RALLYE MATHÉMATIQUE

DE BOURGOGNE 2025

stairs-6351902_1920, de Anaterate (Pixabay.com)

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Faculté Sciences Mirande - B.P. 47 870 - 21078 DIJON cedex
☎ 03 80 39 52 30 - Télécopie 03 80 39 52 39
e-mail "iremsecr@u-bourgogne.fr" – http://irem.u-bourgogne.fr

Hasard du calendrier ? En cette année 2025, le « Rallye Mathématique » des collèges et lycées de Bourgogne se tiendra à Dijon en même temps que le « Congrès annuel » de la Société Mathématique de France (SMF), organisé par l'Institut de Mathématiques de Bourgogne (IMB) du 2 au 6 juin 2025. Ainsi, le jeudi 5 juin 2025, la Faculté des Sciences & Techniques de Dijon accueillera, d'une part, les collégien.ne.s et lycéen.ne.s réuni.e.s pour la finale du Rallye et, d'autre part, des mathématicien.ne.s profesionnel.le.s venu.e.s assister au Congrès.

Cette coïncidence n'est certainement pas un ***alea*** : les dates n'ont pas été tirées aux dés ! Elles résultent bel et bien d'une volonté délibérée de la part des organisateurs/organisatrices de ces deux évènements de faire en sorte que les deux « populations » se rencontrent, et qu'elles échangent autour d'une passion commune : les mathématiques ! Notamment, les élèves pourront participer à des ateliers, animés par des intervenant.e.s du Congrès : des rencontres qui s'annoncent très enrichissantes tant pour les participant.e.s que pour les animateurs/animatrices de ces ateliers.

Comme chaque année, l'IMB est fier d'apporter son soutien indéfectible aux actions remarquables de l'IREM, et tout particulièrement au « Rallye Mathématique », qui est une véritable célébration de notre discipline. Au nom de l'IMB, je tiens donc à exprimer, avec une profonde reconnaissance, mes plus vifs remerciements à l'ensemble de l'équipe organisatrice : bravo pour la qualité des énoncés concoctés avec soin, pour la rigueur des corrections, et pour toute la logistique déployée avec brio. Pour conclure, je souhaiterais aussi saluer chaleureusement les élèves qui se sont prêté.e.s au jeu avec enthousiasme : un immense bravo à toutes et à tous, et plus encore aux lauréat.e.s !

Gwénaël MASSUYEAU,

Directeur de l'IMB.

Le Rallye mathématique des lycées de Bourgogne, organisé par l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM) de Dijon, est depuis de nombreuses années un événement incontournable pour les élèves bourguignons passionnés de mathématiques.

Pour les élèves, enseignants ou accompagnateurs, qui ne ratent jamais l'occasion de participer aux Rallyes, j'espère que la 43ème édition de la remise des prix du Rallye, qui aura lieu en parallèle du congrès de la Société Mathématique de France (SMF), sera pleine de surprises pour ces habitués !

Les lauréats auront la chance de rencontrer de nombreuses oratrices et de nombreux orateurs du congrès de la SMF qui ont accepté d'animer, avec enthousiasme, des ateliers mathématiques. Ces mathématiciennes et mathématiciens influents travaillent sur des thématiques variées comme la géométrie algébrique, l'optimisation, la probabilité, la physique mathématique, la théorie des groupes, la statistique, etc. Les organisatrices et organisateurs du Rallye sont persuadés que ces ateliers seront ludiques et mettront en valeur la richesse et le dynamisme des mathématiques. Ces conférencières et conférenciers, issus de toute la France, seront également épaulés par de nombreux membres locaux de l'Institut de Mathématique de Bourgogne (IMB) qui auront à cœur de prouver que l'IMB s'engage pour la diffusion des mathématiques auprès des jeunes.

Les organisatrices et organisateurs tiennent à féliciter tous les élèves ayant participé au Rallye cette année. Je tiens à remercier vivement Marie Wagner, Anthony Osswald et Florian Plastre qui, depuis de nombreuses années, préparent les énoncés et assurent la correction des copies. Sans ce travail très précieux, l'organisation d'un tel événement ne pourrait pas avoir lieu ; je vous suis donc infiniment reconnaissant. Je remercie chaleureusement Céline Daubigney ! Étant en copie des messages qu'elle reçoit, je mesure le travail administratif pharaonique qu'elle effectue pour l'organisation du Rallye et son rôle indispensable pour IREM. J'ai donc une immense reconnaissance pour le travail de Céline qui est crucial pour notre institut. Enfin, je tiens à remercier mon prédécesseur, Frédéric Métin, pour son engagement indéfectible durant sept ans pour le rayonnement de l'IREM.

Patrick TARDIVEL, directeur de l'IREM de Dijon

PS : J'ai débuté mon mandat de directeur de l'IREM en $2025 = 1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3 = (1+2+3+4+5+6+7+8+9)^2$ et je souhaite arrêter cette fonction avant la prochaine année pour laquelle, comme en 2025, la somme des premiers cubes est égale au carré de la somme des premiers entiers.

Le rallye mathématique : une célébration de l'intelligence collective et de l'engagement pédagogique

Le rallye mathématique des lycées se révèle, année après année, être un temps fort de l'année scolaire pour nos élèves. Cette manifestation, qui réunit les lycéennes et lycéens autour de la résolution d'énigmes mathématiques originales et stimulantes, illustre parfaitement la richesse que peuvent aussi offrir les mathématiques en dehors du cadre habituel de la classe.

Ce rallye n'est pas une compétition au sens classique du terme, c'est avant tout une aventure collective, où les élèves coopèrent pour résoudre ensemble une série de problèmes qui mobilisent à la fois la logique, la créativité, la rigueur et l'esprit d'équipe.

Les épreuves sont conçues avec grand soin et renouvelées chaque année par une équipe passionnée de l'IREM de Dijon. Un grand merci à Marie Wagner, Florian Plastre et Anthony Osswald pour leur engagement dans la conception de sujets dont la qualité et l'originalité sont toujours au rendez-vous !

L'organisation d'un événement d'une telle ampleur ne saurait exister sans le concours des enseignants de mathématiques qui, dans chaque établissement, savent transmettre à leurs élèves l'intérêt pour notre discipline. Leur travail en amont, leur mobilisation le jour du rallye, ainsi que leur implication dans la valorisation des mathématiques témoignent d'un profond attachement à leur mission d'enseignement.

Mais ce sont avant tout les élèves qui donnent, à ce rallye, tout son sens. Leur participation, leur curiosité et leur implication active méritent d'être saluées. En acceptant de se confronter à des problèmes parfois déconcertants, en s'investissant pleinement dans une démarche collaborative, expérimentale et de recherche de résolution de problèmes, ils démontrent que les mathématiques sont, non seulement un domaine de connaissances, mais aussi un espace de jeu, de plaisir et de dépassement de soi.

Enfin, le rallye mathématique n'existerait pas sans l'engagement et le dynamisme de l'IREM et de son directeur, Patrick Tardivel, qui permettent, à cette belle initiative, de perdurer et de rayonner à l'échelle académique.

Le rallye mathématique des lycées est une démonstration vivante de ce que les mathématiques peuvent offrir : un terrain fertile pour la coopération, la réflexion et la réussite collective. Que tous les élèves ayant participé à ce concours soient chaleureusement félicités pour leur contribution à cette belle aventure mathématique.

Et vive les mathématiques !

Frédéric LEMASSON, IA-IPR de mathématiques

Qu'il nous manquait, Gaston ! Il faut dire qu'on n'entend parler de lui qu'une seule fois par an, ou parfois même moins souvent, lors du Rallye mathématique des Lycées, alors dans l'intervalle on se demande ce qu'il devient. Cela faisait cinq ans qu'il n'avait pas donné de nouvelles, alors vous pensez bien que nous fêtons son retour. Mais au fait : savez-vous vraiment qui est Gaston ?

Depuis qu'il intervient dans le Rallye comme acteur principal de certains énoncés, de nombreux participants se sont posé la question de son existence réelle, et dans le cas où celle-ci aurait été confirmée, de sa biographie détaillée.

Sans en dire trop, afin de ne pas trahir les auteurs de sujet qui sont les seuls à connaître le 06 de Gaston, nous pouvons chercher quelques réponses dans cette fameuse psychonumérologie dont nous avons le secret.

Souvenez-vous qu'en 2024, une manipulation de style numérologique nous avait permis de traquer le palindrome 2442 en concaténant l'année du siècle et le numéro du Rallye. Il nous suffit d'appliquer le même procédé pour obtenir 2543. Et que se passait-il il y a 2543 ans, le savez-vous ? Selon Mordicus d'Athènes, c'est précisément en -518 (calendrier actuel) que Pythagore aurait découvert la démonstration du fameux théorème qui porte son nom ! Il y a donc un lien direct entre notre Gaston et le grand Philosophe antique, vous vous en doutiez ?

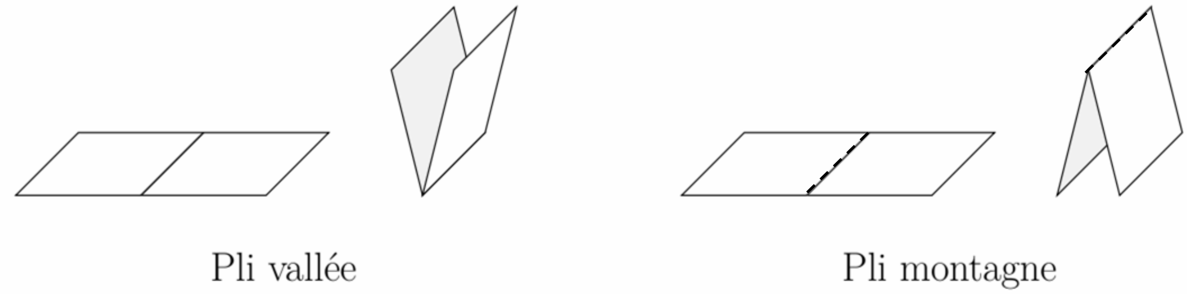
Finalement, ces fumeuses explications, non garanties par l'équipe, ne pourront sans doute pas jeter d'ombre sur le formidable travail collaboratif de Gaston avec nos trois auteurices, dont le talent et l'enthousiasme ne se dément jamais. Bravo, l'équipe !

