2021 + 2022) + 2021 = \frac{2022 \times (2022 + 1)}{2} + 2021 = \mathbf{2\ 047\ 274}.$$

Exercice 9 : LA LA LA L'AIRE

Le carré ci-contre a été partagé en sept rectangles qui ont tous le même périmètre de 300 m.

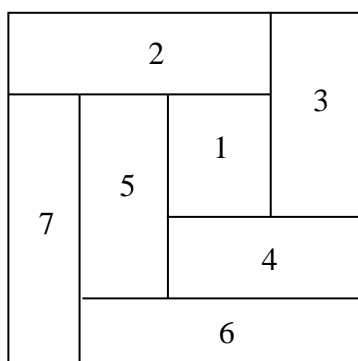
Combien mesure le côté du carré ?



Solution :

Numérotons de 1 à 7 les rectangles composant le carré initial.

Par convention, notons en premier la dimension « horizontale » de chaque rectangle et en second, sa dimension « verticale ».



Le rectangle 1 a pour dimensions : x et $150 - x$.

Le rectangle 2 a pour dimensions : $150 - y$ et y .

Le rectangle 3 a pour dimensions : $x - y$ et $150 - x + y$.

Le rectangle 4 a pour dimensions : $2x - y$ et $150 - 2x + y$.

Le rectangle 5 a pour dimensions : $-150 + 3x - y$ et $300 - 3x + y$.

Le rectangle 6 a pour dimensions : $-150 + 5x - 2y$ et $300 - 5x + 2y$.

Le rectangle 7 a pour dimensions :

- $150 - y - (-150 + 4x - y) = 300 - 4x$ en utilisant les dimensions « horizontales » des rectangles 2, 5 et 1.
- Côté du carré initial $-y = (150 - y) + (x - y) - y = 150 + x - 3y$.

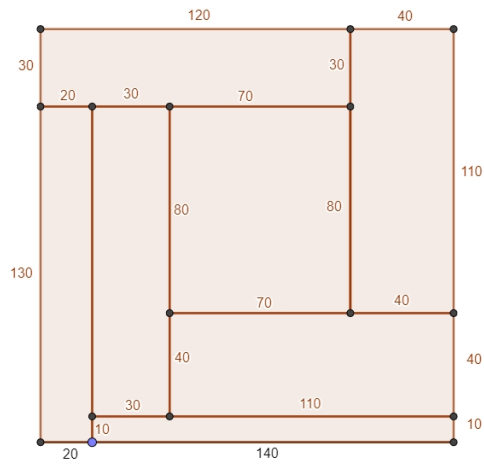
Il ne reste plus qu'à établir un système linéaire de deux équations avec les deux inconnues x et y .

- Les dimensions « horizontale » et « verticale » du carré initial sont égales, d'où :
 $(150 - y) + (x - y) = (150 - x + y) + (150 - 2x + y) + (300 - 5x + 2y) \Leftrightarrow 3x - 2y = 150$.
- La somme des dimensions du rectangle 7 est égale à 150, d'où :
 $(300 - 4x) + (150 + x - 3y) = 150 \Leftrightarrow x + y = 100$.

La résolution du système $\begin{cases} 3x - 2y = 150 \\ x + y = 100 \end{cases}$ conduit à $x = 70$ m et $y = 30$ m.

Donnons ci-contre les dimensions des rectangles.

Finalement, le carré initial a pour côté 160 m.



7. Quelques extraits (remarquables) de copies

La suite imparfaite

- Équipe de 1^{ère} spécialité du lycée Carnot, Drouynot Titouan et Gebauer Jiri

```
list = []
for i in range(2500):
    list.append(i+1)
    # Cette boucle a pour fonction la création d'une liste d'entier
    # de 1 à 2500, on va jusqu'à 2500 pour que le 2022ème nombre existe
    # toujours lorsque l'on va supprimer les carrés et les cubes.
for i in range(50):
    list.remove((i+1)**2)
    # Cette boucle a pour fonction de supprimer dans la liste les
    # 50 premiers carrés (50 car il y a 50 carrés entre 1 et 2500).
for i in range(13):
    if (i+1)**3 in list:
        list.remove((i+1)**3)
    # Cette boucle a pour fonction la supprimer dans la liste les
    # 13 premiers cubes (13 car il y a 13 cubes entre 1 et 2500),
    # mais avant de supprimer les cubes il faut vérifier qu'ils
    # existent encore dans la liste car il existe des doublons
    # dans les carrés et les cubes.
print(list[2021])
# Pour finir, le programme écrit le 2022ème nombre de la liste
# (le 2022ème nombre d'une liste à pour index 2021 car une liste
# commence à l'index 0).
```