Frédéric Métin, ancien directeur de l'IREM
et toujours admirateur de la créativité des auteurices du Rallye.

1. ÉNONCÉS 2025

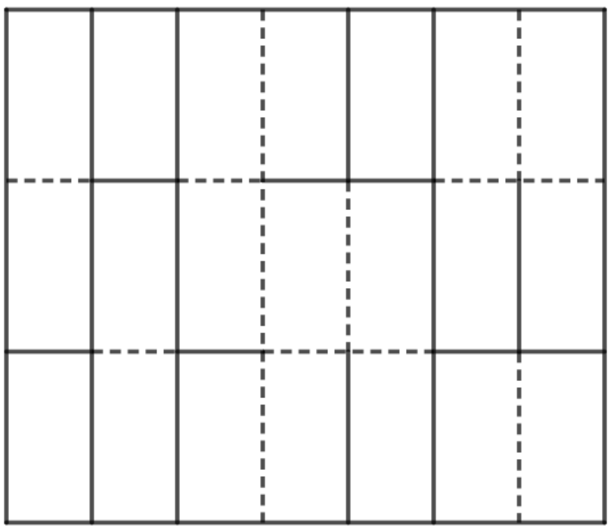
<u>Exercice 1</u> : ÇA NE FAIT PAS UN PLI

Un modèle d'origami indique où faire les plis sur sa feuille de papier et dans quel ordre.
Un trait marquant l'endroit d'un pli peut être plié de deux façons, que l'on appelle « pli vallée » et « pli montagne ».



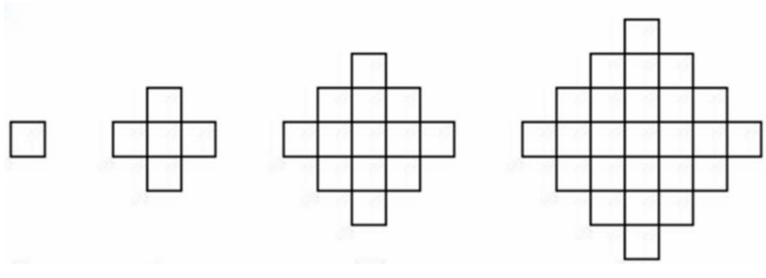
Les plis vallée sont marqués en continu, les plis montagne en pointillé.

Le pliage suivant est-il réalisable ? Si oui, rendre un exemplaire ; sinon expliquer pourquoi on ne peut pas le réaliser.



<u>Exercice 2</u> : DES PETITS CARRÉS

Le premier motif est constitué d'un petit carré, le deuxième de 5 petits carrés et le troisième de 13 petits carrés.
Pour construire ces trois premiers motifs, 19 petits carrés ont été nécessaires ($1 + 5 + 13 = 19$).
Combien de petits carrés seraient nécessaires pour construire les 100 premiers motifs ?



<u>Exercice 3</u> : IDENTITÉ REMARQUABLE

Les nombres 2025 et 494209 sont particuliers. Observez plutôt :

$$(\mathbf{20} + \mathbf{25})^2 = 45^2 = \mathbf{2025} \text{ et } (\mathbf{494} + \mathbf{209})^2 = 703^2 = \mathbf{494209}$$

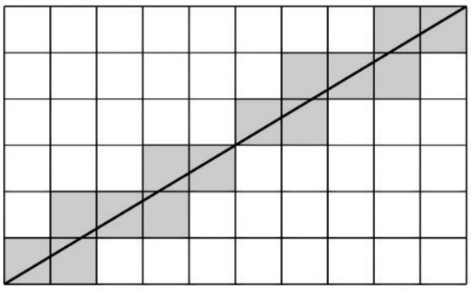
Déterminer tous les nombres à quatre chiffres et tous les nombres à six chiffres possédant cette propriété.

<u>Exercice 4</u> : LES TROIS PARCELLES

Un jardin carré est partagé en trois rectangles de périmètres respectifs 50, 100 et 150 m.
Quelle est l'aire de ce jardin ?

<u>Exercice 5</u> : LA DIAGONALE

Dans la grille rectangulaire 6×10 suivante, on a grisé les carrés traversés par la diagonale.



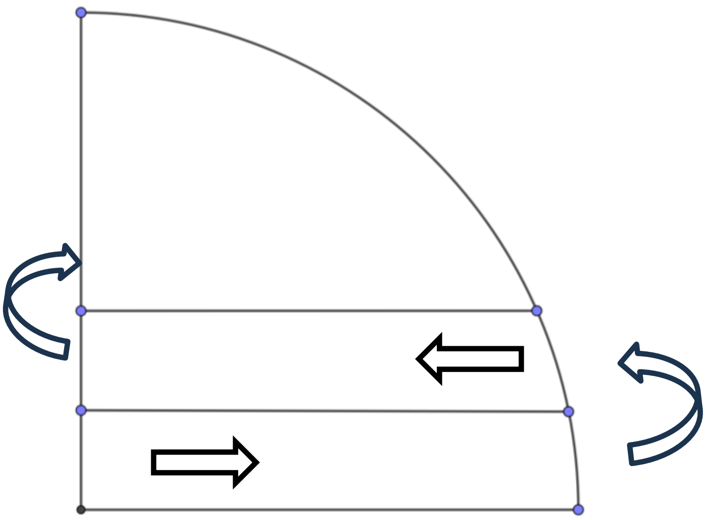
Combien de carrés seraient grisés, suivant le même principe, dans une grille rectangulaire 891×1215 ?

<u>Exercice 6</u> : TROIS, DEUX, UN, MONTEZ !

Vous ne pouvez monter les marches d'un escalier qu'une par une, deux par deux, ou trois par trois (règle de montée).
Par exemple : un escalier à 10 marches peut être monté en commençant par une marche, une autre marche, puis deux d'un coup, puis trois d'un coup, puis deux d'un coup, puis la dernière pour finir, puisque $1 + 1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 10$.
Une autre façon de le monter pourrait être : une marche, puis trois d'un coup, à trois reprises $(1 + 3 + 3 + 3 = 10)$.
Quel est le nombre de marches d'un escalier, sachant que si on ne lui en ajoutait qu'une, il y aurait presque un milliard de façons différentes supplémentaires de le monter en respectant la règle ?

<u>Exercice 7</u> : GASTON TOND

Gaston doit tondre sa parcelle de pelouse, bordée par une allée goudronnée. Cette parcelle a la forme d'un quart de disque de rayon 50 m. Gaston tond par bandes de 50 cm (c'est la largeur de coupe de sa tondeuse), comme indiqué ci-dessous (*la figure n'est pas du tout à l'échelle…*).



Quelle est, au mètre près, la distance minimale parcourue par Gaston ?
On ne tiendra pas compte des pas nécessaires aux demi-tours entre chaque bande.

<u>Exercice 8</u> : DE A À Z

Un pion part de A pour arriver en Z en sautant d'un nombre à un nombre voisin (horizontalement ou verticalement).

Comment obtenir 2025, en additionnant tous les nombres du chemin, en un minimum de sauts ?

Départ	**A**	**1**	**2**	**3**	**4**		
		5	**6**	**7**	**8**		
		9	**10**	**11**	**12**		
		13	**14**	**15**	**16**	**Z**	Arrivée

<u>Exercice 9</u> : QUEL CIRQUE !

Un clown fait six fois le tour de la piste circulaire d'un cirque sur un petit vélo dont les roues ont le même rayon, et dont les centres des roues sont distants de 50 cm.

Alors que sa roue avant a fait 100 tours sur elle-même, sa roue arrière n'en a fait que 99.

Quel est, au mm près, le rayon d'une roue ?

Solutions succinctes

Exercice	Solution
1. Ça ne fait pas un pli	Le pliage est réalisable.
2. Des petits carrés	$666\,700$ petits carrés sont nécessaires.
3. Identité remarquable	$3025 = (30 + 25)^2$; $9801 = (98 + 01)^2$; $998001 = (998 + 001)^2$.
4. Les trois parcelles	L'aire du jardin est 2025 m².
5. La diagonale	2025 carrés grisés.
6. Trois, deux, un, montez !	L'escalier comporte 35 marches.
7. Gaston tond	Environ 3951 m.
8. De A à Z	Aller de A à Z requiert un minimum de 136 sauts.
9. Quel cirque !	Le rayon d'une roue est d'environ $21{,}3$ cm.

2. LA PARTICIPATION

Le **43**ème Rallye mathématique de Bourgogne des lycées s'est déroulé le mercredi 29 janvier 2025.

Il a concerné :

28 lycées **183 équipes** **587 participants**.

Pour la troisième année consécutive, le **lycée international Jean Mermoz d'Abidjan** a participé au Rallye avec 21 candidats de 2nde et Première. À noter que ce lycée a son propre classement.

Voici l'évolution de la participation des **lycées bourguignons** ces sept dernières années :

Année	**Côte d'Or**	**Nièvre**	**Saône et Loire**	**Yonne**	**Total des participants**
2019	319	133	166	43	**661**
2020	304	45	273	65	**687**
2021	104	30	43	26	**203** (année COVID)
2022	264	85	28	40	**417**
2023	280	45	51	102	**478**
2024	395	30	104	110	**639**
2025	303	29	151	83	**566**

Les effectifs par lycée et par niveau sont récapitulés ci-après.
Niveau I : secondes (générales, technologiques et professionnelles), premières générales (non spécialité « mathématiques »), terminales générales (élèves n'ayant pas suivi d'enseignement mathématique depuis la 2nde)
Niveau II : premières et terminales technologiques, premières et terminales professionnelles
Niveau III : premières générales (spécialité « mathématiques ») et terminales générales (élèves ayant suivi la spécialité « mathématiques » uniquement en première)
Niveau IV : terminales (spécialité « mathématiques » ou option « mathématiques complémentaires »)

	Nombre d'équipes				Nombre de candidats			
Niveau	I	II	III	IV	I	II	III	IV
21 - Lycée Anna Judic	1	0	2	1	2	0	6	3
21 - Lycée Carnot	3	0	1	5	11	0	4	19
21 - Lycée Charles de Gaulle	8	0	7	7	26	0	22	25
21 - Lycée Clos Maire	0	0	1	0	0	0	4	0
21 - Lycée E. J. Marey	2	0	1	3	6	0	3	12
21 - Lycée Eugène Guillaume	1	0	0	0	4	0	0	0
21 - Lycée Eiffel	9	0	2	6	27	0	7	21
21 - Lycée Henry Moisand	0	2	0	0	0	5	0	0
21 - Lycée Jean-Marc Boivin	3	0	0	1	10	0	0	4
21 - Lycée Le Castel	2	0	1	0	5	0	1	0
21 - Lycée Montchapet	0	0	1	2	0	0	4	7
21 - Lycée Saint Joseph - La Salle, Dijon	7	0	0	0	25	0	0	0
21 - Lycée Saint-Cœur, Beaune	1	0	0	1	1	0	0	4
21 - Lycée Stephen Liégeard	6	0	3	1	21	0	12	2
58 - Lycée Maurice Genevoix	1	0	1	2	2	0	2	6
58 - Lycée Notre-Dame, Nevers	0	0	0	2	0	0	0	5
58 - Lycée Romain Rolland	2	0	1	2	5	0	4	5
71 - Lycée Camille Claudel	2	3	4	2	6	9	13	8
71 - Lycée Henri Parriat	4	0	2	1	13	0	7	4
71 - Lycée La Prat's	1	0	2	2	1	0	7	3
71 - Lycée militaire d'Autun	4	0	0	0	12	0	0	0
71 - Lycée Niepce Balleure	3	5	3	4	7	18	8	11
71 - Lycée Pontus de Tyard	5	0	2	1	14	0	6	4
89 - Lycée Chevalier d'Éon	1	0	1	4	1	0	3	15
89 - Lycée Jacques Amyot	4	0	3	4	12	0	12	16
89 - Lycée Louis Davier	1	0	3	2	2	0	11	8
89 - Lycée du Parc des Chaumes	0	0	0	1	0	0	0	3
99 - Lycée Français International d'Abidjan	3	0	4	0	9	0	12	0
Total	74	10	45	54	222	32	148	185

3. L'ORGANISATION

L'IREM (Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques), dépendant de l'Université de Bourgogne, est l'organisateur du rallye.

Le financement est assuré par le congrès de la SMF, le CNRS, l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public), l'IREM et le Rectorat.

L'élaboration des sujets et la correction des copies sont assurées dans le cadre de l'IREM par : Anthony OSSWALD, Florian PLASTRE et Marie WAGNER.

Quatre autres personnes ont participé au choix définitif des sujets : Laurent BANDERIER, Thomas BUREL, Frédéric LEMASSON, Maurice NUSSBAUM. Nous les remercions vivement pour leurs cobayages éclairés.

Il faut remercier tout spécialement :
Madame Mathilde GOLLETY, Rectrice de l'Académie de Dijon, Mesdames et Messieurs les Chefs d'Établissement, Adjoints et CPE, qui ont autorisé et permis la mise en place du Rallye.

Francis CORTADO, William EXERTIER et Frédéric LEMASSON, IA-IPR de mathématiques, pour leur soutien au Rallye des lycées.
Patrick TARDIVEL, Directeur de l'IREM, qui a succédé à Frédéric MÉTIN.

Tous les professeurs qui ont bénévolement assuré l'organisation matérielle du Rallye dans leur établissement et la surveillance de l'épreuve.

Céline DAUBIGNEY, qui est responsable à l'IREM de la "logistique" du Rallye et de la publication de cette brochure.

Tous ceux qui ont bien voulu chercher les problèmes posés et nous faire part de leurs idées, par courrier, par la presse régionale ou par Internet.

Et bien évidemment les 587 candidats qui ont travaillé durement…

4. LA RÉUSSITE

Exercice	Nombre d'équipes ayant abordé le problème	Proportion d'équipes ayant abordé le problème	Proportion d'équipes ayant donné la bonne réponse
1. Ça ne fait pas un pli	77	74,8%	48,1%
2. Des petits carrés	99	96,1%	62,6%
3. Identité remarquable	75	72,8%	18,7%
4. Les trois parcelles	183	89,7%	15,3%
5. La diagonale	146	71,6%	31,5%
6. Trois, deux, un, montez !	175	85,8%	60,6%
7. Gaston tond	74	73,3%	64,9%
8. De A à Z	91	90,1%	54,9%
9. Quel cirque !	78	77,2%	51,3%

5. LE PALMARÈS

(Seules les équipes de moins de 5 élèves seront récompensées)

Les meilleures équipes sont :

Niveau I (secondes (générales, technologiques et professionnelles), premières générales (non spécialité « mathématiques »), terminales générales (élèves n'ayant pas suivi d'enseignement mathématique depuis la 2nde))

L'équipe : [BISOTTI Corentin, CARPENTIER Paul, ROUX Louis]
du lycée Saint Joseph – La Salle de Dijon avec 44 points sur 60.

Niveau II (premières et terminales technologiques ou professionnelles)

L'équipe : [CHEVROT Léonore, COLLARD Sarah, PELTIER Mélissa]
du lycée Henry Moisand de Longchamp avec 45 points sur 60.

Niveau III (premières générales (spécialité « mathématiques ») et terminales générales (élèves n'ayant suivi la spécialité « mathématiques » qu'en première))

L'équipe : [AYAT Mohamed Amine, BERSANI Antoine, FORGEARD Côme, GUILLIN Timothée]
du lycée Louis Davier de Joigny avec 43 points sur 60.

Niveau IV (terminales (spécialité « mathématiques » ou option « mathématiques complémentaires »))

L'équipe : [CLECH Étienne, GRACZYK Nathan, RAMILLON Martin]
du lycée Chevalier d'Éon de Tonnerre avec 50 points sur 60.

Nous déclarons meilleure « équipe » du rallye 2025

CLECH Étienne, GRACZYK Nathan, RAMILLON Martin
du lycée Chevalier d'Éon de Tonnerre

Secondes (générales, technologiques et professionnelles), premières générales (non spécialité « mathématiques »), terminales générales (élèves n'ayant pas suivi d'enseignement mathématique depuis la 2nde)

1	ROUX Louis	BISOTTI Corentin	CARPENTIER Paul		Saint Joseph - La Salle, Dijon
2	BAUDOIN Elian	MORAES Paul	MORTIER Alexandre		Stephen Liégeard, Brochon
3	WHITE Nathan	MARC Adrien	BELHACHE Mathis		Saint Joseph - La Salle, Dijon
4	BERNARD Louis	OLANDA Léo	LYOTARD Lucas	CADET Chloé	Saint Joseph - La Salle, Dijon
5	WILHELM Til	KASTNER Louis	BADRI Hamza	MICHEA Paul	Charles de Gaulle, Dijon
6	MARTHE-ROSE Nolan	MBAREK Firas			Jean-Marc Boivin, Dijon
7	ESTUBIER Alice	MARTEL Camille	REFFAS Malik		Saint Joseph - La Salle, Dijon
8	MORGAND Calie	BONIN Axelle	PRAQUIN Agathe	RICHER Agathe	Stephen Liégeard, Brochon
9	GEBEL Amaury	GAUME Valentin	ROBERT Emilia	FORGET Hugo	Charles de Gaulle, Dijon
10	GAUTHIER Clément	COLAS CASTELLUCIA Quentin	DA SILVA PAIN Anthony	LAMOTTE ESTORGUES Albin	E.J. Marey, Beaune
11	FERREIRA SILVA Noah	JUMILLY BIECHLER Gabin			E.J. Marey, Beaune
11	CALON Gwendal	PIETROWICZ Maxime	ECHAIRI Yanis	VAN KEMPEN Achille	Stephen Liégeard, Brochon
13	VENOT Margot	ASSILA Naoura	MONTBARBON Marion	PATRICOT Lorraine	Carnot, Dijon
13	RAIMONDI Léo	GOTTE Tilian	MINY Thibaud	MELIN Julian	Gustave Eiffel, Dijon
15	ROSSIGNOL Coralie	VAUGELADE Nino	VEYRET Flora		Stephen Liégeard, Brochon

Premières et terminales technologiques ou professionnelles

1	COLLARD Sarah	CHEVROT Léonore	PELTIER Mélissa		Henry Moisand, Longchamp
2	DEQUINCEY Théodore	AUDOIN Aurèle			Henry Moisand, Longchamp

Premières générales (spécialité « mathématiques ») et terminales générales (élèves n'ayant suivi la spécialité « mathématiques » qu'en première)