- Équipe de Terminale spécialité du lycée Julien Wittmer, Chendea Théophile, Pita Mathis, Thomas Mathias et Tillier Lisa

```
suite = [] (3)
carres = [] (1)
cubes = [] (2)

for i in range(1,10000): (1)
    carres.append(i**2)

for i in range(1,10000): (2)
    cubes.append(i**3)

for i in range(1,10000):
    if i not in carres and i not in cubes: (3)
        suite.append(i)

print(suite[2021]) (4)
```

module1

Console Python

```
>>>
*** Console de processus distant Réinitialisée
>>>
2076 (5)
>>>
```


Vitesse limitée

- Équipe de Terminale spécialité du lycée Charles de Gaulle, Bourgeois Mia, Créhange Tom, Kiara Wilhem et Lebonnois Simon

Exercice 3

Soyent: TAR: le temps qu'André a passé à rouler;
TAP son temps de pause.
TBR - le temps que Bernard a passé à rouler;
TBP son temps de pause
TCR le temps que Claude a passé à rouler;
TCP son temps de pause.

D'après l'énoncé, on a alors:

$$\begin{aligned} \text{TAR} &= 3\text{TBP} \\ \text{TBR} &= 4\text{TCP} \\ \text{TCR} &= 5\text{TAP} \end{aligned}$$

mais aussi $\text{TAR} = 1 - \text{TAP}$
 $\text{TBR} = 1 - \text{TBP}$
 $\text{TCR} = 1 - \text{TCP}$

ce 1 est le temps total du trajet.

on a donc:

$$\begin{cases} \text{TAR} + \text{TAP} = 1 \\ \text{TBR} + \text{TBP} = 1 \\ \text{TCR} + \text{TCP} = 1 \\ \text{TAR} - 3\text{TBP} = 0 \\ \text{TBR} - 4\text{TCP} = 0 \\ \text{TCR} - 5\text{TAP} = 0 \end{cases}$$

qu'on peut traduire en calcul matriciel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{TAP} \\ \text{TAR} \\ \text{TBP} \\ \text{TBR} \\ \text{TCP} \\ \text{TCR} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \text{TAP} \\ \text{TAR} \\ \text{TBP} \\ \text{TBR} \\ \text{TCP} \\ \text{TCR} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous permet de trouver:

$$\begin{aligned} \text{TAP} &= \frac{10}{61} & \text{et} & \text{TAR} = \frac{51}{61} \\ \text{TBP} &= \frac{17}{61} & & \text{TBR} = \frac{44}{61} \\ \text{TCP} &= \frac{11}{61} & & \text{TCR} = \frac{50}{61} \end{aligned}$$

Afin de déterminer leur vitesse, on cherche la distance qu'ils ont parcouru:
 $t \rightarrow v$ d

(puisque on sait qu'ils ont tous parcouru la même distance)
 $v = \frac{d}{t}$ donc $d = v \times t$

Avec une vitesse de 100, André aurait parcouru $d = 100 \times T_{AR} = 100 \times \frac{51}{61} = 84$

Bernard aurait parcouru $d = 100 \times T_{BR} = 100 \times \frac{44}{61} = 72$

Claude aurait parcouru $d = 100 \times T_{CR} = 100 \times \frac{50}{61} = 82$.

Avec une vitesse de 102, André parcourt $d = 102 \times T_{AR} = 85$

Bernard parcourt $d = 102 \times T_{BR} = 74$.

Claude parcourt $d = 102 \times T_{CR} = 84$.

André roulant à 100 et Claude roulant à 102 parcourent la même distance de 84 - c'est donc également la distance parcourue par Bernard.

On peut donc en déduire que:

- André est le peintre
- Claude est le poète
- Bernard est le mathématicien, et sa vitesse est $v = \frac{d}{T_{BR}} = \frac{84}{\frac{44}{61}} = 117$.

- Équipe de Terminale spécialité du lycée Julien Wittmer, Chendea Théophile, Pita Mathis, Thomas Mathias et Tillier Lisa

Pour cet exercice, les automobiles parcourent la même distance pour le même temps, ainsi nous pouvons dire que $T=1$ et $d=1$

A l'aide de l'énoncé, on trouve le système suivant:

$$\begin{cases} T=1 = P_C + 5P_A \\ T=1 = P_B + 4P_C \\ T=1 = P_A + 3P_B \end{cases}$$

Nous cherchons alors à résoudre ce système à l'aide d'une matrice:

On cherche les temps de pause de chacun noté P

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_A \\ P_B \\ P_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P_A \\ P_B \\ P_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} P_A \\ P_B \\ P_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{61} \\ \frac{17}{61} \\ \frac{11}{61} \end{pmatrix}$$

On sait cependant que la vitesse s'écrit $v = \frac{d}{t}$

Sachant que nous utilisons l'unité de distance $d=1$, nous avons besoin de connaître leur temps passé à rouler.