1	BERSANI Antoine	FORGEARD Côme	AYAT Mohamed Amine	GUILLIN Timothée	Louis Davier, Joigny
2	CHATELET Edouard	BONVIN Jeanne	DAVID--CLERC Justin	BERTRAND Lino	Pontus de Tyard, Châlon
3	GILLIG Gauthier	BRENOT-FRANCOIS Ninon	FEBVRE-BONIN Thomas	SIGWALT Eloi	Carnot, Dijon
4	GUERARD EM Cléa	LARRIVÉE Matthieu	DESPLANTES Marie	LEMAITRE Fleur	Anna Judic, Semur-en-Auxois
5	MOUSSAULT Gaëtan	BORGNAT Samuel	DELBOS Paul	TULOUP Florane	Jacques Amyot, Auxerre
6	POEY Léonie	BAVOUZET Elise	LIVACHE Elisa	SU Illis	Louis Davier, Joigny
7	DESCHAMPS-SEVELINGE Léo	SEEGERS Luc	MÉRIGOT Rémi		La Prat's, Cluny

Terminales (spécialité « mathématiques » ou option « mathématiques complémentaires »)

1	RAMILLON Martin	CLECH Etienne	GRACZYK Nathan		Chevalier d'Éon, Tonnerre
2	COSTE Roméo	NAUDET Antoine	ROGER MAUGAIN Charlotte	VIEUX Jérémy	Montchapet, Dijon
3	DIDIER Charline	FRIKH Selma	BEN SDIRA Amira	CHBANI Sylène	Pontus de Tyard, Châlon
4	FUENTES Sofiane	HAGHEBAERT Florian	CHEVAILLER Lélian	GIBOIN Renaud	Louis Davier, Joigny
5	DIN Ha Miên	HICHAMI Kenza	JUPRELLE Camille	RINGEVAL Laëtitia	Charles de Gaulle, Dijon
6	DOIZON Maxence	SIBILLE Hortense	VERCHERE--RECHAUSSAT Eden		Charles de Gaulle, Dijon
7	VENOY GAGNEUX Gabriel	LAURENT Louis	LIN Clément	GRAND Thomas	Carnot, Dijon
8	BASSIER Aurélien	MAZZOUJI Shayd	BUSSIERE Corentin	URSIN ALLIX Robinson	Gustave Eiffel, Dijon
9	CHERET Adam	GHAZARYAN Aren	NOEL Aymeric		Carnot, Dijon
10	GERNELLE Célestine	GUYOT Augustin	LEVENEZ-PERILLAUD Charly	JOUSSEAU Honorine	Clos Maire, Beaune

Élèves cités, non récompensés

Secondes (générales, technologiques et professionnelles), premières générales (non spécialité « mathématiques »), terminales générales (élèves n'ayant pas suivi d'enseignement mathématique depuis la 2nde)

AMGOUN Anoua	SABIK Hamza	PARIS Martin		Gustave Eiffel, Dijon
PÈRE Bastien	LANIER Julio	ATOUI Souleyman	DEMMER Clément	Jean-Marc Boivin, Dijon
MAGNIEN Jules	LHUILLIER Aline	BELCOURT Alix	NOVO Tony	Charles de Gaulle, Dijon
CHARREYRE Arthur	SIMON Erwan	LIABAUD Aaron		Gustave Eiffel, Dijon
CHASLE Nicolas	FICHOT Nicolas	COSTE Mathéo	MERCIER Louis	Camille Claudel, Digoin
STECZYCKI Maël	CUZEAU NICVERT Lucas	FINOT Rémy	PATTE Charles	Eugène Guillaume, Montbard
GUIGUE Ninon	DUTREVE Mathis	GRONFIER Manon	ROUX Léane	Henri Parriat, Montceau-lès-Mines
COMBOT Guerric	LIVET Ethan	LIVET Florian	DEKOCKER Julien	Jacques Amyot, Auxerre
KOC Umut	LAPORTE Reimanie	RIHAHI Sahel		Le Castel, Dijon
CAMILLERI Gilles	CARON Camille			Louis Davier, Joigny
VILLAUME Martin	MASUYER Lancelot			Pontus de Tyard, Châlon

Premières et terminales technologiques ou professionnelles

BERAUD Camili	DAUVERGNE Hugo	VERSEUX Victor		Camille Claudel, Digoin
VOILLOT Sacha	GISNESTE Clara	PETIT Philéas		Camille Claudel, Digoin
MORIN Gabriel	DUPOND Warick	BARBIER Yan		Camille Claudel, Digoin
MOUSTOIFA Damys	SAIBENE Julien			Niepce Balleure, Chalon-sur-Saône

Premières générales (spécialité « mathématiques ») et terminales générales (élèves n'ayant suivi la spécialité « mathématiques » qu'en première)

MADÉ Raphaël	DEFONTAINE Anton	MARCOS Tiago		Louis Davier, Joigny
PAWLAK Grégoire	BOURGEOIS Baptiste	MARTIN Côme	BOURDON Thibault	Jacques Amyot, Auxerre
PEREIRA Lili	HERBILLON Aïko	FLUERAS Corina	CESCHIN-COTTÉ Damien	Jacques Amyot, Auxerre
QUAIN Lynna	THIRY Morgane	JUANEDA Jade	BILLAND Hannah	Montchapet, Dijon
BURTIN Antoine	BOZEK Clémence	CHEATSAZAN Afra	COLLIER Iris	Charles de Gaulle, Dijon
NAULIN Oscar	MARTIN COLOMER Maël	DESSEIGNE Tristan	SILLA Timéo	Camille Claudel, Digoin
SARTORIS Nino	PAQUIS Anton	URBAUER Roméo	CHABONNEAU David	Gustave Eiffel, Dijon

Terminales (spécialité « mathématiques » ou option « mathématiques complémentaires »)

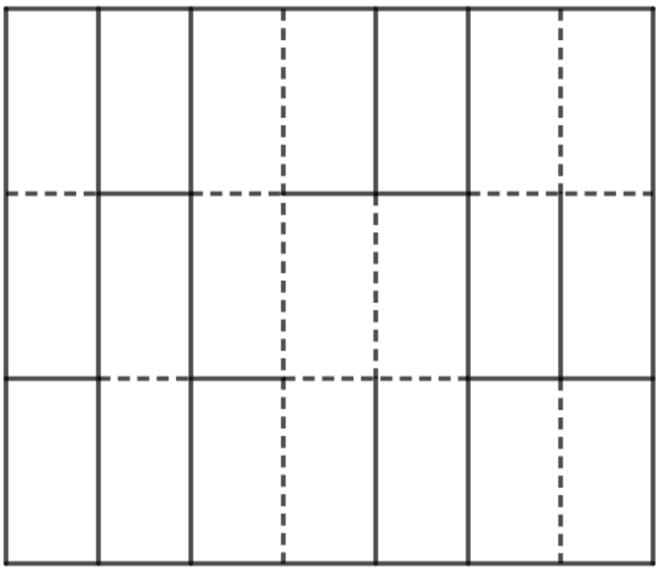
FRANCOIS MAUDINAS Nicolas	HARIT Youness	HELIOT Alexandre	GARRETTA Gabriel	Carnot, Dijon
TACCARD Alex	MOUHJAB Wahel	RIVOLLIER Léo	KOSINOVA Amalie	Carnot, Dijon
D'AIX Lucas	IBANEZ-ESTEBAN Anthony	PROST Raphaël	FAURE Mathéo	Henri Parriat, Montceau-lès-Mines
BOLL Lucas	GIBOULOT Amaël	HECKMANN Clémence	LETEUIL François	Saint-Cœur, Beaune
DODEY Émeline	DROST Chloé			Niepce Balleure, Chalon-sur-Saône
OPTASANU Augustin	COANDA Radu	AIT FARES Nabil	VESQUE Romain	Charles de Gaulle, Dijon
ROBIN Célian	MUNOZ Maylusine	GODIN Justine	PETRIGNET Otylie	Chevalier d'Éon, Tonnerre
VERJAT Martin	WOLFF Thomas			La Prat's, Cluny

6. LE CORRIGÉ

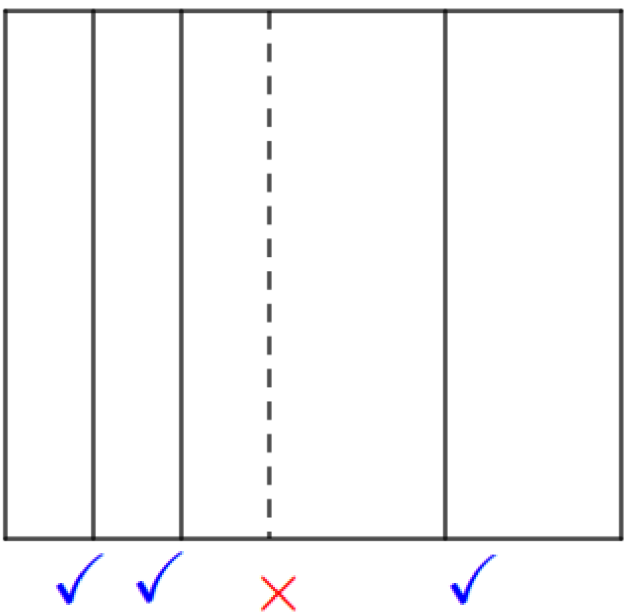
Exercice 1 : Ça ne fait pas un pli
Remarque préliminaire : chaque nouveau pli effectué donnera lieu à un pli « miroir » par rapport à chacun des plis déjà faits précédemment (où « miroir » signifie symétrique avec changement de code).
Voici un algorithme de pliage :

1. Repérer tous les plis ayant le même type (vallée ou montagne), ils sont tous dans le même sens.
2. Plier les plis d'un même type qui sont axes de symétrie « miroir ». (L'ordre ne compte pas).
3. On recommence avec les nouveaux plis du même type.

Dans notre exercice :



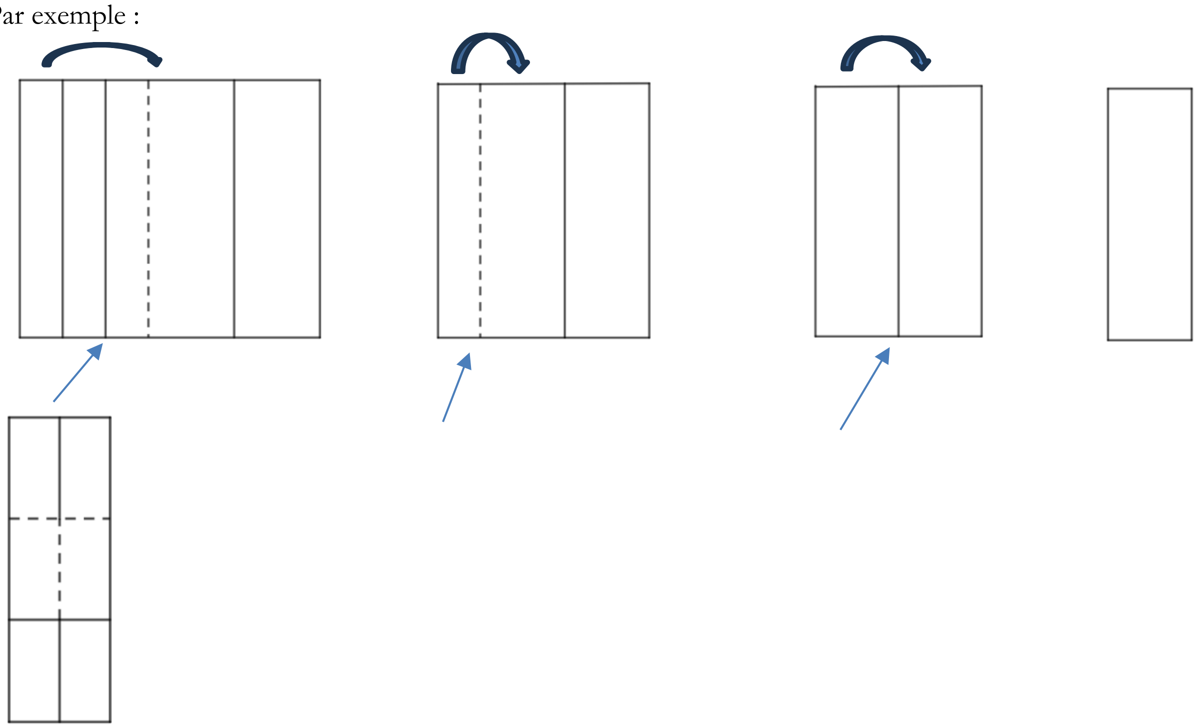
Les plis du même type sont :



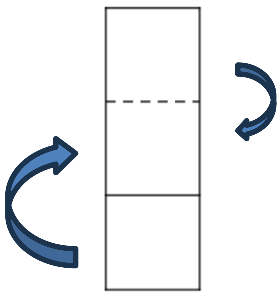
Ceux marqués sont « axes de symétrie », celui marqué ne l'est pas.

On peut commencer par plier ceux marqués d'un  (dans l'ordre que l'on veut). On peut plier le  dès qu'on a plié le deuxième  en partant de la gauche.

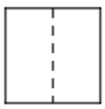
Par exemple :



On repère les plis monochromes, on les plie :

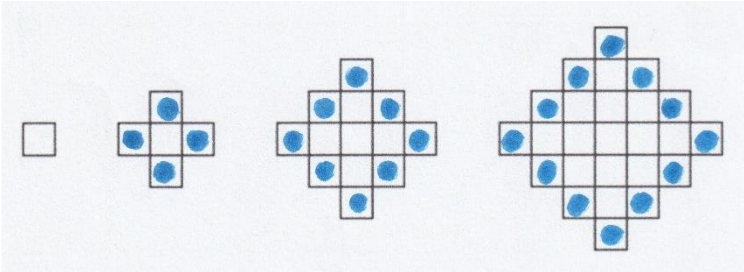


Il ne reste plus qu'à plier le dernier pli.

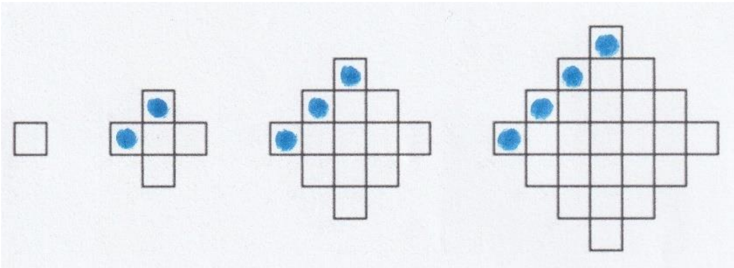


Exercice 2 : Des petits carrés

À chaque étape, on ajoute un certain nombre de petits carrés en périphérie, comme le montre la figure suivante :



À chaque étape, le nombre de carrés ajoutés augmente de 4. En effet, on ajoute à chaque étape un petit carré sur chaque diagonale périphérique, comme le montre la figure suivante :



Notons u_n le nombre de petits carrés à l'étape n. On a donc :
$u_1 = 1$; $u_2 = u_1 + 4 = 5$; $u_3 = u_2 + 8 = u_2 + 4 \times 2 = 13$; $u_4 = u_3 + 12 = u_3 + 4 \times 3 = 25$ que nous pouvons généraliser en $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + 4 \times n}$ où n est un entier naturel non nul.

Ainsi, après la 100ème étape, le nombre total de petits carrés est $u_1 + u_2 + \cdots + u_{100} = \sum_{i=1}^{100} u_i$.

En remplissant une feuille de calcul d'un tableur, on obtient :

Indice n	Un	Somme des Un
1	1	1
2	5	6
3	13	19
4	25	44
5	41	85
6	61	146

La centième ligne est :

100	19801	666700

La construction des 100 motifs nécessite donc **666700 petits carrés**.

On peut aussi résoudre ce problème sans tableur, avec les préliminaires suivants (démontrables en terminale) :
La somme des n premiers entiers naturels est : $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

La somme des carrés des n premiers entiers naturels est : $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Déterminons u_n en fonction de n :
$u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + (u_{n-2} - u_{n-3}) + \cdots + (u_2 - u_1) + u_1$
$u_n = 4(n-1) + 4(n-2) + 4(n-3) + \cdots + 4 + 1$
$$u_n = 4(1 + 2 + \cdots + (n-3) + (n-2) + (n-1)) + 1 = 4 \times \frac{(n-1)n}{2} + 1 = 2n^2 - 2n + 1$$

Ainsi, $\sum_{i=1}^{100} u_i = u_1 + u_2 + \cdots + u_{100} = \sum_{i=1}^{100} 2i^2 - 2i + \sum_{i=1}^{100} 1 = 2\sum_{i=1}^{100} i^2 - 2\sum_{i=1}^{100} i + 100$
$= 2 \times \frac{100 \times 101 \times 201}{2} - 2 \times \frac{100 \times 101}{2} + 1 = 676700 - 10100 + 100 = \mathbf{666700}$ **petits carrés**.

Voici maintenant le programme en Python proposé par l'équipe « ROSSIGNOL Coralie, VAUGELADE Nino et VEYRET Flora » en seconde au lycée Stephen Liégeard de Brochon :

```
carrés_ajoutés=0
carrés=1
total=1
for i in range (1,100):
   carrés_ajoutés=carrés_ajoutés+4
   carrés=carrés+carrés_ajoutés
   total=total+carrés
print("la figure ",i+1, " contient ",carrés, " carrés. Il faut ",total," carrés pour y arriver.")
```

<u>Exercice 3</u> : Identité remarquable

<u>Cas 1</u> : nombres à quatre chiffres.

On cherche deux nombres entiers a et b à deux chiffres tels que : $(a+b)^2 = 100a + b$. En développant la vraie identité remarquable de gauche et en transposant, on obtient l'équation $a^2 + a(2b - 100) + b^2 - b = 0$.

En fixant l'entier b, on peut résoudre cette équation du second degré d'inconnue a.

Son discriminant est $\Delta = (2b - 100)^2 - 4(b^2 - b) = 10000 - 396b$.

Ce discriminant est supérieur ou égal à 0 si et seulement si $b \leq \frac{10000}{396}$. Comme b est entier naturel, il est compris entre 0 et 25.

Les solutions de l'équation du second degré sont alors : $a_+ = \frac{100-2b+\sqrt{10000-396b}}{2}$ et $a_- = \frac{100-2b-\sqrt{10000-396b}}{2}$.

Il suffit ensuite de remplir une feuille de calcul d'un tableur pour déterminer les entiers a_+ et a_- pour b allant de 0 à 25. En voici un extrait :

b	a+	a-
0	100	0
1	**98**	**0**
2	95,97916214	0,02083786
3	93,93612681	0,06387319
…	…	…
23	41,93318452	12,0668155
24	37,13552873	14,8644713
25	**30**	**20**

<u>Conclusion</u> : les trois nombres à quatre chiffres sont **2025**, **3025** et **9801**.

<u>Cas 2</u> : nombres à six chiffres.