On sait grâce à l'énoncé que

$$T_{\text{passé à rouler André}} = 3 \times P_B = 3 \times \frac{17}{61} = \frac{51}{61}$$

$$T_{P_B} = 4 \times P_C = 4 \times \frac{11}{61} = \frac{44}{61}$$

$$T_{P_C} = 5 \times P_A = 5 \times \frac{10}{61} = \frac{50}{61}$$

On obtient des mesures du temps passé à rouler dans l'unité unitaire que nous utilisons.

$$V_A = \frac{d}{T_{P_A}} = \frac{1}{\frac{51}{61}} = \frac{61}{51}$$

$$V_B = \frac{d}{T_{P_B}} = \frac{1}{\frac{50}{61}} = \frac{61}{50}$$

$$V_C = \frac{d}{T_{P_C}} = \frac{1}{\frac{44}{61}} = \frac{61}{44}$$

On obtient ainsi les vitesses en unité fictive. On peut cependant observer un lien de proportionnalité avec les vitesses de l'énoncé.

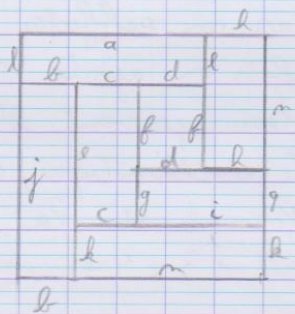
$\times \frac{5200}{61}$	$\frac{61}{51}$	$\frac{61}{50}$	$\frac{61}{44}$	v. unitaire
	200	202	x	v. réel

$$\text{donc } x = \frac{61}{44} \times \frac{5200}{61} = 115,9 \text{ arrondi à } 116.$$

Ainsi pour association grâce au tableau de proportionnalité, on peut en déduire que Claude roule à 202 unité de vitesse (bananes? oranges?), André roule à 200 et Bernard à 116.

Donc Claude est poète, André est peintre et Bernard est mathématicien.

Exercice 6 :



Sur la représentation de la figure ci-contre on donne une lettre à chaque coté. De plus, on définit que la longueur du côté du carré est x .

Par lecture de cette figure on peut déduire les équations suivantes :

$$2a + 2l = 300$$

$$a = b + c + d$$

$$2b + 2j = 300$$

$$f = e + h$$

$$2e + 2c = 300$$

$$x = b + g$$

$$2m + 2h = 300$$

$$m = i + c$$

$$2g + 2i = 300$$

$$i = d + h$$

$$2f + 2d = 300$$

$$m = l + f$$

$$2m + 2h = 300$$

$$x = a + h$$

$$x = m + g + h$$

$$x = j + l$$

On manipulant ces équation on peut faire disparaître certain inconnue:

$$2a + 2l = 300$$
$$2(b+c+d) + 2l = 300$$

$$2b + 2f = 300$$
$$2b + 2(e+h) = 300$$
$$2b + 2(f+g+h) = 300$$

$$2e + 2c = 300$$
$$2(f+g) + 2c = 300$$

$$2m + 2k = 300$$
$$2(i+c) + 2k = 300$$
$$2(d+h+c) + 2k = 300$$

$$2g + 2i = 300$$
$$2g + 2(d+h) = 300$$

$$2f + 2d = 300$$

$$2m + 2k = 300$$
$$2(i+c) + 2k = 300$$
$$2(d+h+c) + 2k = 300$$
$$2d + 2k + 2c + 2k = 300$$
$$2d + 4k + 2c = 300$$

$$x = a + h$$
$$b+c+d+h-x=0$$

$$x = m + g + h$$
$$l+f+g+h-x=0$$

$$x = j + l$$
$$f+g+h+l-x=0$$

On trouve donc 10 équations avec 9 inconnus ce qui est un système d'équation soluble à l'aide d'une calculatrice ti-83.

On trouve donc $x = 150$.

Les côtés du carré mesurent 150 m



Université de Bourgogne - U.F.R. Sciences et Techniques - IREM –
9, avenue Savary - B.P. 47 870 - 21078 DIJON cedex
☎ 03 80 39 52 30 - Télécopie 03 80 39 52 39
e-mail "iremsecr@u-bourgogne.fr"
<http://irem.u-bourgogne.fr/>