On cherche deux nombres entiers a et b à trois chiffres tels que : $(a+b)^2 = 1000a + b$. En développant la vraie identité remarquable de gauche et en transposant, on obtient l'équation $a^2 + a(2b - 1000) + b^2 - b = 0$.

En fixant l'entier b, on peut résoudre cette équation du second degré d'inconnue a.

Son discriminant est $\Delta = (2b - 1000)^2 - 4(b^2 - b) = 1000000 - 3996b$.

Ce discriminant est supérieur ou égal à 0 si et seulement si $b \leq \frac{1000000}{3996}$. Comme b est entier naturel, il est compris entre 0 et 250.

Les solutions de l'équation du second degré sont alors :

$a_+ = \frac{1000-2b+\sqrt{1000000-3996b}}{2}$ et $a_- = \frac{1000-2b-\sqrt{1000000-3996b}}{2}$.

Il suffit ensuite de remplir une feuille de calcul d'un tableur pour déterminer les entiers a_+ et a_- pour b allant de 0 à 25. En voici un extrait :

b	a+	a-
0	1000	0
1	**998**	**0**
…	…	…
3	993,993964	0,00603625
4	991,987903	0,01209692
207	500,862936	85,1370644
208	497,445857	86,5541434
209	**494**	**88**
…	…	…
248	299,413078	204,586922
249	286,341194	215,658806
250	265,811388	234,188612

Conclusion : les deux nombres à quatre chiffres sont **494209** et **98901**. 88209 n'a que cinq chiffres.

Remarque : cette méthode algébrique n'était pas attendue car la résolution générale d'équations du second degré n'est pas au programme de seconde. Il est à noter cependant que cette méthode a été abordée par l'équipe de 2nde1 « Kamaté Khalil et Vidal Gaël » du lycée militaire d'Autun. Bravo à tous les deux pour cette belle initiative et leurs connaissances. Les organisateurs attendaient plutôt une solution algorithmique et un programme en Python.

Proposons maintenant trois programmes en Python :

- Programme proposé par l'équipe « CHEVROT Léonore, COLLARD Sarah et PELTIER Mélissa » en 1èreSTD2A au lycée Henri Moisand de Longchamp :

```
for a in range(99):
    for b in range(99):
        if (a+b)**2==100*a+b:
            print(a,b)
for c in range(999):
    for d in range(999):
        if (c+d)**2==1000*c+d:
            print(c,d)
```

- Programme proposé par l'équipe « BADRI Hamza, KASTNER Louis, MICHEA Paul et WILHELM Til » en seconde au lycée Charles de Gaulle :

```
for i in range(1000,9999):
    a=str(i)
    a=int(a[:2])
    b=i-(100*a)
    if (a+b)**2==i:
        print(i)
for i in range(100000,999999):
    a=str(i)
    a=int(a[:3])
    b=i-(1000*a)
    if (a+b)**2==i:
        print(i)
```

- Programme probabiliste proposé par l'équipe « ESTUBIER Alice, MARTEL Camille et REFFAS Malik » en seconde au lycée Saint Joseph de Dijon :

```
from random import randint
for i in range(9000000):
    x=randint(10,99)    #x=randint(100,999) pour les nombres à six chiffres
    y=randint(1,99)     #y=randint(1,999) pour les nombres à six chiffres
    calcul=(x+y)**2
```

```
xLettre=str(x)
yLettre=str(y)
reponse=xLettre+yLettre
reponse2=int(reponse)
if calcul==reponse2:
    print(reponse2)
```

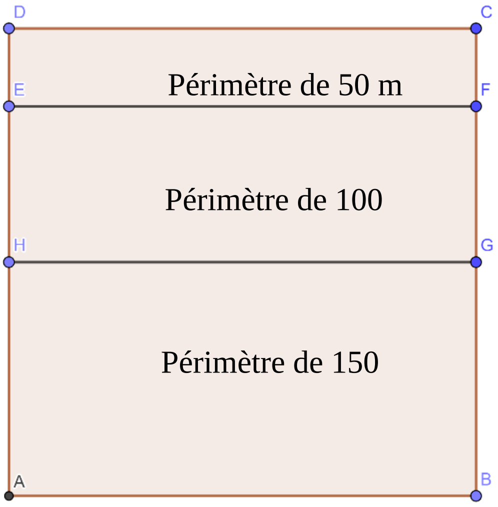
Remarque : ce programme très intéressant n'est pas complet car les entiers 9801 et 998001 n'apparaissent pas dans les réponses : les 0 n'apparaissent pas dans les chaines de caractères yLettre…

Exercice 4 : Les trois parcelles

Les trois parcelles peuvent être organisées de quatre façons différentes dans le jardin carré ABCD.

Situation 1 : les trois parcelles sont l'une après l'autre, quel que soit leur ordre.

Posons a le côté du jardin carré, $b = \text{CF}$, $c = \text{FG}$ et $d = \text{GB}$.



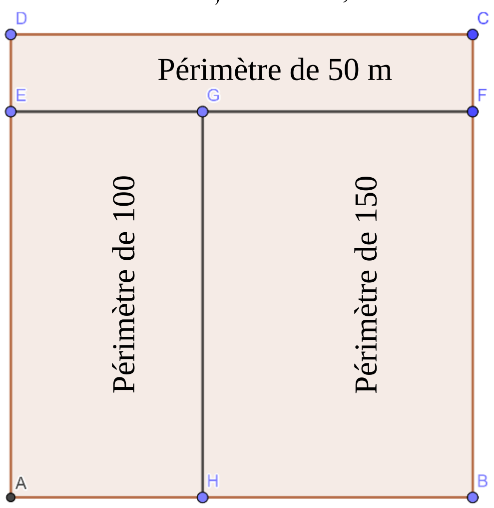
On peut alors écrire le système suivant : $\begin{cases} a+b=25 \\ a+c=50 \\ a+d=75 \\ b+c+d=a \end{cases}$

Par addition des trois premières équations, on en déduit l'équation $3a+b+c+d=150$, soit $4a=150$ d'où $a=37{,}5$.

Comme $a+b=25$, cette situation est donc **impossible**.

Situation 2 : la parcelle dont le périmètre est égal à 50 m est en haut (ou en bas) et les deux autres parcelles sont côte à côte sous celle-ci (ou au-dessus de celle-ci).

Posons a le côté du jardin carré, $b = \text{CF}$ et $c = \text{AH}$.



On peut alors écrire le système suivant : $\begin{cases} a+b=25 \\ c+a-b=50 \\ a-c+a-b=75 \end{cases}$

Par addition des deux premières équations : $2a+c=75$.

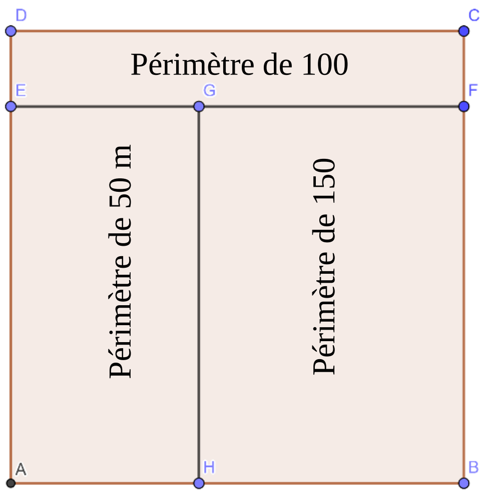
Par addition de la première et troisième équation : $3a-c=100$.

Par addition de ces deux dernières équations : $5a=175$ ce qui implique $a=35$.

Comme $a+b=25$, cette situation est donc **impossible**.

Situation 3 : la parcelle dont le périmètre est égal à 100 m est en haut (ou en bas) et les deux autres parcelles sont côte à côte sous celle-ci (ou au-dessus de celle-ci).

Posons a le côté du jardin carré, $b = \text{CF}$ et $c = \text{AH}$.

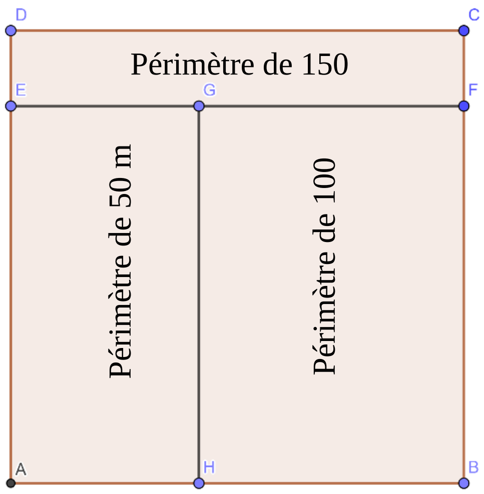


On peut alors écrire le système suivant : $\begin{cases} a+b=50 \\ c+a-b=25 \\ a-c+a-b=75 \end{cases}$

Par addition des deux premières équations : $2a+c=75$.
Par addition de la première et troisième équation : $3a-c=125$.

Par addition de ces deux dernières équations : $5a=200$ ce qui implique $a=40$.
Comme $a+b=50$, alors $b=10$ et $c=75-2a=-5$: cette situation est donc **impossible**.

<u>Situation 4</u> : la parcelle dont le périmètre est égal à 150 m est en haut (ou en bas) et les deux autres parcelles sont côte à côte sous celle-ci (ou au-dessus de celle-ci).
Posons a le côté du jardin carré, $b=\mathrm{CF}$ et $c=\mathrm{AH}$.



On peut alors écrire le système suivant : $\begin{cases} a+b=75 \\ c+a-b=25 \\ a-c+a-b=50 \end{cases}$

Par addition des deux premières équations : $2a+c=100$.
Par addition de la première et troisième équation : $3a-c=125$.

Par addition de ces deux dernières équations : $5a=225$ ce qui implique $a=45$. On en déduit alors $b=30$ et $c=10$.

Cette situation est la seule possible et l'aire du jardin carré est donc égale à $45^2=\mathbf{2025}$.

Voici maintenant un programme en Python proposé par l'équipe « CATHERINE Louise, GLIBI Walid, HOUËL Joseph et HOUËL Maximilien-Marie » en terminale au lycée Jacques Amyot :

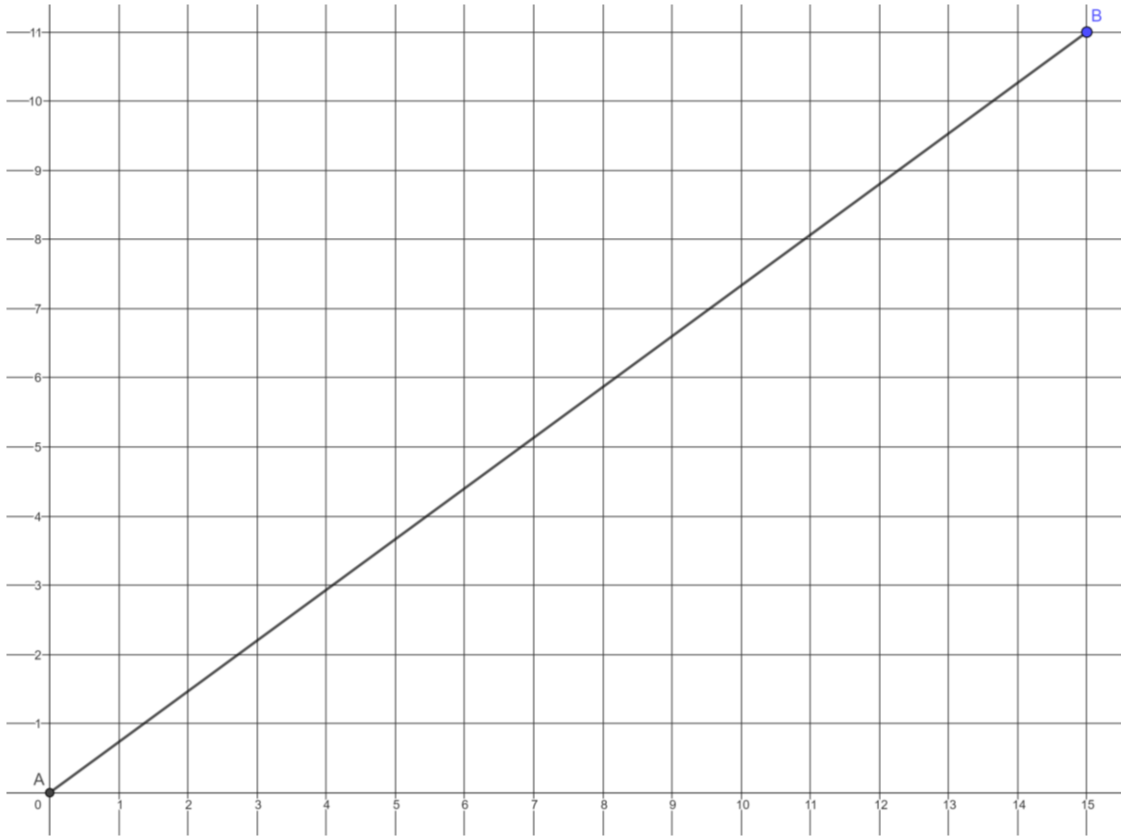
```
liste1,liste2,liste3=[],[],[]
def toutesLesDimensions(perimetre):
    liste=[]
    for i in range(1,perimetre//2):
        longueur=i
        Largeur=perimetre//2-i
        liste.append((longueur,Largeur))
    return liste
liste1=toutesLesDimensions(150)
liste2=toutesLesDimensions(100)
liste3=toutesLesDimensions(50)
for (l1,L1) in liste1:
    for (l2,L2) in liste2:
        for (l3,L3) in liste3:
            if L1+L2==l1 and l2+L3==l1 and L1+l3==l1:
                print((l1,L1),(l2,L2),(l3,L3))
```

Ce programme renvoie les couples $(45,30),(35,15),(15,10)$.

<u>Exercice 5</u> : La diagonale
On observe que la grille proposée dans l'énoncé est constituée de 4 grilles identiques 3×5. Cette simplification est due au fait que $2 = \mathrm{PGCD}(6{,}10)$.

Comme $81 = \mathrm{PGCD}(891{,}1215)$, il suffit de déterminer le nombre de carrés grisés dans une grille 11×15 puis de multiplier ce nombre par 81.

Une première méthode consiste à construire une grille 11×15 sur un quadrillage (avec Geogebra par exemple) et compter le nombre de carrés traversés par cette diagonale : on en trouve 25.



Ainsi, le nombre de carrés grisés sur la grille $\mathbf{891 \times 1215}$ est égal à $\mathbf{81 \times 25 = 2025}$.

Plus rigoureusement, chaque fois que la diagonale traverse une ligne (horizontale ou verticale) du quadrillage, elle traverse un nouveau carré (elle ne peut pas passer par un nœud car 11 et 15 sont premiers entre eux). Elle traverse donc 14 lignes verticales et 10 lignes horizontales, soit 24 carrés. N'oublions pas le premier carré traversé avant qu'elle ne coupe la première ligne. Elle traverse donc 25 carrés grisés.
Plus généralement, dans une grille $a \times b$ où a et b sont premiers entre eux, on démontre comme ci-dessus que le nombre de carrés traversés est $(a-1)+(b-1)+1 = a+b-1$.

Voici maintenant le programme en Python proposé par Samuel DESCOURS en terminale (spécialité « mathématiques » au lycée La Prat's de Cluny :

```
sum_n=0
for y in range(1215):
    for x in range(891):
        if y<=(1215/891*x)<y+1 or x<(y*891/1215)<x+1:
            sum_n=sum_n+1
print(sum_n)
```

Exercice 6 : Trois, deux, un, montez !

Notons u_n le nombre de façons de monter un escalier de n marches, avec n entier naturel non nul.

Ainsi, $u_1 = 1$; $u_2 = 2$; $u_3 = 4$; $u_4 = 4 + 2 + 1 = 7$.

En effet, pour monter un escalier de 4 marches, il suffit de monter :

- La dernière marche après avoir monté les trois premières de u_3 façons ;
- Les deux dernières marches en une fois après avoir monté les deux premières de u_2 façons ;
- Les trois dernières marches en une fois après avoir monté la première de u_1 façons.

On peut ainsi généraliser pour un escalier de n marches, avec $n \geq 4$. Il suffit de monter :

- La dernière marche après avoir monté les $(n-1)$ premières de u_{n-1} façons ;
- Les deux dernières marches en une fois après avoir monté les $(n-2)$ premières de u_{n-2} façons ;
- Les trois dernières marches en une fois après avoir monté les $(n-3)$ de u_{n-3} façons.

On en déduit ainsi : $\boldsymbol{u_n = u_{n-1} + u_{n-2} + u_{n-3}}$ où $n \geq 4$.

Il suffit ensuite de remplir une feuille de calcul d'un tableur jusqu'à repérer un nombre de façons supplémentaires d'environ un milliard :

Nombre de marches n	Un façons de monter les n marches	Nombres de façons supplémentaires avec une marche de plus
1	1	
2	2	1
3	4	2
4	7	3
5	13	6
6	24	11
7	44	20
…	…	…
33	334745777	152748176
34	615693474	280947697
35	**1132436852**	**516743378**
36	2082876103	**950439251**
37	3831006429	1748130326

La fin du tableau montre qu'avec un **escalier de 35 marches**, il y a 950 439 251 façons supplémentaires de le monter si on lui ajoute une 36ème marche.

Voici maintenant un programme en Python proposé par l'équipe « GRAND Thomas, LAURENT Louis, LIN Clément et VERNOY Gabriel » en terminale au lycée Carnot :

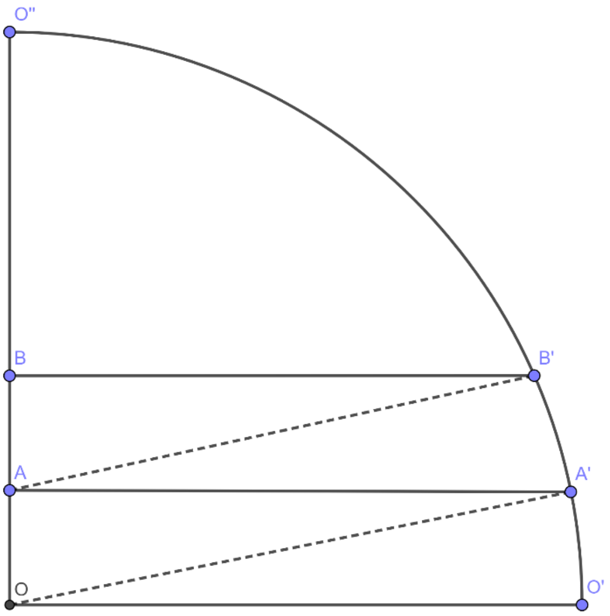
```
a=1
b=2
c=4
n=3
while c-b<10**9:
    d=a
    a=b
    b=c
    c=d+a+b
    n=n+1
print("pour ",n-2," marches, il y a ",a," façons de monter l'escalier")
print("pour ",n-1," marches, il y a ",b," façons de monter l'escalier")
print(" soit une différence de ",b-a," façons de monter l'escalier")
print("pour ",n," marches, il y a ",c," façons de monter l'escalier")
print(" soit une différence de ",c-b," façons de monter l'escalier")
```

Exercice 7 : Gaston tond

L'aire du quart de disque de pelouse est $\frac{\pi R^2}{4} = 625\pi$ m². À chaque fois que Gaston parcourt 1 m, sa tondeuse couvre une surface de $0{,}5$ m².

La longueur minimale qu'il parcourt est donc théoriquement de $\frac{625\pi}{0{,}5} = 1250\pi \approx 3427$ m.

En fait, la tondeuse parcourant des bandes rectangulaires, elle couvrira plus de surface et la longueur totale parcourue par Gaston est supérieure à 1250π.



Le quart de disque ayant pour rayon 50 m et la largeur de tonte de 50 cm, Gaston doit tondre 50 bandes de moins en moins longues.

- Longueur de la 1ère bande : $OO' = 50$ m.
- Longueur de la 2ème bande : le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OAA' permet d'obtenir

$AA' = \sqrt{50^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$ m.

- Longueur de la 3ème bande : le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OBB' permet d'obtenir

$BB' = \sqrt{50^2 - \left(2 \times \frac{1}{2}\right)^2}$ m.

… Et ainsi de suite jusqu'à la 100ème bande.

Finalement, la longueur totale minimale tondue par Gaston est égale à :

$$L = 50 + \sqrt{50^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{50^2 - \left(2 \times \frac{1}{2}\right)^2} + \cdots + \sqrt{50^2 - \left(99 \times \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$L = \sqrt{50^2 - \left(0 \times \frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{50^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{50^2 - \left(2 \times \frac{1}{2}\right)^2} + \cdots + \sqrt{50^2 - \left(99 \times \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$L = \sum_{i=0}^{99} \sqrt{50^2 - \left(i \times \frac{1}{2}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{99} \sqrt{100^2 - i^2}} \text{ m.}$$

Proposons un programme simple en Python (l'utilisation d'un tableur se prête parfaitement aussi au calcul de L) : ce programme retourne **L≈ $\mathbf{3950,52}$ m**.

```
from math import sqrt
L=0
for i in range (0,100):
    L=L+0.5*sqrt(100**2-i**2)
print(L)
```

Voici maintenant un programme en Python proposé par l'équipe « GRAND Thomas, LAURENT Louis, LIN Clément et VERNOY Gabriel » en terminale au lycée Carnot. Ce programme généralise l'exercice avec un rayon R et une largeur de coupe quelconques :

```
from math import sqrt
def tonte(rayon,largeur):
    nb_passage=0            #nombre de passages effectués depuis le début de la tonte
    dist_actu=rayon         #distance à parcourir dans le ième passage
    dist_totale=0
    while dist_actu>0:
```

```
    dist_actu=sqrt(rayon**2-(nb_passage*largeur)**2)
    dist_totale=dist_totale+dist_actu
    nb_passage=nb_passage+1
  return dist_totale
```

<u>Exercice 8</u> : De A à Z

Pour un minimum de sauts, l'idée est de maximiser les allers-retours entre les cases 15 et 16, de somme 31.
On peut le faire de deux façons :

- On arrive à la case 16 par la case 12 puis on termine par des allers-retours entre les cases 15 et 16.
  Comme $2025 = 31 \times 63 + 16 + 56 = 31 \times 64 + 16 + 25$, il suffit d'étudier ces deux situations d'arriver en 12 avec un chemin totalisant 25 ou 56 en un minimum de sauts.
  - Effectuer un chemin de longueur 25 arrivant à 12 est impossible ;
  - Effectuer un chemin minimal de longueur 56, arrivant en 12 est réalisable. Il en existe plusieurs mais le plus court est : D – 1 – 5 – 9 – 5 – 6 – 7 – 11 – 12.

- On arrive à la case 15 par la case 11 ou 14 puis on termine par des allers-retours entre les cases 15 et 16. Comme, $2025 = 31 \times 63 + 72 = 31 \times 64 + 41 = 31 \times 65 + 10$, Il suffit d'étudier ces trois situations d'arriver en 11 ou 14 avec un chemin totalisant 10, 41 ou 72 en un minimum de sauts.
  - Effectuer un chemin de longueur 10 arrivant à 11 ou 14 est impossible ;
  - Effectuer un chemin de longueur 72 arrivant à 11 ou 14 demande plus de sauts qu'un simple aller-retour entre les cases 15 et 16 ;
  - Effectuer un chemin minimal de longueur 41, arrivant en 11 ou 12 est réalisable. Le seul possible est : D – 1 – 2 – 3 – 4 – 8 – 12 – 11.

Finalement, nous avons trouvé deux chemins. Calculons leur nombre de sauts respectif :

- D – 1 – 5 – 9 – 5 – 6 – 7 – 11 – 12 – 16 suivis de 63 allers-retours pour un total de $9 + 126 + 1 = 136$ sauts.
- D – 1 – 2 – 3 – 4 – 8 – 12 – 11 suivis de 64 allers-retours pour un total de $7 + 128 + 1 = 136$ sauts.

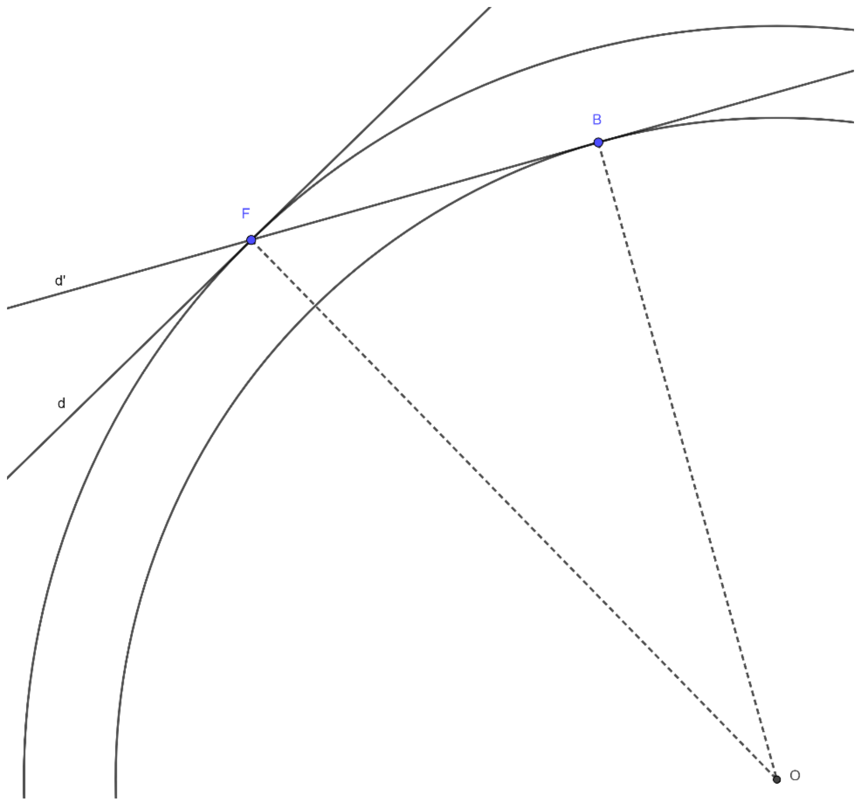
<u>Conclusion</u> : Aller de A à Z requiert un minimum de 136 sauts.

Exercice 9 : Quel cirque !

Notons F le centre de la roue avant (Front) et B celui de la roue arrière (Back).

Les deux roues décrivent un cercle : la roue avant le cercle de centre O et de rayon $R = \mathrm{OF}$ et la roue arrière le cercle de centre O et de rayon $r = \mathrm{OB}$.

La roue avant a pour direction celle de la tangente d au point F et la roue arrière a pour direction celle de la tangente d' au point B. Cette tangente d' a même direction que le segment [FB] représentant le cadre du vélo et de longueur 50 cm.



D'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OBF :

$R^2 = 50^2 + r^2$ (E)

Posons x le rayon des deux roues.

D'après l'énoncé, 6 fois le périmètre du cercle de rayon R est égal 100 tours de la roue avant : $6 \times 2\pi R = 100 \times 2\pi x$.

De même, 6 fois le périmètre du cercle de rayon r est égal 99 tours de la roue avant : $6 \times 2\pi r = 100 \times 2\pi x$.

Après simplification : $\begin{cases} 100x = 6R \\ 99x = 6r \end{cases}$

D'où $\frac{R}{r} = \frac{100}{99} \Leftrightarrow R = \frac{100r}{99}$.

En remplaçant R dans l'équation (E) :

$$\left(\frac{100r}{99}\right)^2 = 50^2 + r^2 \Leftrightarrow \left(\frac{100}{99}\right)^2 r^2 - r^2 = 2500 \Leftrightarrow r^2\left(\left(\frac{100}{99}\right)^2 - 1\right) = 2500 \Leftrightarrow r = \frac{50}{\sqrt{\left(\frac{100}{99}\right)^2 - 1}}.$$

Soit $r \approx 350{,}9$ cm.

Comme $99x = 6r$, $x = \frac{6r}{99} = \frac{2r}{33} = \frac{100}{33\sqrt{\left(\frac{100}{99}\right)^2 - 1}} \approx \mathbf{21{,}3}$ **cm**.

IREM DIJON

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE BOURGOGNE

UNIVERSITÉ BOURGOGNE EUROPE

Université de Bourgogne - U.F.R. Sciences et Techniques - IREM –
9, avenue Savary - B.P. 47 870 - 21078 DIJON cedex
☎ 03 80 39 52 30 - Télécopie 03 80 39 52 39
e-mail "iremsecr@u-bourgogne.fr"
http://irem.u-bourgogne.fr/